

33. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST

(Kategorie SENIOR – přípravné úlohy)

1. Několik hostů sedělo u kulatého stolu. Uprostřed stolu stál košík, v němž bylo 2011 jahod. Víme, že každý z hostů snědl z košíku buď dvakrát více jahod, nebo o šest jahod méně než jeho soused napravo. Dokažte, že všechny jahody *nebyly* snězeny.

(3 BODY)

2. Každé pole *skryté* tabulky $n \times n$ obsahuje právě jednu z číslic od 1 do 9. Její řádky (čtené zleva doprava) a sloupce (čtené shora dolů) reprezentují n -místná čísla. Petr chce napsat takové n -místné číslo, které ve svém zápise neobsahuje nulu, aby toto číslo a také aby číslo s opačným pořadím číslic (vzhledem k číslu napsanému) nebylo mezi $2n$ uvažovanými n -místnými čísly ve skryté tabulce. Určete, jaký je nejmenší počet polí skryté tabulky, jejichž obsah musí Petr znát, aby úkol splnil.

(4 BODY)

3. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|AB| = 10$, $|BC| = 14$, $|CD| = 11$, $|DA| = 5$. Určete velikost úhlu, který svírají jeho úhlopříčky.

(4 BODY)

4. Přirozená čísla $a < b < c$ splňují podmínku: $b + a$ je násobkem $b - a$ a současně $c + b$ je násobkem $c - b$. Zápis čísla a tvoří 2011 číslic a zápis čísla b obsahuje 2012 číslic. Určete počet číslic čísla c .

(Všechna tři čísla a, b, c jsou zapsána v desítkové soustavě.)

(4 BODY)

5. V rovině uvažujme libovolných 10 přímek v obecné poloze (žádné dvě z nich nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí jedním společným bodem). Pro každý průsečík dvojice těchto přímek uvažujme menší z úhlů, které obě přímky svírají. Určete, jaký je největší možný součet velikostí všech těchto úhlů.

(5 BODŮ)

33. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST

(Kategorie JUNIOR – přípravné úlohy)

1. Na nejdelší straně AB trojúhelníku ABC jsou zvoleny body P a Q tak, že $|AQ| = |AC|$ a $|BP| = |BC|$. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku PQC je shodný se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC .
(3 BODY)
2. Několik hostů sedělo u kulatého stolu. Uprostřed stolu stál košík, v němž bylo 2011 jahod. Víme, že každý z hostů snědl z košíku buď dvakrát více jahod, nebo o šest jahod méně než jeho soused napravo. Dokažte, že všechny jahody *nebyly* snězeny.
(4 BODY)
3. Z tabulky 9×9 bylo odstraněno všech 16 polí ležících současně na sudém řádku a v sudém sloupci. Rozřežte zbylý obrazec na pravoúhelníky složené z celých zbylých polí tak, aby mezi nimi bylo co nejméně čtverců 1×1 .
(4 BODY)
4. Vrcholům 33úhelníku jsou v určitém pořadí přiřazena přirozená čísla od 1 do 33 (každé číslo je použito právě jednou). Každé straně tohoto mnohoúhelníku je pak připsán součet dvou čísel v jejích krajních bodech. Mohlo se stát, že stranám mnohoúhelníku bylo (v nějakém pořadí) připsáno 33 po sobě jdoucích čísel?
(4 BODY)
5. Po přímé silnici se stejným směrem pohybují chodec a cyklista, zatímco povoz a auto jedou opačným směrem. Každý z účastníků se pohybuje konstantní rychlostí (každý jinou). Nejprve cyklista předjel chodce, po nějaké době minul povoz a pak po stejné době minul auto. Auto nejdříve minulo cyklistu, poté za určitý čas minulo chodce a za stejný čas pak předjelo povoz. Cyklista předjel chodce v 10 hodin a chodec potkal auto v 11 hodin. Určete, kdy chodec minul povoz?
(5 BODŮ)