32. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST

(Kategorie SENIOR – přípravné úlohy)

1. Všechny stěny konvexního mnohostěnu tvoří navzájem podobné trojúhelníky. Dokažte, že v takovém mnohostěnu existují dvě dvojice shodných stěn (určitá dvojice shodných stěn a ještě jiná dvojice shodných stěn).

(3 BODY)

2. Dospělý červ měří 1 metr. Je-li červ dospělý, můžeme ho rozříznout na dvě části v libovolném poměru délek. Každá z obou částí začne ihned znovu dorůstat rychlostí 1 metr za hodinu. Jakmile dosáhne délky 1 metr, stane se dospělým červem a přestane růst. Rozhodněte, zda lze z jednoho dospělého červa v čase kratším než 1 hodina získat 10 dospělých červů.

(4 BODY)

3. Podél kruhu je umístěno 100 bílých kamenů. Je dáno přirozené číslo k $(1 \leq k \leq 50)$. V každém kroku zvolíme blok k sousedních kamenů, v němž jsou oba krajní kameny bílé, a oba tyto kameny obarvíme načerno. Určete, pro která k je možno po konečném počtu kroků dosáhnout toho, aby všechny kameny byly černé.

(4 BODY)

4. Ze čtyř vrcholů konvexního pětiúhelníku jsou sestrojeny čtyři kolmice k protilehlým stranám (k přímkám, nichž tyto strany leží), které se protínají v jednom společném bodě. Dokažte, že i kolmice z pátého vrcholu tohoto pětiúhelníku k protilehlé straně prochází tímto společným bodem.

(5 BODŮ)

5. V jisté zemi je 100 měst a síť silnic, které města spojují. Každá silnice spojuje právě dvě města, přičemž neprotíná žádnou jinou silnici. Mezi každými dvěma městy existuje spojení po těchto silnicích. Dokažte, že některé z těchto silnic lze označit jako *hlavní* tak, aby z každého města vycházel lichý počet hlavních silnic.

(5 BODŮ)

32. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST
(Kategorie JUNIOR – přípravné úlohy)

1. Podél kružnice jsou napsána v nějakém pořadí všechna přirozená čísla od 1 do 2010 tak, že se při pohybu podél kružnice jedním směrem čísla střídavě zvětšují a zmenšují. Dokažte, že rozdíl některých dvou po sobě jdoucích čísel je dělitelný 2.

(3 BODY)

2. Pravoúhelník je rozdělen deseti vodorovnými řezy a deseti svislými řezy na 121 malých pravoúhelníků. Předpokládejme, že obvod některých 111 malých pravoúhelníků je vyjádřen přirozeným číslem. Dokažte, že i zbývajících deset malých pravoúhelníků má celočíselný obvod.

(4 BODY)

3. Dospělý červ měří 1 metr. Je-li červ dospělý, můžeme ho rozříznout na dvě části v libovolném poměru délek. Každá z obou částí začne ihned dorůstat rychlostí 1 metr za hodinu. Jakmile dosáhne délky 1 metr, stane se dospělým červem a přestane růst. Rozhodněte, zda lze z jednoho dospělého červa v čase kratším než 1 hodina získat 10 dospělých červů.

(5 BODŮ)

4. Je dán konvexní čtyřúhelník, přičemž každá jeho úhlopříčka jej dělí na dva rovnoramenné trojúhelníky. Obě úhlopříčky dělí současně tento čtyřúhelník na čtyři rovnoramenné trojúhelníky. Rozhodněte, za tento čtyřúhelník je nutně čtvercem?

(5 BODŮ)

5. Drak uvěznil rytíře a dal mu 100 různých mincí. Polovina z nich byla kouzelných a pouze drak věděl, které to jsou. Každý den rytíř rozdělí všechny mince na dvě hromádky (ne nutně stejné). Pokud budou obě hromádky obsahovat týž počet kouzelných mincí nebo týž počet obyčejných mincí, drak rytíře propustí. Rozhodněte, zda se rytíř může (při vhodně zvolené strategii) osvobodit nejpozději do

a) 50 dnů?

(2 BODY)

b) 25 dnů?

(3 BODY)