

31. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST

(Kategorie SENIOR – přípravné úlohy)

1. Sedmimístný kód nazveme *dobrý*, je-li vytvořen pomocí sedmi navzájem různých číslic desítkové soustavy. Heslem sejfů je dobrý kód. Sejf se otevře, jestliže zadáme dobrý kód a alespoň jedna z jeho číslic je na odpovídajícím místě hesla. Rozhodněte, zda existuje způsob, jak otevřít sejf (bez znalosti hesla) pomocí méně než sedmi pokusů.

(4 BODY)

2. V prostoru uvažujme uzavřenou lomenou čáru $ABCDEF$ složenou ze šesti hran (úseček), pro něž platí $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$, a přitom $|AB| \neq |DE|$. Dokažte, že všechny hrany této lomené čáry leží v téže rovině.

(4 BODY)

3. Rozhodněte, zda existují přirozená čísla a, b, c, d , pro něž platí

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}.$$

(4 BODY)

4. Na každé straně pravidelného 2009-úhelníku zvolme bod a označme S obsah 2009-úhelníku, jehož vrcholy tvoří všechny zvolené body. Dokažte, že obsah 2009-úhelníku, jehož vrcholy tvoří body souměrně sdružené se zvolenými body podle středů stran, na nichž tyto body leží, je roven S .

(4 BODY)

5. V jisté zemi jsou dvě hlavní města (na jihu a na severu země) a kromě toho několik dalších měst. Některá z těchto měst jsou spojena silnicemi. Je známo, že na některých silnicích se vybírá poplatek (mýto). Dále víme, že při libovolné cestě z jižního hlavního města (JHM) se dostaneme do severního hlavního města (SHM) tak, že vždy musíme využít aspoň 10 silnic, na nichž se vybírá poplatek. Dokažte, že všechny silnice, na nichž se vybírá poplatek, je možno rozdělit deseti společnostem tak, že při libovolné cestě z JHM do SHM, je nutno zaplatit všem deseti společnostem.

(5 BODŮ)

31. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST

(Kategorie JUNIOR – přípravné úlohy)

1. Rozhodněte, zda čtverec lze rozřezat na devět menších čtverců a přitom jeden z nich obarvit bílou, tři šedou a pět černou barvou tak, aby stejně obarvené čtverce byly shodné a různě obarvené čtverce byly neshodné.
(3 BODY)
2. K dispozici máme 40 závaží s hmotnostmi 1 g, 2 g, 3 g, $\dots$, 40 g. Deset závaží o hmotnostech vyjádřených sudými čísly jsme položili na levou misku rovnoramenných vah, deset závaží o hmotnostech vyjádřených lichými čísly jsme položili na pravou misku vah. Váhy jsou nyní v rovnováze. Dokažte, že na jedné z misek jsou dvě závaží, jejichž hmotnosti se liší právě o 20 g.
(4 BODY)
3. Na stole leží papírový kruh s poloměrem 5 cm. Petr postupně (v jednom směru) přikládá ke kruhu zvnějšku papírové čtverce o straně 5 cm tak, že
 - a) právě jeden vrchol každého čtverce leží na hranici kruhu (tj. kruh a každý čtverec mají společný právě jeden bod).
 - b) čtverce se nepřekrývají,
 - c) každý čtverec má se sousedním čtvercem právě jeden společný vrchol.Určete, kolik čtverců může Petr ke kruhu přiložit, a dokažte, že první a poslední čtverec mají společný vrchol.
(4 BODY)
4. Sedmimístný kód nazveme *dobrý*, je-li vytvořen pomocí sedmi navzájem různých číslic desítkové soustavy. Heslem sejfů je dobrý kód. Sejf se otevře, jestliže zadáme dobrý kód a alespoň jedna z jeho číslic je na odpovídajícím místě hesla. Rozhodněte, zda existuje způsob, jak otevřít sejf (bez znalosti hesla) pomocí méně než sedmi pokusů.
(5 BODŮ)
5. Na nové internetové stránce se zaregistrovalo 2000 lidí. Každý z nich vyzval 1000 zaregistrovaných, aby se stali jeho přáteli. Dvojici lidí nazveme *spřátelenou*, jestliže se k přátelství oba vyzvali navzájem. Určete nejmenší možný počet spřátelených dvojic, který mohl na stránce vzniknout.
(5 BODŮ)