

XXX ТУРНИР ГОРОДОВ

Решения задач сложного варианта весеннего тура

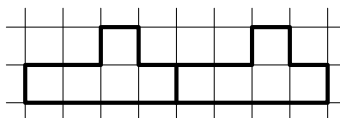
8–9 классы

1. Да, сможет.

Васе достаточно называть все время одно и то же число: $1/(2008 \cdot 2009)$.

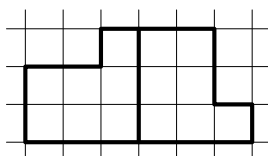
2. Существует много примеров таких многоугольников. Приведем несколько.

На следующем рисунке равные многоугольники совмещаются параллельным переносом:



Этот пример можно обобщить до примера, в котором одна из сторон делится пополам, а другая — в произвольном отношении (сделайте это!).

Можно построить пример, где равные многоугольники совмещаются поворотом, как на следующем рисунке:



б) Да.

Возьмем квадрат и проведем через его центр две взаимно перпендикулярные прямые, делящие стороны квадрата в отношении $1 : 2$. Эти прямые разрежут квадрат на четыре равные части.

Рассмотрим одну из двух трапеций, на которые разбивает квадрат такая прямая. Вторая прямая разобьет эту трапецию на две равные части; при этом сторону квадрата она разделит в отношении $1 : 2$, а противоположную сторону трапеции — пополам.

3. Нет, нельзя.

Предположим противное: пусть мы расставили знаки так, что машина не может попасть в дом. Заметим, что если машина может проехать из клетки A в клетку B , то она может проехать и из клетки B в клетку A (например, проезжая тот же маршрут в обратном порядке). Чтобы получить противоречие, достаточно тогда доказать, что, выезжая из дома, машина может выехать за границу квадрата.

Пусть машина выезжает из центральной клетки на север. В каждой следующей клетке она сможет ехать на север или на запад, никогда не двигаясь на юг и на восток. Тогда не позднее, чем через 101 шаг, она заведомо выйдет за границы квадрата.

4. Нет, не обязательно.

Рассмотрим последовательность: $1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, \dots, k^2, k(k+1), (k+1)^2, (k+1)(k+2), (k+2)^2, \dots$. Заметим, что

$$k(k+1) = \sqrt{k^2 \cdot (k+1)^2}, \quad (k+1)^2 = \frac{k(k+1) + (k+2)(k+1)}{2}.$$

Таким образом, средние арифметические и геометрические чередуются. Осталось заметить, что эта последовательность не является ни арифметической, ни геометрической прогрессией, поскольку $k(k+1) - k^2 = k$ и $\frac{k(k+1)}{k^2} = \frac{k+1}{k}$ зависят от k . Значит, построенная последовательность — искомая.

5. Назовем рыцарей, движущихся по часовой стрелке, «черными», а рыцарей, движущихся против часовой стрелки — «белыми».

Пусть в час, когда на каждой башне дежурили хотя бы 2 рыцаря, везде есть по рыцарю, скажем, черного цвета. Остальных рыцарей не меньше 9, и значит среди этих остальных есть хотя бы 5 одноцветных. Но тогда в любой момент будут 5 башен, на которых есть хотя бы 2 рыцаря, что противоречит условию (был момент, когда ровно на 5 башнях было ровно по одному рыцарю).

Значит, в час, когда на каждой башне дежурили хотя бы 2 рыцаря, есть башня A , где нет черных рыцарей, и есть башня B , где нет белых рыцарей. Немного переформулируем задачу. Будем считать, что черные рыцари неподвижны: тогда белые рыцари движутся против часовой стрелки, каждый час сдвигаясь на 2 башни (против часовой стрелки). Итак, мы выбрали час, когда в A нет черных рыцарей (и значит, никогда и не будет), а в B нет белых рыцарей. В следующий час башней без белых рыцарей будет башня, находящаяся через одну после B (против часовой стрелки), и т.д. В какой-то момент (в течение 9 часов) башней без белых рыцарей окажется башня A , и мы получим требуемое в условии задачи.

6. Отразим точку B относительно прямой AC ; пусть при этом отражении она переходит в точку B_1 (рис. 5). Продлим BP и BQ до пересечения с AB_1 и CB_1 в точках M_1 и N_1 . Тогда треугольники AMP и AM_1P , а также CNQ и CN_1Q равны, и сумма площадей треугольников AM_1P , CN_1Q и пятиугольника $M_1PQN_1B_1$ равна половине площади ромба $ABCB_1$.

Теперь покажем, что площадь четырехугольника $M_1BN_1B_1$ также равна половине площади ромба $ABCB_1$. Для этого заметим, что $\angle M_1BB_1 + \angle B_1BN_1 = 60^\circ = \angle B_1BN_1 + \angle N_1BC$, а стало быть, треугольники M_1BB_1 и N_1BC равны по стороне ($BB_1 = BC$) и двум прилежащим к ней углам. Поскольку площадь треугольника B_1BC равна половине площади ромба $ABCB_1$, то и площадь четырехугольника $M_1BN_1B_1$ равна половине площади ромба $ABCB_1$. Стало быть,

$$S_{AM_1P} + S_{M_1PQN_1B_1} + S_{CN_1Q} = S_{PQB} + S_{M_1PQN_1B_1},$$

поэтому площадь треугольника PQB равна сумме площадей треугольников AM_1P и CN_1Q , а значит, и сумме площадей треугольников AMP и CNQ .

7. Можно считать, что k и l различны (иначе задача очевидна). Заметим, что $C_n^i = C_n^{n-i}$ (выбрать i предметов из n — то же самое, что не выбрать остальные $n - i$). Поэтому можно также считать, что k и l не превосходят $n/2$.

Решим такую комбинаторную задачу: *сколькими способами можно заполнить два мешка, в первый из которых вмещается k предметов, а во второй — l предметов, если для этого у нас есть n различных предметов, $n \geq k + l$.* (Уточним: порядок, в котором предметы свалены в данный мешок, не важен — важно только множество предметов, находящихся в данном мешке). Ясно, что ответ в этой задаче: $C_n^k \cdot C_{n-k}^l$ — заполняем сначала первый мешок k предметами (из данных n), и для каждого такого заполнения еще заполняем второй мешок l предметами (из оставшихся $n - k$). Но, аналогично, ответом в этой задаче ответом будет также число $C_n^l \cdot C_{n-l}^k$. Так как ответ тут может быть только один, мы доказали тождество:

$$C_n^k \cdot C_{n-k}^l = C_n^l \cdot C_{n-l}^k.$$

Из тождества следует, что C_n^l делит произведение $C_n^k \cdot C_{n-k}^l$. Но если C_n^k и C_n^l взаимно просты, то тогда C_n^l делит второй сомножитель, то есть C_{n-k}^l . Это невозможно, так как, очевидно, $C_n^l > C_{n-k}^l$. Значит C_n^k и C_n^l не могут быть взаимно простыми, что и требовалось доказать.

10–11 классы

1. Нет.

Пусть два прямоугольника имеют соприкасающиеся стороны (скажем, вертикальные). Рассмотрим проекции центров на прямую l , содержащую эти стороны. Отрезок I , соединяющий центры прямоугольников, не выходит за границы объединения этих прямоугольников, если обе

проекция лежат на общем участке соприкасающихся сторон (поскольку тогда точка пересечения отрезка I с прямой l , расположенная между проекциями, тоже лежит на этом участке).

Осталось найти такие два соприкасающихся прямоугольника. Рассмотрим прямоугольник A в левом верхнем углу. Пусть B и C — соседние с ним прямоугольники, причем B содержит середину правой стороны A , а C содержит середину нижней стороны A . Так как B и C не перекрываются, то не может одновременно нижняя сторона B располагаться ниже нижней стороны A , и правая сторона C располагаться правее правой стороны A . Пусть, например, нижняя сторона B расположена не ниже нижней стороны A . Тогда A и B — искомые прямоугольники.

2. См. решение задачи 4 для 8–9 классов.

3. 90.

Будем называть диагональ «четной», если на ней стоит четное число фишек, и «нечетной» — если нечетное.

Докажем, что больше 90 фишек убрать нельзя. Любая фишка стоит на пересечении двух диагоналей, и если мы снимаем ее, четность каждой из этих диагоналей меняется. Тогда мы получаем либо из двух четных диагоналей две нечетные, либо из четной и нечетной диагонали — четную и нечетную диагональ. Значит число нечетных диагоналей не может уменьшиться. Изначально имеется 38 диагоналей, из которых 19 — нечетные. Если бы мы смогли оставить меньше 10 фишек, то они заняли бы максимум $9 \cdot 2 = 18$ диагоналей, и значит нечетных диагоналей было бы не больше 18 — противоречие.

	83	84	85	86	87	88	89	90	
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
	65	66	67	68	69	70	71	72	
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
	47	48	49	50	51	52	53	54	
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
	29	30	31	32	33	34	35	36	
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
	11	12	13	14	15	16	17	18	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Пример, когда можно снять 90 фишек, приведен на рисунке (в каждой клетке поставлен номер шага, на котором снимается соответствующая фишка).

4. Достаточно доказать, что вокруг шестигранника, соседнего с нашим (по грани), тоже можно описать сферу (тогда, аналогично, переходя по граням от шестигранника к шестиграннику, мы докажем, что все они вписанные).

Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — соседний с нашим шестигранник, его грани $ABCD$, $DCC_1 D_1$ и $BCC_1 B_1$ лежат на гранях исходного параллелепипеда, и к нему примыкает наш вписанный шестигранник $A_1 B_1 C_1 D_1 A_2 B_2 C_2 D_2$.

Все грани нашего шестигранника — вписанные четырехугольники. Тогда и все грани соседнего — тоже. В самом деле:

одна грань ($A_1 B_1 C_1 D_1$) просто общая;

грань $ABCD$, противоположная общей, является вписанным четырехугольником, так как ее стороны параллельны соответственно сторонам грани $A_2 B_2 C_2 D_2$;

если же грань примыкает к общей, скажем это грань $ABB_1 A_1$, то ее угол $BB_1 A_1$ дополняет до 180° смежный угол $A_1 B_1 B_2$, а углы $B_2 A_2 A_1$ и $BA A_1$ тоже дополняют друг друга до 180° (поскольку это углы параллелограмма $BAA_2 B_2$), и раз $\angle A_1 B_1 B_2 + \angle B_2 A_2 A_1 = 180^\circ$, то и $\angle BB_1 A_1 + \angle BAA_1 = 180^\circ$.

Рассмотрим теперь сферу, описанную около тетраэдра $BCDC_1$ (такая существует, так как любой тетраэдр вписанный). Эта сфера пересекается с плоскостями граней шестигранника $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ по окружностям. Но так как любая окружность однозначно определяется своими тремя точками, то точка A лежит на этой сфере (поскольку лежит на окружности, проходящей через точки B , C и D), и аналогично точки B_1 и D_1 лежат на этой сфере, а тогда уж и точка A_1 лежит на этой сфере (поскольку лежит на окружности, проходящей через точки A , B и B_1).

5. См. решение задачи 7 младших классов.

6. Второй игрок всегда может обеспечить себе победу.

Приведем выигрышную стратегию второго игрока. Нарисуем вписанный в данную окружность правильный n -угольник, одна из вершин которого — точка, отмеченная первым игроком

на первом ходу. Пока не все вершины этого n -угольника отмечены, будем ставить синие точки в его вершины. Поскольку одна из вершин этого многоугольника уже красная, вершины многоугольника закончатся раньше, чем ходы второго игрока.

Рассмотрим момент, когда все вершины этого n -угольника отмечены. Пусть среди них r красных и $b = n - r$ синих. Будем называть дугу, соединяющую соседние вершины нашего n -угольника, *красной*, если оба ее конца красные, и *синей* в противном случае (если хотя бы один конец дуги синий). Красные точки образуют одну или несколько групп подряд идущих точек. В каждой такой группе красных дуг на 1 меньше, чем точек. Значит, всего красных дуг меньше, чем красных точек, то есть красных дуг не более $r - 1$. Поскольку всех дуг (и красных, и синих) столько же, сколько всего точек, то синих дуг не менее $b + 1$.

За следующие $r - 1$ ходов второй игрок должен отметить хотя бы по одной точке внутри каждой из красных дуг (и ставить точки только на красные дуги). Посмотрим теперь, какая ситуация сложилась к последнему ходу второго игрока. Первый игрок отметил r вершин n -угольника и еще $n - r = b$ других точек. Следовательно, на одной из синих дуг нет отмеченных точек, и второй может обеспечить себе дугу длины, сколь угодно близкой к $2\pi R/n$. С другой стороны, на каждой из красных дуг длины $2\pi R/n$ есть хотя бы одна синяя точка. Таким образом, второй выигрывает.

7. Выпишем в ряд несколько первых членов последовательности, указывая номер шага:

номер шага:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	
число в ячейке:	6	7	8	9	10	15	18	19	20	21	22	33	36	...
						--	--					--	--	
на сколько было														
увеличение:	1	1	1	1	5	3	1	1	1	1	11	3		

Можно заметить, что для начальных шагов выполняется следующее: если на данном шаге число в ячейке увеличилось не на 1, то это число в ячейке в три раза больше номера шага (на рисунке эти шаги подчеркнуты).

Пусть на шаге n число в ячейке стало равно $3n$. На шаге $n + 1$ число в ячейке увеличится на $\text{НОД}(n + 1, 3n)$, и так как n и $n + 1$ взаимно просты, увеличение будет на $\text{НОД}(n + 1, 3)$ то есть на 1 или на 3. В последнем случае снова получим, что число в ячейке в три раза больше номера шага, после чего следующее увеличение будет уже на 1.

Сделанные замечания позволяют высказать гипотезу.

Пусть на шаге n в ячейку запишется число $3n$, и на следующем шаге число в ячейке увеличится на 1. Рассмотрим ближайший шаг $n + k$, на котором увеличение числа в ячейке будет не на 1. Тогда это увеличение будет на простое число, причем число в ячейке снова окажется в три раза больше номера шага.

Ясно, что доказав гипотезу, мы решим задачу.

Докажем гипотезу по индукции. Базу мы уже проверили выше для маленьких номеров шагов. Докажем переход. Пусть на шаге n в ячейке будет записано $3n$, после чего шаг $n + k$ будет первым, при котором число в ячейке увеличится не на 1:

номер шага:	n	$n+1$	$n+2$	...	$n+k-1$	$n+k$
число в ячейке:	$3n$	$3n+1$	$3n+2$	...	$3n+k-1$	?

Увеличение числа на шаге $n + k$ будет равно¹

$$\text{НОД}(n + k, 3n + k - 1) = \text{НОД}(n + k, 3(n + k) - (3n + k - 1)) = \text{НОД}(n + k, 2k + 1),$$

¹мы пользуемся свойством наибольшего общего делителя: $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, a - b)$

то есть является делителем числа $2k + 1$.

Предположим, что число $2k + 1$ не является простым и имеет простой делитель p , входящий в $\text{НОД}(n + k, 2k + 1)$. Так как $2k + 1$ нечетно, этот делитель хотя-бы в три раза меньше $2k + 1$, а значит меньше k . Посмотрим тогда на шаг $n + k - p$. На этом шаге число в ячейке увеличится на

$$\text{НОД}(n+k-p, 3n+k-p-1) = \text{НОД}(n+k-p, 3(n+k-p)-(3n+k-p-1)) = \text{НОД}(n+k-p, 2k+1-2p).$$

Но и $n + k - p$, и $2k + 1 - 2p$ делятся на p , откуда получаем, что уже на шаге $n + k - p$ было увеличение не на 1. Противоречие с минимальностью шага $n + k$. Значит $2k + 1$ простое и следовательно увеличение на шаге $n + k$ происходит ровно на $2k + 1$, и число в ячейке становится равным $3n + k - 1 + 2k + 1 = 3(n + k)$ — в три раза больше номера шага. Гипотеза доказана по индукции, и тем самым задача решена.