

30. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST
(Kategorie SENIOR – soutěžní úlohy)

1. Pravoúhelník je rozdělen na několik menších pravoúhelníků. Rozhodněte, zda pro každou dvojici menších pravoúhelníků může existovat úsečka, jejímž krajními body jsou středy těchto dvou pravoúhelníků, která protíná některý další (třetí) pravoúhelník.
(4 BODY)
2. Je dána nekonečná posloupnost navzájem různých přirozených čísel. Víme, že každý člen této posloupnosti (kromě prvního) je buď aritmetickým, nebo geometrickým průměrem dvou sousedních členů. Rozhodněte, zda všechny členy této posloupnosti (od jistého členu počínaje) jsou pouze aritmetickými průměry nebo pouze geometrickými průměry sousedních dvou členů?
(4 BODY)
3. Na každém poli čtvercové desky 10×10 stojí jedna šachová figurka. Zvolíme libovolnou diagonálu, na níž je stojí sudý figurek, a odebereme z této diagonály některou figurku. Určete, jaký největší počet figurek lze tímto způsobem postupně odebrat z dané čtvercové desky.
(6 BODŮ)
4. Rovnoběžnostěn je rozdělen třemi rovinami na osm šestistěnů tak, že jejich stěny tvoří čtyřúhelníky (každá z těchto rovin protíná vždy dvě protilehlé stěny rovnoběžnostěnu a současně neprotíná žádnou z jeho zbývajících stěn). Jestliže lze některému z uvažovaných šestistěnů opsat kulovou plochu, lze ji opsat každému z těchto šestistěnů. Dokažte.
(6 BODŮ)
5. Nechť $\binom{n}{k}$ je počet způsobů, kterými můžeme (bez ohledu na jejich pořadí) vybrat k předmětů z množiny n různých předmětů. Dokažte, že jestliže k a l jsou přirozená čísla větší než 1 a menší než n , potom přirozená čísla $\binom{n}{k}$ a $\binom{n}{l}$ mají společného dělitele většího než 1.
(8 BODŮ)
6. Je dáno přirozené číslo $n > 1$. Dva hráči střídavě označují body na kružnici, první červenou barvou, druhý modrou barvou. Jakmile je označeno n každé barvy, hra končí. Každý z hráčů pak najde na kružnici nejdelší oblouk, jehož krajní body tvoří body obarvené jeho barvou a přitom neobsahuje žádný další obarvený bod. Vyhrává ten z hráčů, který najde delší kružnicový oblouk s danými vlastnostmi (v případě, kdy oba nalezené oblouky mají stejnou délku nebo pokud žádný z hráčů nenajde na kružnici žádný oblouk daných vlastností, končí hra nerozhodně). Určete, který z hráčů může vždy zvítězit (bez ohledu na protivníkovu strategii).
(9 BODŮ)
7. V paměťové buňce počítače je uloženo přirozené číslo 6. Počítač provede milion kroků. V n -tém kroku zvětší obsah paměťové buňky o hodnotu největšího společného dělitele přirozeného čísla v této buňce a čísla n . Dokažte, že v každém kroku zvětší počítač obsah paměťové buňky buď o číslo 1, nebo o prvočíselnou hodnotu.
(9 BODŮ)

30. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST
(Kategorie JUNIOR – soutěžní úlohy)

1. Václav a Petr hrají následující hru: Na tabuli napsána čísla $\frac{1}{2008}$ a $\frac{1}{2009}$. V každém tahu zvolí Václav libovolné reálné číslo x , Petr pak vybere jedno z čísel na tabuli a přičte k němu x . Václav zvítězí, bude-li po několika tazích jedno z čísel na tabuli rovno 1. Může vyhrát Václav nezávisle na Petrových tazích?
(3 BODY)
2. a) Ukažte, že existuje mnohoúhelník, který může být rozdělen úsečkou na dva shodné útvary tak, že jedna ze stran mnohoúhelníku je touto úsečkou rozdělena na poloviny a jiná strana rozdělena v poměru 1 : 2.
(2 BODY)
b) Rozhodněte, zda existuje konvexní mnohoúhelník s touto vlastností?
(3 BODY)
3. Na každém poli šachovnice 101×101 (kromě středového pole) je jeden ze dvou znaků „odbočit“ a „přímo“. Šachová figurka „mašinka“ se pohybuje po šachovnici. Mašinka „přijíždí“ k šachovnici kolmo k okraji šachovnice (směrem dovnitř) a svou cestu začíná v některém krajní poli šachovnice. Jestliže se dostane na pole se znakem „přímo“, pokračuje na další políčko tímž směrem, dostane-li se na políčko se znakem „odbočit“, pokračuje na jedno ze dvou sousedních polí (libovolné), které leží ve směru kolmém ke směru pohybu mašinky. Ve středovém políčku šachovnice je nádraží. Je možno rozmístit znaky „odbočit“ a „přímo“ na šachovnici tak, aby mašinka nemohla „dojet“ do nádraží?
(5 BODŮ)
4. Je dána nekonečná posloupnost navzájem různých přirozených čísel. Víme, že každý člen této posloupnosti (kromě prvního) je buď aritmetickým, nebo geometrickým průměrem dvou sousedních členů. Rozhodněte, zda všechny členy této posloupnosti (od jistého členu počínaje) jsou pouze aritmetickými průměry nebo pouze geometrickými průměry sousedních dvou členů?
(5 BODŮ)
5. Kolem hradu jsou postaveny hradby s devíti věžemi, které střeží rytíři. Po každé hodině každý z rytířů přejde na sousední věž. Každý z rytířů se pohybuje stálým směrem, a to buď ve směru hodinových ručiček, nebo proti směru hodinových ručiček. Během noci každý z rytířů hlídá v každé z věží. Určitou hodinu střežili každou věž aspoň 2 rytíři a určitou hodinu existovalo právě pět věží, které střežil právě 1 rytíř. Dokažte, že jistou hodinu nebyl ž v některé z věží žádný rytíř.
(6 BODŮ)
6. Velikost vnitřního úhlu při vrcholu C v rovnoramenném trojúhelníku ABC je 120° . Z vrcholu C vycházejí dva paprsky, které svírají úhel 60° . Oba paprsky se odrazí od základny AB podle zákona „úhel odrazu se rovná úhlu dopadu“ dále dopadnou na ramena trojúhelníku ABC tak, že ho rozdělí na pět menších trojúhelníků. Uvažujme tři z nich, které leží při základně AB . Dokažte, že obsah prostředního trojúhelníku je roven součtu obsahů obou krajních trojúhelníků.
(7 BODŮ)
7. Nechť $\binom{n}{k}$ je počet způsobů, kterými můžeme (bez ohledu na jejich pořadí) vybrat k předmětů z množiny n různých předmětů. Dokažte, že jestliže k a l jsou přirozená čísla větší než 1 a menší než n , potom přirozená čísla $\binom{n}{k}$ a $\binom{n}{l}$ mají společného dělitele většího než 1.
(9 BODŮ)