Решения задач младшего базового варианта

Задача 1. Пусть с одной стороны от проведенной прямой находится k вершин 2009-угольника. Тогда с другой стороны от нее находятся $2009-k$ вершин 2009-угольника. Прямая пересекает в точности те диагонали, которые соединяют вершины, находящиеся по разные стороны от нее. Вместе с двумя пересеченными нашей прямой сторонами 2009-угольника (которые на четность не влияют) таких диагоналей будет $k(2009-k)$. Поскольку один из этих двух сомножителей обяза-тельно четен, четно и их произведение.

Задача 2. Ответ: Да. ((((7^(7^7))^7)^7)^7)^7 = ((((7^7)^(7^7))^7)^7)^7. Есть и другие способы.

Задача 3. Ответ: 50. Понятно, что надо иметь не меньше, чем по 30 единиц, двоек, ..., девяток и не меньше 29 нулей. Поскольку у кубика 6 граней, и $30\cdot 9+29=299>49\cdot 6$, меньше, чем 50 кубиками обойтись нельзя. Покажем, что 50 кубиков хватит. Расположим их по кругу, выберем любой и напишем на одной из его граней, а также на одной из граней каждого из следующих за ним по часовой стрелке 29 кубиков по нулю. На одной из граней каждого следующих 30 по часовой стрелке кубиков напишем по единице и т.д., до девяток включительно. Теперь у нас каждая цифра написана на гранях 30 разных кубиков, и мы сможем составить любое 30-значное число, последовательно выбирая кубики с нужными цифрами.

Задача 4. Ответ: да, например, 12-значное число $a=988888888890$. Сумма цифр этого числа равна $8\cdot 9+18=90$. Десять процентов от числа a — это число 98888888889, прибавляя его к a получим число 1087777777779 с суммой цифр $7\cdot 9+9+8+1=81$. То есть сумма цифр уменьшилась с 90 до 81 — как раз на 10 процентов от 90. Есть и другие примеры.

Задача 5. Пусть O — центр описанной окружности треугольника NAM. Поскольку угол $NAM=30^\circ$ вписан в эту окружность, соответствующий ему центральный угол NOM равен 60°. При повороте на 60° вокруг O, переводящем N в M, прямая DC перейдет в прямую, проходящую через точку M и составляющую с DC угол в 60°, ориентированный по направлению поворота. Единственной такой прямой является CB. Поскольку центр поворота равноудален от прямой и ее образа при повороте, он лежит на биссектрисе одного из углов, образованных прямой и ей образом. Так как точка O лежит внутри ромба, это означает, что O лежит на диагонали AC.

Решения задач старшего базового варианта

Задача 1. Ответ: Да. ((((7^(7^7))^7)^7)^7)^7 = ((((7^7)^(7^7))^7)^7)^7. Есть и другие способы.

Задача 2. Проведем на плоскости прямую, не параллельную ни одной из прямых, соединяющих пары данных точек, так, чтобы все данные точки оказались по одну сторону от нее. Затем будем параллельно переносить ее в сторону данных точек (например, в направлении, перпендикулярном ей). Движущаяся прямая будет проходить точки по одной. Пусть она приблизилась к точке, из которой исходит a отрезков, и при этом пересекает x из этих a отрезков. Тогда, пройдя точку, она будет пересекать $a-x$ из этих a отрезков, и количество пересекаемых ею отрезков изменится на $(a-x)-x=a-2x$. Из условия задачи следует, что число $a-2x$ должно быть четным. Значит, a — четное число, что и требовалось доказать.

Задача 3. а) По построению x_n при $n\geq 3$ нечетно. Поэтому при $n\geq 5$ сумма $x_{n-1}+x_{n-2}$ четна, откуда $x_n=O(x_{n-1}+x_{n-2})\leq (x_{n-1}+x_{n-2})/2\leq \max\{x_{n-1},x_{n-2}\}$, причем равенство возможно только при $x_{n-1}=x_{n-2}$. Но в последнем случае $x_n=x_{n-1}=x_{n-2}$, и далее все члены последовательности будут такими же, как эти три. Допустим, $x_n<\max\{x_{n-1},x_{n-2}\}$ при всех $n\geq 5$. Тогда $\max\{x_n,x_{n+1}\}<\max\{\max\{x_{n-1},x_{n-2}\},\max\{x_n,x_{n-1}\}\}=\max\{x_{n-1},x_{n-2}\}$ при всех $n\geq 5$. Однако, величина $\max\{x_n,x_{n+1}\}$, принимающая натуральные значения, не может бесконечно убывать. Противоречие.

б) Ответ: Это число $O(\text{НОД}(a,b))$.

Решение. Нетрудно убедиться, что если x_{n+1} и x_{n+2} делятся на некоторое нечетное число, то на него же делятся и x_{n+3} и x_n. Отсюда по индукции выводится, что если два соседних члена нашей последовательности имеют общий нечетный делитель d, то на d делятся все ее члены. В частности, все члены последовательности делятся на $O(\text{НОД}(a, b))$. С другой стороны, если c — та константа, которой, начиная с некоторого места, равны все члены последовательности, то a и b оба делятся на c, то есть c есть делитель числа $O(\text{НОД}(a, b))$. Так как каждое из двух чисел c и $O(\text{НОД}(a, b))$ делится на другое, эти числа равны.

Задача 4. Заметим, что если стереть пару идущих подряд единиц, разность $M - N$ не изменится: четность расстояний от этих единиц до каждого из нулей всегда будет различной, и потому стирание двух единиц уменьшит M и N на одно и то же число. По аналогичной причине не меняет разности $M - N$ стирание пары идущих подряд нулей. Будем стирать такие пары, пока это возможно. В итоге либо цифр не останется совсем (и тогда $M - N = 0$, что нас устраивает), либо останутся чередующиеся нули и единицы. Но в этом случае, как легко, видеть между любыми двумя единицей и нулем — четное число знаков, то есть $M > N = 0$.

Задача 5. Как хорошо известно, отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней, пересекаются в одной точке (центре тетраэдра) и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины. Пусть S — центр тетраэдра $ABCD$. Продолжим отрезок XS на расстояние $SY = 3XS$ за точку S. Тогда треугольники SAY и SA_1X, где A_1 — точка пересечения медиан грани BCD, гомотетичны с центром S и коэффициентом -3. Следовательно, $AY||XA_1$. Таким образом, все описанные в условии прямые пересекаются в точке Y.