

30. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST
(Kategorie SENIOR – přípravné úlohy)

1. Nechť a^b značí a^b . Abychom určili pořadí výpočtů, rozmístíme závorky do výrazu $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7^7}}}}}}$ (celkem 5 párů závorek). Je možné rozmístit tyto závorky dvěma různými způsoby tak, aby v obou případech nabyl tento výraz stejné hodnoty?
(3 BODY)
2. V rovině je dáno několik bodů, z nichž žádné tři neleží na téže přímce. Některé body jsou spojeny úsečkami. Víme, že libovolná přímka, která neprochází žádným z těchto bodů, protíná sudý počet úseček. Dokažte, že z každého bodu vychází sudý počet úseček. (Číslo 0 zde považujeme za sudé.)
(4 BODY)
3. Nechť $O(n)$ je největší lichý dělitel přirozeného čísla n . Pro libovolně zvolená přirozená čísla $x_1 = a$ a $x_2 = b$ uvažujme nekonečnou posloupnost přirozených čísel definovanou pomocí vztahu $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$ pro každé $n = 3, 4, \dots$.
 - a) Dokažte, že od určitého členu počínaje jsou všechny další členy rovny témuž přirozenému číslu.
(2 BODY)
 - b) Určete, jak lze toto číslo určit pomocí a a b .
(2 BODY)
4. V řadě vedle sebe je napsáno několik nul a jedniček. Uvažujme všechny dvojice číslic (nikoliv nutně sousední), kde levá číslice je 1 a pravá je 0. Označme M počet všech takových dvojic, že číslice 1 a 0 jsou odděleny sudým počtem číslic (0 zde považuje za sudé číslo). Podobně označme N počet všech takových dvojic, že číslice 1 a 0 jsou odděleny lichým počtem číslic. Dokažte, že platí nerovnost $M \geq N$.
(4 BODY)
5. Nechť X je libovolný vnitřní bod daného čtyřstěnu. Každým vrcholem tohoto čtyřstěnu vedme rovnoběžku s úsečkou, jejímiž krajními body jsou bod X a těžiště protilehlé stěny čtyřstěnu. Dokažte, že tyto čtyři přímky se protínají v jednom společném bodě.
(4 BODY)

30. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST
(Kategorie JUNIOR – přípravné úlohy)

1. V konvexním 2009úhelníku jsou sestrojeny všechny úhlopříčky. Přímka protíná tento 2009úhelník, ale neprochází jeho vrcholy. Ukažte, že tato přímka protíná sudý počet úhlopříček.
(3 BODY)
2. Nechť a^b značí a^b . Abychom určili pořadí výpočtů, rozmístíme závorky do výrazu $7^{7^{7^{7^{7^{7^7}}}}}$ (celkem 5 párů závorek). Je možné rozmístit tyto závorky dvěma různými způsoby tak, aby v obou případech nabyl tento výraz stejné hodnoty?
(4 BODY)
3. Vláda chce vyrobit sadu shodných krychlí a na každou jejich stěnu napsat jednu číslici tak, aby mohl z těchto krychlí sestavit libovolné třicetimístné číslo. Určete nejmenší počet krychlí, které bude Vláda potřebovat. (Číslice 6 a 9 se otočením nezmění jedna ve druhou.)
(4 BODY)
4. Přirozené číslo jsme zvětšili o 10 % a získali opět přirozené číslo. Je možné, že se součet jeho číslic zmenšil právě o 10 %?
(4 BODY)
5. V rovině je dán kosočtverec $ABCD$ s vnitřním úhlem 120° při vrcholu A . Na stranách BC a CD leží body M a N tak, že úhel NAM má velikost 30° . Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku NAM leží na úhlopříčce daného kosočtverce.
(5 BODŮ)