

29. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST
(Kategorie SENIOR – soutěžní úlohy)

1. a) Petr a Jirka si mysleli každý po třech přirozených číslech. Petr napsal na tabuli největší společné dělitele každých dvou svých čísel a Jirka nejmenší společné násobky každých dvou svých čísel. Ukázalo se, že Petr napsal (v jistém pořadí) na tabuli stejná čísla jako Jirka. Dokažte, že všechna čísla, která byla na tabuli napsána, jsou si rovna.
(2 BODY)
b) Rozhodněte, zda bude platit stejné tvrzení, budou-li si oba chlapci na počátku myslet čtyři přirozená čísla.
(2 BODY)
2. Úhlopříčky tětírového čtyřúhelníku se protínají v bodě P . Nechtě K, L, M, N jsou středy jeho stran. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům PKL, PLM, PMN a PNK jsou shodné.
(6 BODŮ)
3. Najděte všechny rostoucí aritmetické posloupnosti s konečným počtem členů, jejichž součet je roven 1, takové, že každý člen této posloupnosti má tvar $1/k$, kde k je přirozené číslo.
(6 BODŮ)
4. Je dána sada závaží, z nichž každé je označeno jistou hmotností. Je známo, že množina správných hmotností a množina jejich označení (popisů) si vzájemně jednoznačně odpovídají; závaží přitom nemusí být označena správnými hmotnostmi. Uvažujeme rovnoramenné váhy (homogenní tyč, která je vyvážená vzhledem ke svému středu). Jednotlivá závaží lze přitom na ramena vah umístit libovolně (nikoliv pouze na jejich koncích). Rozhodněte, zda můžeme jedním vážením vždy rozhodnout, zda všechna závaží jsou označena správnou hmotností? (Rovnoramenné váhy jsou v rovnováze, právě když jsou součty momentů jednotlivých závaží vzhledem ke středu vah na obou ramenech vah stejné. Momentem každého závaží rozumíme součin md jeho hmotnosti m a vzdálenosti d jeho zavěšení od středu vah.)
(6 BODŮ)
5. Kouzelník má zavázané oči. Jeden z diváků vyloží na stůl v řadě N stejných mincí. Sám přitom zvolí, které z nich jsou lícem nahoru. Kouzelníkův asistent pak požádá tohoto diváka, aby na list papíru napsal libovolné číslo od 1 do N a ukáže ho ostatním divákům. Jakmile asistent uvidí číslo na listu papíru, požádá diváka, aby otočil jednu z mincí, kterou sám zvolí. Poté se kouzelník (již bez zavázaných očí) podívá na řadu mincí a správně určí číslo napsané na listu papíru.
a) Dokažte, že pokud jsou kouzelník a jeho asistent dohodnuti, jak určit čísla pro $N = a$ a $N = b$, může kouzelník určit toto číslo také pro $N = ab$.
(4 BODY)
b) Určete všechna čísla N , pro něž existuje předem dohodnutý postup mezi kouzelníkem a jeho asistentem, jak určit zvolené číslo.
(4 BODY)
6. V rovině jsou dány dva konvexní mnohoúhelníky P a Q . K libovolné straně mnohoúhelníku P sestrojme dvě její rovnoběžky tak, aby mnohoúhelník Q ležel v pásu mezi oběma rovnoběžkami. Označme h vzdálenost těchto rovnoběžek a ℓ délku uvažované strany mnohoúhelníku P a uvažujme dále součin $\ell \cdot h$. Sečteme-li nyní všechny uvažované součiny, které odpovídají všem stranám mnohoúhelníku P , dostaneme hodnotu (P, Q) . Dokažte, že platí $(P, Q) = (Q, P)$.
(8 BODŮ)
7. Před Martinem leží na stole 100 uzavřených krabiček. V každé z nich je červená krychle nebo modrá krychle. Martin má u sebe na počátku 100 Kč. Náhodně vybere některou z uzavřených krabiček, pak zvolí jednu z barev (červená, modrá) a položí k této krabičce určitou částku (ne nutně v celých korunách), která nepřevyšuje částku, kterou v daném okamžiku disponuje. Poté se krabička otevře. Zvolená částka buď propadá, nebo Martin stejnou částku vyhrává (v závislosti na barvě krychle uvnitř krabičky). Hra může pokračovat dokud všechny krabičky nejsou otevřeny. Určete, jakého největšího zisku může Martin (s jistotou) dosáhnout, pokud ví,
a) že v krabičkách je pouze jedna modrá krychle,
(3 BODY)
b) že v krabičkách je právě n ($n \leq 100$) modrých krychlí.
(5 BODŮ)

Poznámka. Martin nemusí vložit žádnou částku (tj. částku 0 Kč) a může přitom v rámci hry krabičku otevřít a prohlédnout si barvu krychle v ní uložené.

29. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST
(Kategorie JUNIOR – soutěžní úlohy)

1. Uvažujme bod K strany CD kosočtverce $ABCD$, pro který platí $|AD| = |BK|$. Nechť F značí průsečík úhlopříčky BD a osy strany BC . Dokažte, že body A , F a K leží na téže přímce.
(5 BODŮ)
2. a) Petr a Jirka si mysleli po třech přirozených číslech. Petr napsal na tabuli největší společné dělitele každých dvou svých čísel a Jirka nejmenší společné násobky každých dvou svých čísel. Ukázalo se, že Petr napsal (v jistém pořadí) na tabuli stejná čísla jako Jirka. Dokažte, že všechna čísla, která byla na tabuli napsána, jsou si rovna.
(3 BODY)
b) Rozhodněte, zda bude platit stejné tvrzení, budou-li si oba chlapci myslet na počátku čtyři přirozená čísla.
(3 BODY)
3. Míša stojí uprostřed kruhového trávníku o poloměru 100 m. Po každé minutě udělá krok délky 1 m. Před každým krokem sdělí Katce, kterým směrem se vydá. Katka však může zvolený směr změnit ve směr opačný. Rozhodněte, zda se Míša může při vhodném rozhodování dostat vně kruhového trávníku nebo ho Katka může vždy svými pokyny na tomto trávníku udržet.
(6 BODŮ)
4. Je dána tabulka $1 \times n$. Dva hráči hrají následující hru: První z nich vepíše na některé z volných polí „křížek“, druhý pak „kolečko“. Hráči se dále při vepisování znaků do tabulky pravidelně střídají, přitom dva křížky ani dvě kolečka nesmí být v tabulce na sousedních polích. Prohrává ten, který již nemůže do tabulky (za uvedených podmínek) vepsat svůj znak (křížek nebo kolečko). Rozhodněte, který z hráčů může vždy vyhrát (nezávisle na způsobu hry soupeře).
(7 BODŮ)
5. Je dána sada závaží, z nichž každé je označeno jistou hmotností. Je známo, že množina správných hmotností a množina jejich označení (popisů) si vzájemně jednoznačně odpovídají; závaží přitom nemusí být označena správnými hmotnostmi. Uvažujme rovnoramenné váhy (homogenní tyč, která je vyvážená vzhledem ke svému středu). Jednotlivá závaží lze přitom na ramena vah umístit libovolně (nikoliv pouze na jejich koncích). Rozhodněte, zda můžeme jedním vážením vždy rozhodnout, zda všechna závaží jsou označena správnou hmotností? (Rovnoramenné váhy jsou v rovnováze, právě když jsou součty momentů jednotlivých závaží vzhledem ke středu vah na obou ramenech vah stejné. Momentem každého závaží rozumíme součin md jeho hmotnosti m a vzdálenosti d jeho zavěšení od středu vah.)
(8 BODŮ)
6. Kouzelník má zavázané oči. Jeden z diváků položí na stůl do řady N stejných mincí. Sám přitom zvolí, které z nich jsou lícem nahoru. Kouzelníkův asistent pak požádá tohoto diváka, aby na list papíru napsal libovolné číslo od 1 do N a ukáže ho ostatním divákům. Jakmile asistent uvidí číslo na listu papíru, požádá diváka, aby otočil jednu z mincí, kterou sám zvolí. Poté se kouzelník (již bez zavázaných očí) podívá na řadu mincí a správně určí číslo napsané na listu papíru.
a) Dokažte, že pokud kouzelník a jeho asistent jsou dohodnuti, jak určit toto číslo pro $N = a$, může kouzelník určit toto číslo také pro $N = 2a$.
(4 BODY)
b) Určete všechna čísla N , pro něž existuje předem dohodnutý postup mezi kouzelníkem a jeho asistentem, aby kouzelník mohl určit číslo napsané na listu papíru.
(5 BODŮ)
7. Vilém se rozhodl stát se spisovatelem. Proto každému písmenu české abecedy přiřadil jedno slovo, které obsahuje toto písmeno. Pak napsal slovo, které odpovídá písmenu „a“. Dále všechna písmena tohoto slova nahradil odpovídajícími slovy (oddělené mezerami). Poté v tomto textu nahradil každé písmeno odpovídajícím slovem. Tuto operaci provedl 40-krát. Vilémův text začínal takto: „Naši bratři školou prošli“. Dokažte, že toto slovní spojení se v textu opakuje.
(9 BODŮ)