

29. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST

(Kategorie SENIOR – přípravné úlohy)

1. Uvažujme 30 karet, z nichž na každé je napsáno číslo: na deseti kartách je číslo a , na jiných deseti kartách je číslo b a na posledních deseti kartách je číslo c (čísla a, b, c jsou navzájem různá). Ke každým pěti kartám existuje pětice jiných karet tak, že součet čísel na těchto deseti kartách je 0. Dokažte, že jedno z čísel a, b, c je 0.

(4 BODY)

2. Rozhodněte, zda existují taková přirozená čísla n, m , že nejmenší společný násobek čísel $1, 2, \dots, n$ je 2008krát větší než nejmenší společný násobek čísel $1, 2, \dots, m$.

(5 BODŮ)

3. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu A . Označme M střed jeho přepony BC a H patu výšky z vrcholu A . Kolmice ke straně AC procházející bodem M protíná kružnici opsanou trojúhelníku AMC v bodě P ($P \neq M$). Dokažte, že přímka BP prochází středem výšky AH .

(5 BODŮ)

4. V rovině je dán konvexní mnohoúhelník a čtverec s vlastností: Pokud existují dvě shodné kopie uvažovaného mnohoúhelníku ležící uvnitř daného čtverce, pak oba mnohoúhelníky mají aspoň jeden společný bod. Dokažte, že pokud existují tři shodné kopie uvažovaného mnohoúhelníku ležící uvnitř daného čtverce, pak existuje aspoň jeden bod, který je společný všem třem shodným mnohoúhelníkům.

(5 BODŮ)

5. Je dána čtvercová číselná tabulka (viz dole). Je v ní povoleno postupně zaměnit kterékoliv dva sloupce a kterékoliv dva řádky (v libovolném pořadí). Určete počet všech (navzájem různých) tabulek, které lze uvedeným způsobem získat z dané číselné tabulky.

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1

(6 BODŮ)

29. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST
(Kategorie JUNIOR – přípravné úlohy)

1. Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má protilehlé strany (AB a DE , BC a EF , CD a FA) rovnoběžné a současně platí $|AB| = |DE|$. Dokažte, že $|BC| = |EF|$ a $|CD| = |FA|$.
(3 BODY)
2. V rovině je dáno 10 shodných úseček, přičemž všechny jejich průsečíky jsou označeny. Každý průsečík dělí každou z úseček, na níž leží, v poměru délek 3 : 4. Určete, jaký je největší možný počet (označených) průsečíků uvažovaných úseček.
(5 BODŮ)
3. Uvažujme 30 karet, z nichž na každé je napsáno číslo: na deseti kartách je číslo a , na jiných deseti kartách je číslo b a na posledních deseti kartách je číslo c (čísla a, b, c jsou navzájem různá). Ke každým pěti kartám existuje pětice jiných karet tak, že součet čísel na těchto deseti kartách je 0. Dokažte, že jedno z čísel a, b, c je 0.
(5 BODŮ)
4. Určete všechna přirozená čísla n taková, že číslo $(n + 1)!$ je násobkem součtu $1! + \dots + n!$. (Výraz $k!$ znamená součin všech přirozených čísel od 1 po k včetně.)
(6 BODŮ)
5. Uvažujme tabulku 10×10 , v níž každé políčko (čtverec 1×1) je červené, modré nebo bílé. Žádná dvě políčka, která mají společnou celou stranu, nejsou obarvena stejnou barvou. Tabulka má právě 20 červených políček.
 - a) Dokažte, že z této tabulky lze vždy vyřezat 30 pravoúhelníků, rozměru 1×2 , přičemž každý z nich má jedno políčko bílé a druhé modré.
(2 BODY)
 - b) Najděte příklad takového obarvení polí této tabulky, že z ní lze vyřezat 40 pravoúhelníků stejného typu jako v části a). (Své řešení řádně zdůvodněte.)
(2 BODY)
 - c) Najděte příklad takového obarvení polí této tabulky, že z ní lze vyřezat nejvýše 30 pravoúhelníků stejného typu jako v části a). (Své řešení řádně zdůvodněte.)
(2 BODY)