

28. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST

(Kategorie SENIOR – hlavní varianta)

1. Když se Honza se seznámil s novými přáteli, chtěl si zapamatovat, kteří z nich se znají navzájem mezi sebou. Za tím účelem si nakreslil kružnici a každého ze svých přátel si znázornil jako její tětivu. Pokud se dva z jeho přátel znají, tětivy jim odpovídající se protínají, pokud se však neznají, odpovídající tětivy se neprotínají. Honza se domnívá, že takový systém tětív existuje pro libovolnou skupinu jeho přátel. Rozhodněte, zda má pravdu. (Mají-li dvě tětivy společné koncové body, protínají se.)  
(4 BODY)
2. Na stranách  $BC$ ,  $CA$  a  $AB$  ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$  uvažujme po řadě takové body  $A_1, B_1, C_1$ , že přímky  $AA_1$ ,  $BB_1$  a  $CC_1$  jsou osami vnitřních úhlů trojúhelníku  $A_1B_1C_1$ . Dokažte, že úsečky  $AA_1$ ,  $BB_1$  a  $CC_1$  jsou výšky trojúhelníku  $ABC$ .  
(6 BODŮ)
3. V čísle  $a = 0,12457\dots$  je  $n$ -tá číslice za desetinnou čárkou stejná jako poslední číslice před desetinnou čárkou v čísle  $n\sqrt{2}$ . Dokažte, že  $a$  je iracionální číslo.  
(6 BODŮ)
4. Rozhodněte, zda je možno hranol rozřezat na jehlany tak že podstava každého z nich leží vždy v jedné z podstav hranolu a jeho vrchol leží v druhé podstavě hranolu.  
(6 BODŮ)
5. Necht'  $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n = a_n/b_n$ , kde  $a_n/b_n$  je zlomek v základním tvaru. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel  $n$ , pro něž platí nerovnost  $b_{n+1} < b_n$ .  
(7 BODŮ)
6. Řekneme, že balíček 52 karet je vytvořen *pravidelně*, jestliže každé dvě sousední karty jsou buď téže hodnoty, nebo téže barvy. Totéž platí platí pro dvojici karet nahoře a vespod tohoto balíčku, přitom nahoře leží pikové eso. Dokažte, že počet způsobů, jak vytvořit balíček pravidelně, je
  - a) dělitelný číslem  $12!$ ,  
(3 BODY)
  - b) dělitelný číslem  $13!$ .  
(5 BODŮ)

7. Necht  $x_1, x_2, \dots, x_k$  jsou kladná reálná čísla, pro něž platí

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 < \frac{x_1 + \dots + x_k}{2} \quad \text{a} \quad x_1 + \dots + x_k < \frac{x_1^3 + \dots + x_k^3}{2}.$$

a) Dokažte, že  $k > 50$ .

(3 BODY)

b) Uveďte příklad takových čísel pro některé  $k > 50$ .

(3 BODY)

c) Určete nejmenší  $k$ , pro které takový příklad existuje.

(3 BODY)

## 28. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST

(Kategorie JUNIOR – hlavní varianta)

1. Uvažujme vepsanou a opsanou kružnici pravidelnému sedmiúhelníku a kružnici vepsanou a opsanou pravidelnému sedmnáctiúhelníku. Oba mnohoúhelníky tak leží v mezikružích omezených svou kružnicí vepsanou a opsanou. Jsou-li obsahy obou uvažovaných mezikruží stejné, mají oba mnohoúhelníky shodné strany. Dokažte.

(3 BODY)

2. Když se Honza se seznámil s novými přáteli, chtěl si zapamatovat, kteří z nich se znají navzájem mezi sebou. Za tím účelem si nakreslil kružnici a každého ze svých přátel si znázornil jako její tětivu. Pokud se dva z jeho přátel znají, tětivy jim odpovídající se protínají, pokud se však neznají, odpovídající tětivy se neprotínají. Honza se domnívá, že takový systém tětív existuje pro libovolnou skupinu jeho přátel. Rozhodněte, zda má pravdu. (Mají-li dvě tětivy společné koncové body, protínají se.)

(5 BODŮ)

3. Ve čtvercové tabulce  $3 \times 3$  je umístěno 9 čísel (v prvním řádku zleva po řadě čísla  $a, b, c$ , ve druhém zleva po řadě čísla  $d, e, f$  a ve třetím řádku zleva po řadě čísla  $g, h, i$ ). Tato tabulka je tzv. magický čtverec, tj. součet všech čísel v každém řádku, v každém sloupci a na obou úhlopříčkách je stejný. Dokažte, že platí

a)

$$2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e,$$

(3 BODY)

b)

$$2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3.$$

(3 BODY)

4. Necht  $\rho$  značí poloměr kružnice vepsané ostroúhlému trojúhelníku. Uvažujme tři tečny této kružnice, které rozdělí daný trojúhelník na tři pravoúhlé trojúhelníky a šestiúhelník o obvodu  $o$ . Určete součet velikostí průměrů kružnic vepsaných uvažovaným třem pravoúhlým trojúhelníkům.

(6 BODŮ)

5. Obálkou čtvercového výkresu  $1 \times 1$  nazveme pravoúhelníkový list papíru o obsahu 2, pomocí něhož lze (bez rozřezání) úplně obalit tento výkres z obou stran. Je zřejmé, že pravoúhelník  $2 \times 1$  a čtverec o straně  $\sqrt{2}$  jsou obálky tohoto výkresu.

- a) Ukažte, že existují i jiné obálky tohoto výkresu.

(4 BODY)

- b) Dokažte, že existuje nekonečně mnoho takových obálek.

(3 BODY)

6. Necht  $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n = a_n/b_n$ , kde  $a_n/b_n$  je zlomek v základním tvaru. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel  $n$ , pro něž platí nerovnost  $b_{n+1} < b_n$ .

(8 BODŮ)

7. Před manipulátorem leží na stole balíček 52 karet. Diváci se chtějí dovědět, v jakém pořadí jsou karty v balíčku umístěny (nezáleží přitom, zda shora–dolu nebo zdola–nahoru). Mohou přitom manipulátorovi klást pouze otázky typu: „Kolik karet leží mezi takovou a takovou kartou?“ Jeden z diváků se však dozví, v jakém pořadí jsou karty rozloženy. Jaký je nejmenší možný počet jeho otázek, které musí manipulátorovi položit, tak, aby ostatní diváci mohli po odpovědích na jeho otázky stanovit pořadí karet v balíčku?

(9 BODŮ)