

28. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST
(Kategorie SENIOR – přípravné úlohy)

1. Na tabuli byla napsána tři přirozená čísla x, y, z . Petr si na list papíru napsal hodnotu součinu některých dvou z těchto tří čísel a na tabuli místo třetího čísla napsal číslo o 1 menší. S novými třemi čísly na tabuli pak provedl stejnou operaci atd., až jedno z čísel na tabuli bylo rovno nule. Určete, jaký byl (v tomto okamžiku) součet všech čísel, která si Petr napsal na list papíru.

(4 BODY)

2. V rovině je dán tečnový čtyřúhelník. Každé dva dotykové body kružnice jemu vepsané, které leží na sousedních stranách daného čtyřúhelníku, jsou spojeny úsečkami. Takto sestrojeným trojúhelníkům jsou vepsány kružnice. Dokažte, že úhlopříčky čtyřúhelníku, jehož vrcholy jsou totožné se středy kružnic vepsaných těmito čtyřem trojúhelníkům, jsou navzájem kolmé.

(4 BODY)

3. Do tabulky 2006×2006 jsou napsána čísla $1, 2, 3, \dots, 2006^2$. Dokažte, že v tabulce existují dvě čísla, která jsou vepsána do polí, které mají společnou celou stranu nebo jeden vrchol, taková, že jejich součet je dělitelný číslem 4.

(4 BODY)

4. Jsou dány dvě nekonečné posloupnosti: aritmetická $a_1, a_2, a_3, \dots$ a geometrická $b_1, b_2, b_3, \dots$ takové, že každý člen geometrické posloupnosti je také členem uvažované aritmetické posloupnosti. Dokažte, že kvocient geometrické posloupnosti je celé číslo.

(4 BODY)

5. Rozhodněte, zda je možno vepsat do krychle pravidelný osmistěn tak, aby vrcholy osmistěnu ležely na hranách krychle.

(Pravidelný osmistěn má právě 6 vrcholů, z každého přitom vychází 4 hrany a jeho stěnami jsou rovnostranné trojúhelníky.)

(5 BODŮ)

28. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST

(Kategorie JUNIOR – přípravné úlohy)

1. Na tabuli byla napsána po řadě dvě přirozená čísla x a y ($x \leq y$). Jirka si na list papíru napsal hodnotu x^2 (druhou mocninu prvního čísla) a pak zaměnil čísla na tabuli dvojicí čísel x a $y - x$ (napřed bylo napsáno menší z obou čísel). S novými čísly na tabuli pak provedl stejnou operaci atd., až jedno z čísel na tabuli bylo rovno 0. Určete, jaký byl (v tomto okamžiku) součet všech čísel, která si Jirka napsal na list papíru.

(4 BODY)

2. Je známo, že lháři vždy lžou, pravdomluvní lidé vždy mluví pravdu a vychytralí někdy mluví pravdu a někdy lžou. Můžete jim dávat otázky, na něž je odpověď buď *ano*, nebo *ne* (např.: „Je pravda, že tento člověk je vychytralý?“).

- a) Před vámi stojí tři osoby – lhář, pravdomluvný a vychytralý, kteří navzájem znají svou identitu. Popište, jak je rozeznáte pomocí takových otázek.

(1 BOD)

- b) Před vámi stojí čtyři osoby – lhář, pravdomluvný a dva vychytralí, kteří navzájem znají svou identitu. Dokažte, že oba vychytralí se mohou dohodnout na svých odpovědích tak, že nejste schopni na základě možných otázek zjistit identitu žádné ze čtyř osob.

(3 BODY)

3. a) Na tabuli je napsáno 2007 přirozených čísel větších než 1. Dokažte, že je možno označit jedno z nich tak, že součin ostatních čísel lze vyjádřit jako rozdíl druhých mocnin dvou přirozených čísel.

(2 BODY)

- b) Na tabuli je napsáno 2007 přirozených čísel větších než 1, z nichž jedno je rovno 2006. Je známo, že existuje právě jedno z nich takové, že součin ostatních čísel lze vyjádřit jako rozdíl druhých mocnin dvou přirozených čísel. Dokažte, že je to číslo 2006.

(2 BODY)

4. Na prodloužení strany BC trojúhelníku ABC za bodem B leží bod B_1 takový, že $|BB_1| = |AB|$. Nechtě osy vnějších úhlů při vrcholech B a C se protínají v bodě M . Dokažte, že body A, B_1, M a C leží na téže kružnici.

(4 BODY)

5. Určete, na jaký největší počet shodných nekonvexních mnohoúhelníků lze rozřezat čtverec tak, aby všechny strany těchto mnohoúhelníků byly rovnoběžné se stranami čtverce a přitom ani jeden z těchto mnohoúhelníků nevznikne posunutím (translací) jiného z uvažovaných mnohoúhelníků.

(4 BODY)