1. MEMO, Eisenstadt, Rakousko

20. – 26. září 2007

Soutěž jednotlivců

22. září 2007

1. Nechť a, b, c, d jsou kladná reálná čísla splňující rovnost $a+b+c+d=4$. Dokažte, že

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leq 4.$$

2. Je dáno k (k je celé číslo větší než 1) sad míčů. Každá sada obsahuje n míčů, které jsou označeny čísly $1, 2, \ldots, n$. Každý míč obarvíme jednou ze dvou barev (bílou nebo černou) tak, že

a) míče označené stejným číslem mají stejnou barvu,

b) každá $(k+1)$-prvková množina míčů, označená (ne nutně různými) čísly $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ a vyhovující podmínce $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = a_{k+1}$, není jednobarevná.

V závislosti na k určete největší možné číslo n, pro něž existuje takové obarvení míčů.

3. Nechť k je daná kružnice a k_1, k_2, k_3 a k_4 jsou čtyři menší kružnice, jejichž středy po řadě O_1, O_2, O_3 a O_4 leží na kružnici k. Pro $i = 1, 2, 3, 4$ se kružnice k_i a k_{i+1} ($k_5 = k_1$) protínají ve dvou bodech A_i a B_i, přičemž body A_i leží na kružnici k. Předpokládejme že body O_1, A_1, O_2, A_2, O_3, A_3, O_4, A_4 jsou navzájem různé a leží v tomto pořadí na kružnici k. Dokažte, že $B_1B_2B_3B_4$ je pravoúhelník.

4. Určete všechny dvojice (x, y) kladných celých čísel vyhovujících rovnici

$$x! + y! = x^y.$$

Každý příklad je hodnocen 8 body.
Čas na vypracování 5 hodin.
Na vaše dotazy je vyhrazeno úvodních 45 min.
Úlohy nejsou řazeny podle obtížnosti.