1. MEMO – Řešení soutěžních úloh – jednotlivci

1. Nechť $p \geq q \geq r \geq s$ je uspořádání prvků uvažované množiny $\{a, b, c, d\}$ kladných reálných čísel, vyhovujících podmínce ze zadání úlohy $a+b+c+d=4$. Užitím permutační nerovnosti pak dostaneme

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab = a \cdot abc + b \cdot bcd + c \cdot cda + d \cdot dab \leq$$

$$\leq p \cdot pqr + q \cdot pqs + r \cdot prs + s \cdot qrs = (pq + rs)(pr + qs)\,.$$

Dvojím užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem kladných reálných čísel p, q, r, s dále obdržíme

$$(pq + rs)(pr + qs) \leq \left(\frac{pq + rs + pr + qs}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\Big((p+s)(q+r)\Big)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\left(\frac{(p+s)+(q+r)}{2}\right)^4 = \frac{1}{64}\,(a+b+c+d)^4 = 4\,,$$

což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Vzhledem k tomu, že se nerovnost nezmění pro každou cyklickou permutaci uspořádané čtveřice (a, b, c, d), můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a \geq c$. Podobně lze předpokládat, že $b \geq d$. Pokud by totiž platilo $b \leq d$, dostaneme cyklickou záměnou uspořádané čtveřice (a, b, c, d) čtveřici (d, a, b, c), v níž $d \geq b$ a současně $a \geq c$. Pak platí

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab = ac(ab + cd) + bd(bc + ad)\,. \tag{1}$$

Pro $a \geq c$ a $b \geq d$ platí $(a-c)(b-d) \geq 0$. Tato nerovnost je tedy ekvivaletní s nerovností

$$ab + cd \geq bc + ad\,. \tag{2}$$

Využitím nerovnosti (2) a užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro dvojici kladných reálných čísel odhadneme pravou stranu rovnosti (1) následujícím způsobem

$$ac(ab + cd) + bd(bc + ad) \leq ac(ab + cd) + bd(ab + cd) = (ab + cd)(ac + bd) \leq$$

$$\leq \left(\frac{(ab + cd) + (ac + bd)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(a+d)(b+c)}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\frac{1}{4}\,(a+b+c+d)^2}{2}\right)^2 = 4\,,$$

což dokazuje dané tvrzení.

2. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že míče označené číslem 1 mají bílou barvu. Předpokládejme dále, že míče označené číslem 2 jsou černé. Protože

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{k}=k\,.$$

mají míče označené číslem k podle podmínky b) černou barvu. Z analogických důvodů jsou míče označené číslem $2k$ bílé, neboť

$$\underbrace{2+2+\ldots+2}_{k}=2k\,.$$

Míče označené číslem $k+1$ jsou pak podle podmínky b) černé, neboť

$$(k+1)+\underbrace{1+\ldots+1}_{k-1}=2k\,.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\underbrace{1+\ldots+1}_{k-1}+2k=3k-1=\underbrace{2+\ldots+2}_{k-1}+(k+1)\,,$$

nemohou být míče označené číslem $3k-1$ obarveny ani jednou z obou barev (bílou nebo černou). Odtud $n\leq 3k-2$.

Předpokládejme nyní, že míče označené číslem 2 mají bílou barvu. Z rovností

$$\begin{aligned}
1+1+\ldots+1+1&=k\,,\\
1+1+\ldots+1+2&=k+1\,,\\
1+1+\ldots+2+2&=k+2\,,\\
&\vdots\\
1+2+\ldots+2+2&=2k-1\,,\\
2+2+\ldots+2+2&=2k
\end{aligned}$$

vyplývá, že míče označené čísly $k,k+1,\ldots,2k$ jsou černé. Z rovnosti

$$\underbrace{k+k+\ldots+k}_{k}=k^2$$

dále plyne, že míče označené čísly k^2 jsou bílé. Protože však

$$\underbrace{1+\ldots+1}_{k-1}+k^2=k^2+k-1=k+\underbrace{(k+1)+\ldots+(k+1)}_{k-1}\,,$$

nemohou mít míče označené číslem k^2+k-1 ani černou ani bílou barvu. Je tudíž $n\leq k^2+k-2$.

Protože $k^2 + k - 2 \geq 3k - 2$ (nerovnost je ekvivaletní s nerovností $k^2 - 2k = k(k-2) \geq 2$), vidíme, že uvažované sady mohou obsahovat nejvýše $k^2 + k - 2$ míčů.

Nyní ukážeme, že pro $n = k^2 + k - 2$ existuje k sad míčů uvedených vlastností. Nechť míče označené čísly $k, k+1, \ldots, k^2 - 1$ jsou černé a ostatní míče jsou bílé. Součet čísel na libovolných k černých míčích je přitom aspoň $k + k + \ldots + k = k^2 > k^2 - 1$, a proto množina černých míčů splňuje podminku b). Uvažujeme-li nyní součet čísel na libovolných k bílých míčích. Jsou-li na nich pouze čísla menší než k, je jejich součet aspoň k a současně je roven nejvýše

$$(k-1) + (k-1) + \ldots + (k-1) = k^2 - k < k^2 .$$

Je-li však aspoň na jednom z k bílých míčů číslo větší nebo rovno k^2, je jejich součet roven aspoň

$$k^2 + 1 + 1 + \ldots + l = k^2 + k - 1 > n .$$

Tím je dokázano, že $n = k^2 + k - 2$ vyhovuje podminkám úlohy.

3. Označme O střed kružnice k. Dále nechť $\alpha_i = |\angle O_i O A_i| = |\angle O_i O A_{i-1}|$ pro $i = 1, 2, 3, 4$ $(A_0 = A_4)$. Pak platí $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 180°$.

Nejprve ukážeme, že úsečky M_1M_3 a M_2M_4 jsou navzájem kolmé. Jejich průsečík označme S. Užitím vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem snadno vidíme, že platí

$$|\angle O_1O_3O_2| = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \qquad \text{a} \qquad |\angle O_4O_2O_3| = \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} .$$

Odtud

$$|\angle O_3SO_2| = 180° - \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2} = 90° .$$

Nyní ukážeme, že $B_1B_2 \parallel O_1O_3$. Vzhledem k tomu, že $|O_2B_1| = |O_2B_2|$, stačí ukázat, že přímka O_2O_4 je osou úhlu $B_1O_2B_2$. Platí

$$\begin{aligned} |\angle O_4O_2B_1| &= |\angle O_4O_2O_1| - |\angle B_1O_2O_1| = \\ &= (90° - |\angle O_3O_1O_2|) - |\angle O_1O_2A_1| = \\ &= 90° - \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} - \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\alpha_4}{2} . \end{aligned}$$

Analogicky ukážeme, že také $|\angle O_4O_2B_2| = \frac{1}{2}\alpha_4$, a tedy $B_1B_2 \parallel O_1O_3$. Podobně dokážeme, že $B_2B_3 \parallel O_2O_4$, $B_3B_4 \parallel O_1O_3$ a $B_4B_1 \parallel O_2O_4$.

Tím je důkaz uzavřen.

4. Předně si všimněme, že pro každou dvojici přirozených čísel x, y platí $x^y = x! + y! \geq 2$, z čehož plyne $x \geq 2$.

Uvažujme nejprve případ, kdy $x = 2$. Hledáme nyní všechna přirozená čísla y, která vyhovují rovnici $2 + y! = 2^y$. Platí $y! \equiv 0 \pmod 2$, a tudíž $y \geq 2$. Odtud plyne $2 + y! \equiv 0 \pmod 4$, a tedy $y! \equiv 2 \pmod 4$, z čehož plyne $y \in \{2, 3\}$. Vzhledem k tomu, že platí $2! + 2! = 2^2$ a $2! + 3! = 2^3$, jsou $(2, 3)$ a $(2, 3)$ dvojice přirozených čísel, které vyhovují dané rovnici.

Nyní uvažujme případ, kdy $x \geq 3$. V tomto případě je číslo $x - 1$ dělitelem $x!$, není ale dělitelem čísla x^y, neboť čísla $x - 1$ a x jsou nesoudělná. Ze zadání pak vyplývá, že $x - 1$ nemůže být dělitelem čísla $y!$. Odtud plyne $y \leq x - 2$.

Pro všechna přirozená čísla $x > y$ přitom platí

$$x! + y! = y! \Big(1 + (y + 1) \cdot \ldots \cdot x\Big) = x^y \,.$$

Protože činitel v závorce získané po úpravě levé strany dané rovnice (v předešlém vztahu) je přirozené číslo nesoudělné s x a současně výraz na pravé straně rovnice je dělitelný x, musí být $x^y = 1$, což však není možné, poněvadž podle předpokladu je $x^y \geq 3$.

Závěr. Daná rovnice má právě dvě řešení v oboru přirozených čísel, a to $(2, 2)$ a $(2, 3)$.