# 1. MEMO – Řešení soutěžních úloh (soutěž družstev)

**1.** Vzhledem k podmínce $abcd = 1$, platí

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right) =$$

$$= \frac{(ab+1)(bc+1)(cd+1)(da+1)}{abcd} =$$

$$= (2+ab+cd)(2+bc+da) =$$

$$= 4 + 2(ab+bc+cd+da) + (a^2bd + b^2ca + c^2bd + d^2ac) =$$

$$= 4 + 2\,\frac{(a+c)(b+d)}{\sqrt{abcd}} + \frac{a^2bd + b^2ca + c^2bd + d^2ac}{abcd} =$$

$$= 4 + 2\left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{d}} + \sqrt{\frac{d}{b}}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{d} + \frac{d}{b}\right).$$

Uvažujme nyní funkci $f(x) = x + \frac{1}{x}$, která je rostoucí na intervalu $\langle 1; \infty)$. Vzhledem k tomu, že $a, b, c, d \in \langle \frac{1}{2}; 2\rangle$, a tvaru posledního součtu stačí vyšetřovat funkci $f(x)$ na intervalu $\langle 1; 4\rangle$. Odtud vidíme, že výraz

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)$$

nabývá své největší hodnoty např. pro $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = 4$. Volbou $a = b = 2$ a $c = d = \frac{1}{2}$ je splněna jak předešlá podmínka, tak i podmínka ze zadání úloh $abcd = 1$.

Největší možná hodnota daného výrazu je tedy $4 + 2(2+\frac{1}{2})^2 + 2(4+\frac{1}{4}) = 25$. Maximální hodnoty lze přitom dosáhnout pro následující čtveřice $(a, b, c, d)$ reálných čísel: $(2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$, $(\frac{1}{2}, 2, 2, \frac{1}{2})$ a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2)$.

*Poznámka.* Nejmenší možná hodnota uvažovaného výrazu je přitom $4 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 16$. Tato hodnota je dosažena pro $a = c$ a $b = d$, kde $ab = 1$, tj. pro každou čtveřici $(a, b, c, d) = (t, \frac{1}{t}, t, \frac{1}{t})$, kde $t \in \langle \frac{1}{2}; 2\rangle$.

**2.** Libovolných pět bodů (v obecné poloze) tvoří v rovině vrcholy deseti trojúhelníků. Ukážeme, že aspoň tři z nich nejsou ostroúhlé trojúhelníky.

Uvažujme nejprve libovolné čtyři ze zvolených pěti bodů v rovině. Mezi všemi trojúhelníky, které tvoří uvažovaná čtveřice bodů, je vždy aspoň jeden, který není ostroúhlý. Pokud uvažované čtyři body jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku, má aspoň jeden z vnitřních úhlů takového čtyřúhelníku velikost aspoň $90°$.

Potom trojúhelník tvořený stranami přilehlými tomuto úhlu a příslušnou úhlopříčkou očividně není ostroúhlý. V opačném případě, kdy jeden z uvažovaných čtyř bodů leží uvnitř trojúhelníku s vrcholy ve zbývajících třech bodech, je situace analogická. Pak aspoň jeden ze tří úhlů, jehož společným vrcholem je vnitřní bod tohoto trojúhelníku, a na jejichž ramenech leží vždy dva ze tří vrcholů uvažovaného trojúhelníku, má velikost aspoň $120°$. Jemu pak odpovídá tupoúhlý trojúhelník vytvořený třemi z těchto čtyř bodů.

Protože z libovolné čtyřice bodů v rovině lze vždy najít aspoň tři takové, které tvoří vrcholy trojúhelníku, který není ostroúhlý, platí totéž i pro pět navzájem různých bodů roviny. Předpokládejme nyní, že uvažovaná pětice bodů obsahuje pouze jeden trojúhelník, který není ostroúhlý. Pak existuje čtyřúhelník, jehož vrcholy tvoří čtyři z uvažovaných pěti bodů, a nejsou mezi nimi současně všechny tři vrcholy uvažovaného neostroúhlého trojúhelníku. Tento tedy čtyřúhelník obsahuje určitě druhý trojúhelník, který není ostroúhlý. Oba tyto trojúhelníky, které nejsou ostroúhlé, mají společný aspoň jeden vrchol (nikoliv však všechny tři). Uvažujme konečně čtyřúhelník, jehož vrcholy tvoří čtveřice bodů bez vrcholu, který je společný oběma neostroúhlým trojúhelníkům. Tři jeho vrcholy pak tvoří vrcholy dalšího (třetího) trojúhelníku, který není ostroúhlý.

Dále ukážeme, že v rovině existuje pětice bodů, které tvoří vrcholy deseti trojúhelníků, z nichž sedm je ostroúhlých. K tomu stačí v kartézské souřadnicové soustavě uvažovat např. body $A[0;1]$, $B[3;0]$, $C[1;3]$, $D[-1;3]$ a $E[-3;0]$. Tato pětice bodů tvoří vrcholy konvexního pětiúhelníku $ABCDE$, který je osově souměrný podle osy strany $CD$. Trojúhelníky $ABE$, $BCD$ a $CDE$ jsou tupoúhlé. Nyní stačí ukázat, že všechny ostatní trojúhelníky (v počtu sedmi) jsou ostroúhlé. Trojúhelník $ACD$ je přitom evidentně ostroúhlý. Ze symetrie uvedeného pětiúhelníku vidíme, že stačí dále ukázat, že trojúhelníky $ACE$ (s nejdelší stranou $CE$), $ADE$ (s nejdelší stranou $AD$) a $BDE$ (s nedelší stranou $EB$) jsou ostroúhlé, tj. stačí ukázat, že úhly $EAC$, $DEA$ a $BDE$ jsou ostré. Využitím kosinové věty je tak potřeba dokázat platnost nerovností:

$$\begin{aligned} |EA|^2 + |AC|^2 &> |CE|^2\,, \\ |DE|^2 + |EA|^2 &> |AD|^2\,, \\ |BD|^2 + |DE|^2 &> |EB|^2\,. \end{aligned}$$

Výpočtem pak snadno zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} |EA|^2 + |AC|^2 &= (3^2+1^2)+(1^2+4^2) = 27 > 25 = 4^2+3^2 = |CE|^2\,, \\ |DE|^2 + |EA|^2 &= (2^2+3^2)+(3^2+1^2) = 23 > 17 = 1^2+4^2 = |AD|^2\,, \\ |BD|^2 + |DE|^2 &= (4^2+3^2)+(2^2+3^2) = 38 > 25 = 6^2+0^2 = |EB|^2\,, \end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že mezi uvažovanými deseti trojúhelníky může být 7 ostroúhlých trojúhelníků.

**3.** Označme čtyřstěn $T$ pro další úvahy obvyklým způsobem $ABCD$.

a) Pokud některá ze stěn uvažovaného čtyřstěnu obsahuje hranu délky 2, liší se délky obou zbývajících hran této stěny (podle trojúhelníkové nerovnosti) o 1. Protože hrana délky 2 je společná dvěma stěnám čtyřstěnu, plyne odtud, že množina délek všech šesti hran uvažovaného čtyřstěnu obsahuje dvě (navzájem různé) dvojice po sobě jdoucích přirozených čísel.

Pokud některá ze stěn uvažovaného čtyřstěnu obsahuje hranu délky 3, liší se délky obou zbývajících hran o 1 nebo o 2.

Uvažujme dále dva případy:

- Hrany o délkách 2 a 3 leží v téže stěně čtyřstěnu. Pak délka třetí hrany téže stěny je 4. Vzhledem k podmínkám úlohy mají tři zbývající hrany tohoto čtyřstěnu délky $a$, $a+1$ a $b$, kde $a$ a $b$ jsou přirozená čísla ($a \geq 5$). Číslo $b$ přitom může nabývat některé z hodnot $a-2, a-1, a+2$ nebo $a+3$. Případy, kdy $b = a-1$ anebo $b = a+2$ jsou ekvivalentní. Nechť $|AB| = 2$, $|AC| = 3$ a $|BC| = 4$. Pro délky zbývajících tří hran budeme proto uvažovat tři dílčí případy: A) $a, a+1, a+2$, B) $a-2, a, a+1$, C) $a, a+1, a+3$, kde $a \geq 5$ je přirozené číslo.

ad A) Zde dále rozlišíme (s ohledem na případné shodnosti čtyřstěnů) čtyři možnosti:

1) $|AD| = a, |BD| = a+1, |CD| = a+2$.
2) $|AD| = a+1, |BD| = a, |CD| = a+2$.
3) $|AD| = a+1, |BD| = a+2, |CD| = a$.
4) $|AD| = a+2, |BD| = a+1, |CD| = a$.

V každém z těchto čtyř případů je $s(T) = 3a+12 = 3k \geq 27$, kde $k \geq 9$ je přirozené číslo.

ad B) V tomto případě stačí (s ohledem na shodnosti uvažovaných čtyřstěnů) uvažovat jedinou možnost (jediný typ čtyřstěnu $T$), a to $|AD| = a$, $|BD| = a+1$ a $CD| = a-2$. Zde $s(T) = 3a+8 = 3k+2 \geq 29$, neboť $a-2 \geq 5$, tj. $a \geq 7$, kde $k \geq 9$ je přirozené číslo.

ad C) Zde stačí opět uvažovat jediný případ, a to $|AD| = a+1$, $|BD| = a$ a $|CD| = a+3$. V tomto případě je $s(T) = 3a+13 = 3k+1 \geq 28$, kde $k \geq 9$ je přirozené číslo.

- Hrany o délkách 2 a 3 neleží v téže stěně čtyřstěnu, tj. leží na mimoběžných hranách. Vzhledem k podmínce o velikostech hran ve dvou stěnách se společnou hranou délky 2, musí být délky hran v jedné z těchto stěn $a$ a $a+1$ a ve druhé pak $b$ a $b+1$, kde $a$ a $b$ jsou vhodná přirozené čísla obě větší než 3. Vzhledem k podmínce o společné hraně délky 3, můžeme ještě (bez újmy na obecnosti) předpokládat, že $b = a+2$

(nemůže být $b = a + 1$, protože ve čtyřstěnu by existovaly dvě hrany téže délky). Zbývající hrany uvažovaného čtyřstěnu mají tedy délky $a, a+1, a+2, a+3$. Nechť $|AB| = 2, |AC| = a$ a $|BC| = a+1$, potom $|CD| = 3, |AD| = a+2$ a $|BD| = a+3$. Existuje tedy jediný typ takového čtyřstěnu $T$, pro který platí $s(T) = 4a + 11 = 4k + 3$, kde $a \geq 4$ a $k$ jsou přirozená čísla ($k \geq 6$). je tedy i zde $s(T) \geq 27$.

ZÁVĚR. Dané úloze vyhovují všechna přirozená čísla $n \geq 27$.

b) Protože číslo 2 007 je jak tvaru $3k$, tak $4m + 3$, existuje celkem $4 + 1 = 5$ čtyřstěnů $T$ s vlastností $s(T) = 2\,007$.

(Čtyři z nich odpovídají možnostem A1) – A4) z části a) úlohy, kdy $2\,007 = 3 \cdot 669$. Patý čtyřstěn odpovídá případu, kdy $2\,007 = 4 \cdot 501 + 3$, tj. situaci kdy hrany délek 2 a 3 neleží v téže stěně čtyřstěnu $T$.)

**4.** Předně si uvědomme, že $2\,007 = 9 \cdot 223$, kde 223 je prvočíslo. Nejprve upravíme daný výraz

$$(a + k)^3 - a^3 = k(3a^2 + 3ka + k^2)\,.$$

Uvažovaný rozdíl je tedy kongruentní s $k^3$ modulo 3. Aby daný rozdíl byl dělitelný číslem 2 007 musí být tedy přirozené číslo $k$ nutně dělitelné třemi. Pro všechna přirozená $k$ čísla tvaru $k = 3m$, kde $m$ je přirozené číslo, je uvažovaný rozdíl dělitelný číslem 9.

Nyní ukážeme, že pro každé $k = 3m$ existuje celé číslo $a$ takové, že uvažovaný rozdíl je dělitelný číslem 223. Stačí přitom uvažovat výraz

$$a^2 + 3ma + 3m^2 = \left(a + \frac{3m}{2}\right)^2 + \frac{3m^2}{4}\,.$$

Vzhledem k tomu, že čísla 3 a 223 jsou nesoudělná a současně platí $223 = 196 + 27 = 14^2 + 3 \cdot 3^2$, existuje zbytková třída $b$ modulo 223, taková, že pro její prvky platí $b^2 \equiv -3 \pmod{223}$. Vzhledem k tomu, že i čísla 2 a 223 jsou nesoudělná, zjistíme analogicky, že pro každé $m$ přirozené (a tudíž i pro všechna $k = 3m$) existuje aspoň jedno celé číslo $a$ takové, že $a^2 + 3ma + 3m^2 \equiv 0 \pmod{223}$.

Vzhledem k tomu, že čísla 9 a 223 jsou nesoudělná, plyne z čínské věty o zbytcích, že pro každé přirozené číslo $k = 3m$ existuje aspoň jedno celé číslo $a$, pro něž je $(a + k)^3 - a^3$ dělitelné číslem 2 007.