



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rozšíření akreditace učitelství matematiky a učitelství deskriptivní geometrie
na PŘF UP v Olomouci o formu kombinovanou

CZ.1.07/2.2.00/18.0013

Stereometrie

Marie Chodorová

Obsah

Úvod	3
1 Stereometrie - polohové vlastnosti	6
1.1 Základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami	6
1.2 Axiómy	8
1.3 Základní věty stereometrie	9
1.4 Vzájemná poloha dvou přímek	10
1.5 Vzájemná poloha přímky a roviny	12
1.6 Vzájemná poloha dvou rovin	14
1.7 Rovnoběžnost přímek a rovin	17
1.8 Vzájemná poloha tří rovin	20
1.9 Řešení polohových konstrukčních úloh	22
1.10 Metrické vlastnosti	26
1.11 Kolmost přímek a rovin	27
1.12 Odchylka přímek a rovin	31
1.13 Vzdálenost bodu od přímky a od roviny	32
1.14 Vzdálenost přímek a rovin	34
2 Volné rovnoběžné promítání	36
2.1 Řezy na tělesech	36
2.2 Průnik přímky s tělesem	39
2.3 Osová afinita	39
2.4 Další příklady	40

Úvod

Seznam ikon užívaných v textu

Dále jsou uvedeny ikony označující prvky podporující studenta při studiu, tj. odkazy, otázky, úkoly, korespondenční úkoly apod. s vysvětlivkami:



Cíle

Na začátku každé kapitoly naleznete konkrétně formulované cíle. Jejich prostřednictvím získáte přehled o tom, co budete po nastudování příslušného tématického celku umět, znát, co budete schopni dělat.



Motivace

Odstavec, v němž by mělo být vysvětleno, proč se danou problematikou vůbec hodláme zabývat. Motivujte studenty k tomu, aby studovali právě tuto pasáž.



Průvodce studiem

Pasáž, v níž „zbavíme studenta strachu z nového učiva“, poukážeme na propojenost učiva s předchozí kapitolou, uvedeme, co již student zná z předmětu v předchozím ročníku, ze SŠ, s čím se setkal v praxi. . .



Otázka k zamyšlení

Měla by vás podněcovat k přemýšlení, k úvahám, k hledání vlastního řešení. Je to prostor, který vám nabízím k vyjádření osobního názoru, postoje k studované problematice. Odpovědi na tyto otázky si formulujete sami, bývají předmětem diskusí na prezenčních setkáních, jsou součástí zkoušky (často je pokládají examinátoři).



Pasáž pro zájemce

Tato část textu je určena těm z vás, kteří máte zájem o hlubší studium problematiky, nebo se chcete dozvědět i nějaké zajímavé podrobnosti vztahující se k tématu. Vše, co najdete v této pasáži, je nepovinné, tudíž zcela dobrovolné. Zmíněné informace po vás nebudou vyžadovány u zkoušky.



Úkol

Jeho prostřednictvím vás vybídnu k tomu, abyste na základě studia určité tematiky něco vytvořili, zpracovali, konkrétně uvedli za předpokladu, že už máte jisté znalosti. Má převážně aplikační charakter. Správné (možné) řešení najdete k některým úkolům (dle obsahu, zaměření) v klíči.



Doporučení

Dobrá rada, doporučení, něco, co studentům „usnadní“ práci, dovede je rychleji k cíli, pomůže vyhnout se chybám apod.



Upozornění

Slouží pro upozornění na nějakou chybu, které se studenti často (a úplně zbytečně) zejména pro nepozornost dopouštějí.



Odkazy na on-line zdroje

Slouží jako místo pro odkazy na další zdroje, které lze nalézt na internetu.



Shrnutí kapitoly

Tato pasáž postihuje ve stručné podobě to nejdůležitější, o čem konkrétní kapitola pojednává. Má význam pro opakování, aby se vám informace a klíčové body probírané látky lépe vybavily. Pokud zjistíte, že některému úseku nerozumíte, nebo jste jej dostatečně neprostudovali, vraťte se k příslušné pasáži v textu.



Pojmy k zapamatování

Na konci každé kapitoly najdete klíčové pojmy, které byste měli být schopni vysvětlit. Jde o důležitý terminologický aparát a jména, jež je nezbytné znát. Po prvním prostudování kapitoly si je zkuste sami pro sebe objasnit, vracejte se k nim i při dalším čtení a opakování dokud si je dostatečně nezafixujete v paměti.



Kontrolní otázky

Prověřují, do jaké míry jste učivo pochopili, zapamatovali si podstatné informace a zda je umíte aplikovat. Najdete je na konci každé kapitoly. Jejich prostřednictvím zjistíte, jestli jste splnili formulované cíle. Jsou velmi důležité, věnujte jim proto náležitou pozornost. Odpovědi na ně můžete najít ve více či méně skryté formě přímo v textu.



Úlohy k procvičení

Tyto pasáže mají za úkol učivo procvičit, zopakovat, upevnit. Pomáhají vám fixovat poznatky.



Klíč

Obsahuje patřičné odpovědi a možná řešení k úkolům. Můžete si zkontrolovat správnost své odpovědi na konkrétní (ale ne na každý) úkol.



Literatura

V této části najdete přehled všech zdrojů a literatury, ze které jsem čerpala při zpracovávání textu. Tento seznam slouží také jako zdroj informací pro zájemce o další podrobnější studium a doplnění poznatků.

1 Stereometrie - polohové vlastnosti

Nejprve uvedeme základní vztahy mezi jednotlivými objekty v geometrii. Dále budeme formulovat několik jednoduchých vět, tzv. axiomů, o které se opírají všechny další stereometrické věty, které rozdělíme do tří skupin. První skupinou budou základní věty stereometrie, v nich se mluví o vzájemné poloze bodů, přímek a rovin. Do další skupiny zahrneme věty o rovnoběžnosti a na jejich základě se budeme zabývat polohovými vlastnostmi daných geometrických objektů. Třetí skupinu tvoří věty o vzájemné kolmosti přímek a rovin, do nichž připojíme také věty o vzdálenosti, souhrnně tuto skupinu nazýváme metrické vlastnosti.

1.1 Základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami

Základní prvky ve stereometrii jsou *bod*, *přímka* a *rovina*. Uvažujeme-li dvojici bod-přímka (bod-rovina), pak bod leží na přímce (v rovině), resp. neleží. Říkáme také, že přímka (rovina) prochází, resp. neprochází bodem. Obdobně uvažujeme-li dvojici přímka-rovina, pak přímka leží, resp. neleží v rovině, tedy rovina prochází bodem, resp. neprochází.

Pro vyjádření těchto vztahů používáme společný termín tzv. *incidence* (bod je incidentní s přímkou, přímka není incidentní s rovinou. . .)

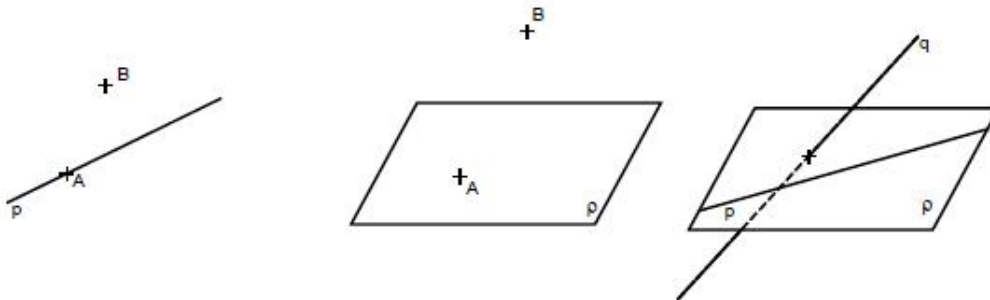
Pro symbolický zápis používáme následující značky:

$\in$ je prvkem

$\notin$ není prvkem

$\subset$ je podmnožinou

Body značíme velkými tiskacími písmeny ($A, B, P, Q, \dots$), přímky malými písmeny ($a, b, p, q, \dots$) a roviny malými řeckými písmeny ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$).



Říkáme, že přímka je určena dvěma body, zapisujeme $p = \overleftrightarrow{AB}$ a nazýváme přímka AB . Rovina je určena danými body či přímkami, zapisujeme $\rho = \overleftrightarrow{ABC}$ (daná třemi body), resp. $\rho = \overleftrightarrow{Ap}$ (daná přímkou a bodem), resp. $\rho = \overleftrightarrow{pq}$ (daná dvěma přímkami) a nazýváme rovina ABC , resp. rovina Ap , resp. rovina pq .

Pozn.: Rovnoběžností a různoběžností přímek se budeme více zabývat později.

Věta 1.1.1 *Libovolná rovina rozděluje prostor na dva navzájem opačné poloprostory a je jejich společnou hraniční rovinou.*

Hraniční rovina patří do obou poloprostorů. Každý bod prostoru, který neleží v hraniční rovině, je vnitřním bodem jednoho z poloprostorů. Poloprostor s hraniční rovinou ρ a vnitřním bodem M značíme $\rightarrow \rho M$.

Obdobně jako v planimetrii, i ve stereometrii zavedeme pojem konvexního útvaru.

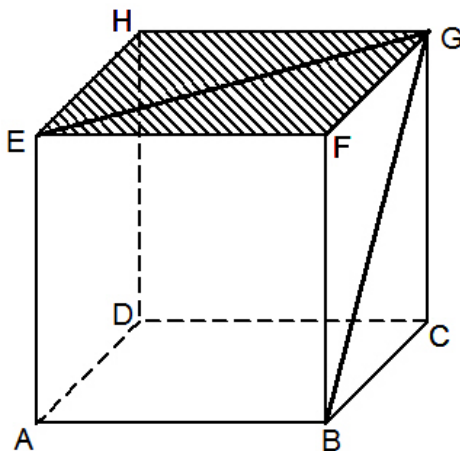
Věta 1.1.2 *Geometrický útvar se nazývá konvexní, jestliže úsečka spojující libovolné dva body tohoto útvaru je celá jeho částí.*



Příklad 1.1.1

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete čtyřmi různými způsoby rovinu horní stěny krychle. Určete, zda v této rovině leží přímky FG , EG , BG .

Řešení:



Rovinu horní podstavky můžeme určit:

- třemi body, např. E, F, G ; F, G, H ; G, H, E ; E, F, H atd.
- přímkou a bodem, např. $\overleftrightarrow{FG}, H$; $\overleftrightarrow{FG}, E$ atd.
- dvěma rovnoběžnými přímkami, např. $\overleftrightarrow{FG}, \overleftrightarrow{EH}$; $\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{GH}$ atd.
- dvěma různoběžkami.

Přímky FG i EG leží v horní podstavě roviny, tudíž leží v dané rovině. Bod B neleží v horní podstavě, proto ani přímka BG neleží v zadané rovině.



Příklad 1.1.2

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Kolik různých přímek určují vrcholy B, E, F, G ? Leží tyto body v jedné rovině?



Příklad 1.1.3

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete, zda v rovině BHE leží

- a) body G, C, F, Q (střed strany BC).
- b) přímky CE, AB, BC, DH



Příklad 1.1.4

Jaké útvary mohou mít společné poloprostor a

- a) přímka
- b) polopřímka
- c) rovina
- d) polorovina?

1.2 Axiómy

Axiómy jsou tvrzení, která předkládáme bez důkazu a z nich logickou cestou odvozujeme tzv. věty.

1. Axióm: Dvěma různými body A, B prochází právě jedna přímka p .
2. Axióm: Přímkou p a bodem A , který na přímce p neleží, prochází právě jedna rovina ρ .
3. Axióm: Jestliže bod A leží na přímce p a přímka p leží v rovině ρ pak i bod A leží v rovině ρ .
4. Axióm: Mají-li dvě různé roviny ρ a σ společný bod A , pak mají společnou právě jednu přímku.
5. Axióm: Ke každé přímce p lze bodem A , který na ní neleží, vést právě jednu rovnoběžku s přímkou p .

1.3 Základní věty stereometrie

Věta 1.3.1 *Mají-li dvě přímky společné dva různé body, pak jsou totožné.*

Věta 1.3.2 *Mají-li dvě roviny společnou přímku a bod, který na této přímce neleží, pak jsou totožné.*

Věta 1.3.3 *Mají-li přímka a rovina společné dva různé body, pak přímka leží v rovině.*

Věta 1.3.4 *Jestliže v rovině ρ leží dva různé body A, B , pak také přímka p , která těmito body prochází, leží v rovině ρ .*

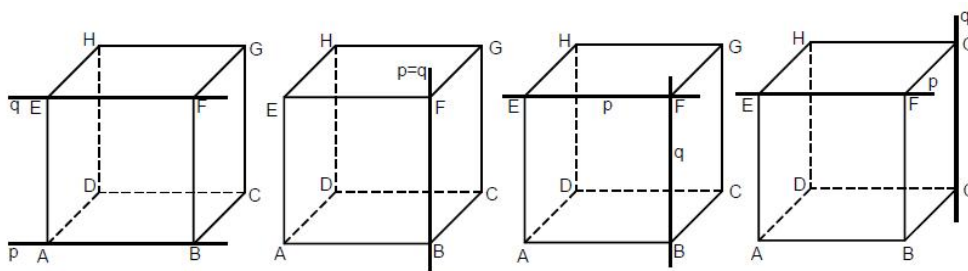
1.4 Vzájemná poloha dvou přímek

Stejně jako v planimetrii mohou být dvě přímky v prostoru buď

- rovnoběžné (různé) – tyto nemají žádný společný bod a leží v jedné rovině, značíme $p \parallel q$
- totožné – mají všechny body společné, značíme $p = q$
- různoběžné – mají jeden společný bod (průsečík) a leží v jedné rovině, značíme $P \in p \cap q$ nebo $P \in p \cap q$ nebo $P = p \cap q$.

V prostoru ale může nastat ještě čtvrtý případ. Říkáme, že přímky jsou

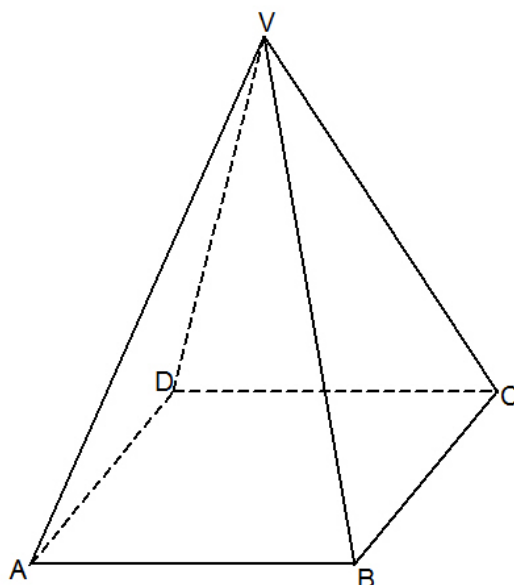
- mimoběžné – nemají žádný společný bod a neleží v jedné rovině.



Příklad 1.4.1

Na pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ určete vždy alespoň dvě dvojice přímek rovnoběžných, různoběžných, mimoběžných.

Řešení:



- rovnoběžné přímky: AB, CD ; BC, AD

- různoběžné přímky: AB, BC ; AB, BV ; $BD, AC \dots$
- mimoběžné přímky: BD, CV ; AB, DV ; $AC, DV \dots$



Příklad 1.4.2

Na krychli vypište vždy alespoň tři dvojice přímek rovnoběžných, různoběžných a mimoběžných. Určete alespoň dvě trojice přímek rovnoběžných, různoběžných a mimoběžných.



Příklad 1.4.3

Zobrazte pravidelný osmistěn a určete na něm dvojice přímek rovnoběžných, různoběžných a mimoběžných.



Příklad 1.4.4

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Body K, L, M , jsou po řadě středy hran BF, AB, BC . Určete vzájemnou polohu přímek

- KL, AM
- AD, LM
- KM, AD .



Příklad 1.4.5

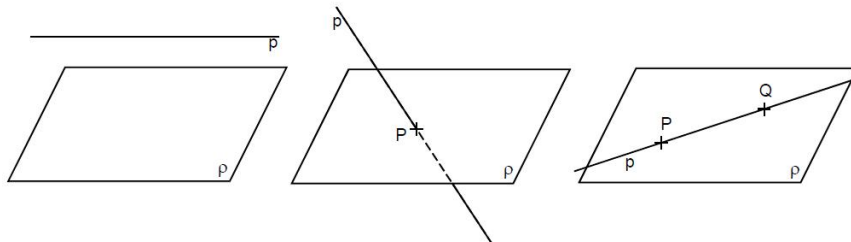
Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vypište všechny přímky, které procházejí vrcholem G a některým dalším vrcholem krychle a jsou s přímkou AB

- rovnoběžné
- různoběžné
- mimoběžné.

1.5 Vzájemná poloha přímky a roviny

Je-li v prostoru dána přímka a rovina, mohou nastat tři případy:

- přímka nemá s rovinou společný žádný bod, říkáme, že přímka je s rovinou rovnoběžná různá, značíme $p \parallel \rho$
- přímka a rovina mají právě jeden společný bod, jsou tedy různoběžné, značíme $p \cap \rho = P$ nebo $P \in p \cap \rho$
- přímka má s rovinou společné 2 body, tudíž všechny, přímka a rovina jsou rovnoběžné, přičemž přímka leží v rovině (je její částí), značíme $p \subset \rho$.

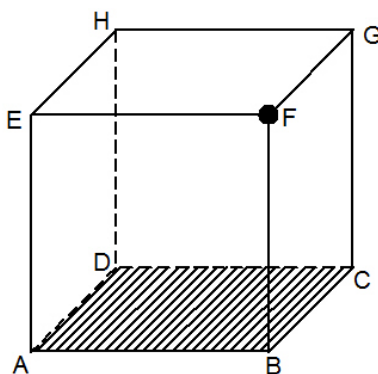


Příklad 1.5.1

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny přímky, které procházejí vrcholem F a některým dalším vrcholem krychle a jsou s rovinou ABC

- rovnoběžné
- různoběžné.

Řešení:



a) bod F leží mimo rovinu ABC (dolní podstava). Budeme tedy hledat přímky, které s dolní podstavou nemají žádný společný bod. Tyto přímky jsou: FE, FG, FH

b) bod F leží mimo rovinu ABC , tedy bod ležící v této rovině určí s bodem F přímku různoběžnou s danou rovinou. Tyto přímky jsou: FA, FB, FC, FD .



Příklad 1.5.2

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny roviny, které procházejí bodem G a dalšími dvěma vrcholy krychle a jsou s přímkou AD

- a) rovnoběžné
- b) různoběžné.



Příklad 1.5.3

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte přímku rovnoběžnou s rovinami BCG a EFH , procházející bodem A a dalším vrcholem krychle.



Příklad 1.5.4

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte přímku procházející bodem B a dalším vrcholem krychle, která je různoběžná s přímkou FG a rovnoběžná s rovinou ADH .



Příklad 1.5.5

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Body P, Q, R, S jsou po řadě středy stran $ABCD, BCFG, EFGH, ADHE$. Jaká je vzájemná poloha

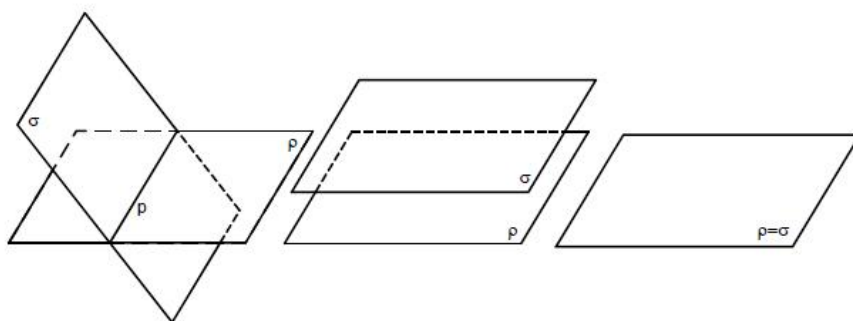
- a) přímky QR a roviny BCE
- b) přímky QS a roviny ABG
- c) přímky PS a roviny EFG ?

1.6 Vzájemná poloha dvou rovin

Pro dvě roviny v prostoru může nastat právě jedna ze tří možností:

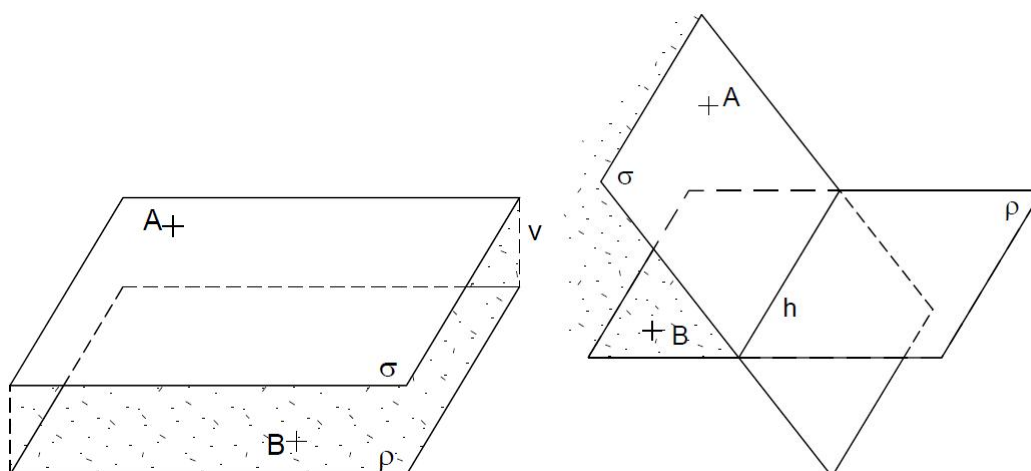
- roviny jsou různoběžné, právě když mají společnou přímku, zapisujeme $\rho \cap \sigma = p$, přímka p se nazývá průsečnice rovin
- roviny jsou rovnoběžné různé, právě když nemají žádný společný bod, píšeme $\rho \parallel \sigma$
- roviny jsou rovnoběžné totožné, mají-li všechny body společné, píšeme $\rho = \sigma$.

Věta 1.6.1 *Mají-li dvě roviny společný bod, pak mají společnou přímku, která tímto bodem prochází. Kromě této přímky nemají žádný další společný bod.*



Jsou-li roviny ρ a σ dvě rovnoběžné roviny, bod A je bod roviny σ , bod B je bod roviny ρ , pak průnik poloprostorů ρA a σB se nazývá vrstva. Roviny ρ a σ jsou hraniční roviny, jejich vzdálenost v je tloušťka (šířka) vrstvy.

Jsou-li roviny ρ a σ dvě různoběžné roviny, bod A je bod roviny σ , bod B je bod roviny ρ , jejich průsečnice je přímka h , pak průnik poloprostorů ρA a σB se nazývá klín. Přímka h je hrana klínu, poloroviny hA , hB jsou stěny klínu.





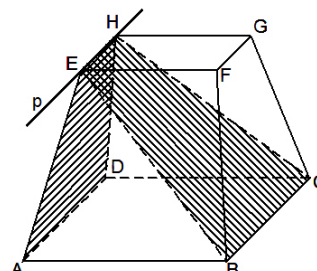
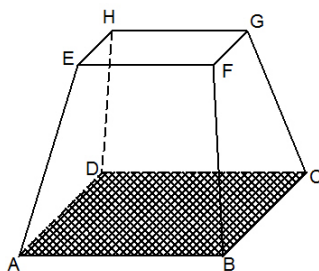
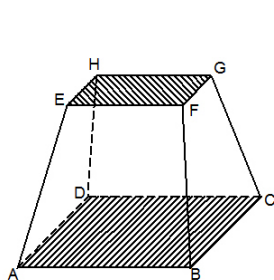
Příklad 1.6.1

Je dán komolý jehlan $ABCDEFGH$. Rozhodněte o vzájemné poloze rovin a) ABC, EFH

b) ABC, BCD

c) ADH, BCE

Řešení:



a) roviny nemají žádný společný bod, jsou tedy rovnoběžné různé

b) roviny mají společné všechny body, jsou tedy rovnoběžné totožné

c) roviny mají společné body E, H , tedy mají společnou celou přímku p a jsou různoběžné



Příklad 1.6.2

V krychli $ABCDEFGH$ určete průsečnici rovin

a) AEG a HDB

b) ACG a AFH

c) ACF a BGE

d) BCH a AEO (O je střed stěny $BCGF$).



Příklad 1.6.3

Jaká je vzájemná poloha dvou rovin, jestliže mají společné

a) dva různé body

b) tři různé body neležící v přímce

c) přímku a bod

d) dvě rovnoběžky?



Příklad 1.6.4

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny roviny, které procházejí bodem E a dalšími dvěma vrcholy krychle a jsou s rovinou BCG

- a) rovnoběžné
- b) různoběžné.



Příklad 1.6.5

Jsou dány roviny ρ a σ , které jsou

- a) rovnoběžné
- b) různoběžné.

V rovině ρ leží přímka r , v rovině σ leží přímka s . Jakou vzájemnou polohu mohou mít přímky r a s ?



Příklad 1.6.6

Ve čtyřstěnu $ABCD$ sestrojte průsečnici rovin AKD a CLD , kde K je střed hrany BC a L je střed hrany AB .

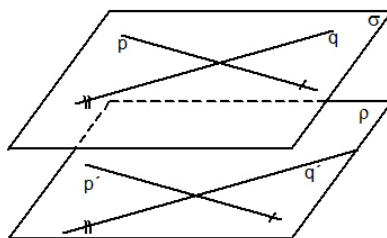
1.7 Rovnoběžnost přímek a rovin

Věta 1.7.1 *Přímka je rovnoběžná s rovinou tehdy a jen tehdy, je-li rovnoběžná alespoň s jednou její přímkou.*

Věta 1.7.2 *Přímka je rovnoběžná se dvěma různoběžnými rovinami tehdy a jen tehdy, jestliže je rovnoběžná s jejich průsečnicí.*

Věta 1.7.3 *Jsou-li dány dvě rovnoběžné roviny, pak každá přímka jedné roviny je rovnoběžná s druhou rovinou.*

Věta 1.7.4 *Dvě roviny jsou rovnoběžné tehdy a jen tehdy, jestliže jedna z nich obsahuje dvě různoběžky rovnoběžné s druhou rovinou.*



Pro rovnoběžnost více přímek a rovin platí důležitá skupina čtyř vět o tranzitivnosti:

Věta 1.7.5 *Je-li přímka a rovnoběžná s přímkou b a přímka b rovnoběžná s přímkou c , pak přímka a je rovnoběžná s přímkou c .*

Věta 1.7.6 *Je-li přímka a rovnoběžná s přímkou b a přímka b rovnoběžná s rovinou γ , pak přímka a je rovnoběžná s rovinou γ .*

Věta 1.7.7 *Je-li přímka a rovnoběžná s rovinou β a rovina β rovnoběžná s rovinou γ , pak přímka a je rovnoběžná s rovinou γ .*

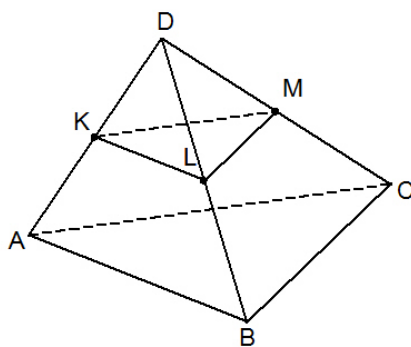
Věta 1.7.8 *Je-li rovina α rovnoběžná s rovinou β a rovina β rovnoběžná s rovinou γ , pak rovina α je rovnoběžná s rovinou γ .*



Příklad 1.7.1

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Body K, L, M jsou po řadě středy hran AD, BD, CD . Dokažte, že rovina KLM je rovnoběžná s rovinou ABC .

Řešení:



Přímka KL je střední příčkou v trojúhelníku ABD . Platí tedy, že $AB \parallel KL$ a tedy $KL \parallel ABC$. Obdobně platí, že $LM \parallel BC$ (tedy $LM \parallel ABC$) a také $KM \parallel AC$ (tedy $KM \parallel ABC$).

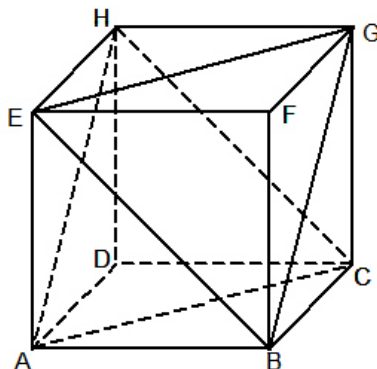
Našli jsme tedy v rovině KLM dvě (dokonce tři) různoběžné přímky rovnoběžné s rovinou ABC a tedy roviny KLM a ABC jsou rovnoběžné.



Příklad 1.7.2

V krychli $ABCDEFGH$ veďte bodem H rovinu rovnoběžnou s rovinou BEG .

Řešení:



Z obrázku vidíme, že daným řešením je rovina ACH . Přímka AH je rovnoběžná s přímkou BG a proto také $AH \parallel BEG$. Přímka AC je rovnoběžná s přímkou EG a proto také $AC \parallel BEG$. Přímka CH je rovnoběžná s přímkou BE a proto také $CH \parallel BEG$. Opět jsme našli tři různoběžné přímky, všechny rovnoběžné s rovinou BEG .



Příklad 1.7.3

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Bod M je středem hrany AV . Dokažte, že přímka CV je rovnoběžná s rovinou BDV .



Příklad 1.7.4

Jsou dány dvě mimoběžky p a q . Rozhodněte, zda existuje rovina rovnoběžná s přímkou q obsahující přímku p . Ověřte na krychli.



Příklad 1.7.5

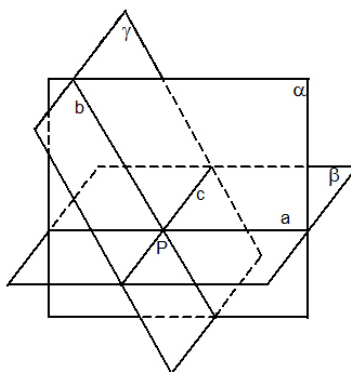
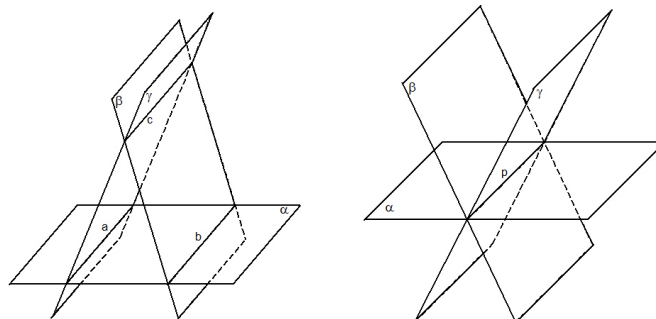
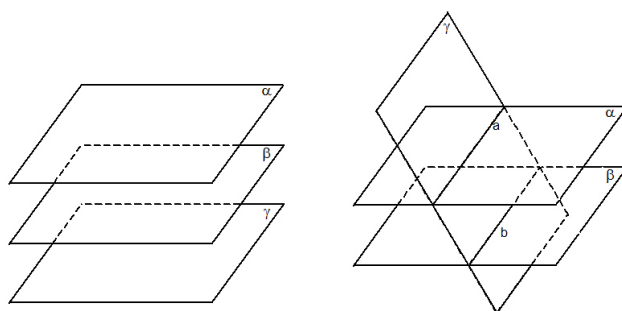
Je dána krychle $ABCDEFGH$ a bod M jako střed hrany BF . Ved'te bodem B rovinu rovnoběžnou s rovinou

- a) ADH
- b) ABC
- c) ACH
- d) BDG .

1.8 Vzájemná poloha tří rovin

Pro tři různé roviny v prostoru nastane právě jedna z pěti možností:

- Každé dvě roviny jsou rovnoběžné
- Dvě roviny jsou rovnoběžné, třetí s nimi různoběžná, protínající je ve dvou rovnoběžných přímkách.
- Každé dvě roviny jsou různoběžné, přičemž průsečnice každých dvou rovin jsou rovnoběžné různé.
- Každé dvě roviny jsou různoběžné, všechny tři průsečnice splynou v jednu přímku
- Každé dvě roviny jsou různoběžné, kdy všechny tři průsečnice procházejí jedním bodem (jediný společný bod všech tří rovin).





Příklad 1.8.1

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Body K, L, M jsou po řadě středy hran AD, BD, CD . Zjistěte vzájemnou polohu tří rovin

- a) ABD, KLM, BCD
- b) ABC, BKM, ACD
- c) ABC, ABD, ABM
- d) ABC, KLM, BCD

1.9 Řešení polohových konstrukčních úloh

Při řešení polohových úloh nás zajímá pouze vzájemná poloha bodů, přímek a rovin, ne metrické vztahy jako jsou velikosti úseček či úhlů. Úlohy budeme řešit ve volném rovnoběžném promítání. Dané prvky určíme obvykle na jednoduchých tělesech, nejčastěji na hranolech a jehlanech.

Stačí nám tedy znát pouze tvar tělesa, nikoli jeho rozměry. Mezi jednoduché příklady, s kterými jsme se již setkali, patří:

- sestrojení průsečnice dvou rovin
- sestrojení roviny rovnoběžné s danou rovinou procházející daným bodem
- sestrojení přímky, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s dvěma danými různoběžnými rovinami

Dalším příkladem je sestrojení průsečíku přímky s rovinou. Je-li přímka p různoběžná s rovinou ρ , pak jejich průsečík získáme následovně:

1. Přímku p proložíme vhodnou rovinou σ , která je s rovinou ρ různoběžná.
2. Určíme průsečnici r rovin ρ a σ .
3. Průsečík P přímek p a r je hledaný průsečík přímky p s rovinou ρ .

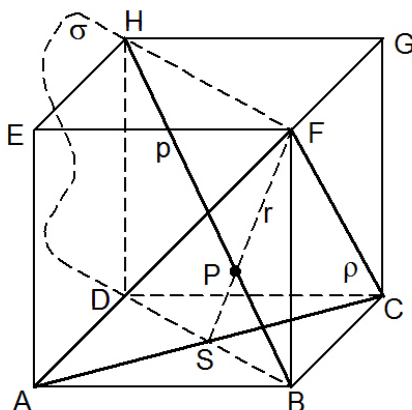
Příčka dvou mimoběžek je přímka, která obě přímky protíná. Někdy příčkou rozumíme pouze úsečku, jejíž krajní body jsou na daných mimoběžkách. Jelikož existuje nekonečně mnoho příček dvou daných mimoběžek, je třeba připojit další podmínky.



Příklad 1.9.1

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečík přímky BH s rovinou ACF .

Řešení:



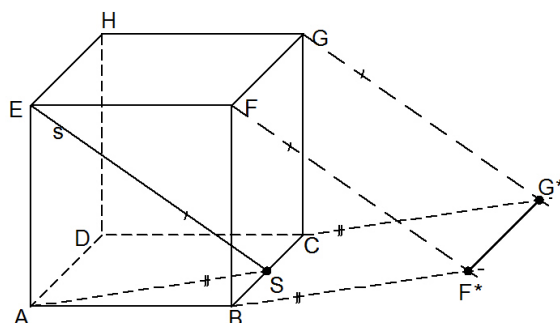
Jako rovinu σ zvolíme rovinu BDH . Průsečnice r rovin AC a $BDFH$ je přímka FS , kde S je průsečík přímek AC a BD (střed dolní podstavy). Průsečík P přímky BH s rovinou ACF je průsečík přímek FS a BH .



Příklad 1.9.2

Je dána krychle $ABCDEFGH$ a bod S jako střed hrany BC . Přímka ES určuje směr slunečních paprsků (tzv. rovnoběžné světlení). Sestrojte stín úsečky FG do roviny dolní podstavy.

Řešení:



K určení stínu úsečky FG nám stačí najít stíny jejích krajních bodů.

Při hledání stínu bodu F do roviny $ABCD$ hledáme vlastně průsečík přímky procházející bodem F , rovnoběžné se směrem osvětlení (neboli s přímkou $ES = s$) a roviny $ABCD$.

Za rovinu σ zvolíme rovinu kolmou k dolní podstavě, tedy rovinu ASE . V bodě F sestrojíme rovinu s ní rovnoběžnou, k tomu nám stačí sestrojit dvě různoběžné přímky. První bude již zmiňovaná rovnoběžka s s a druhá bude přímka v rovině $ABCD$, tedy přímka procházející bodem B rovnoběžná s AS . Průnik těchto dvou přímek je bod F^* - stín bodu F do roviny $ABCD$.

Analogicky pro bod G .

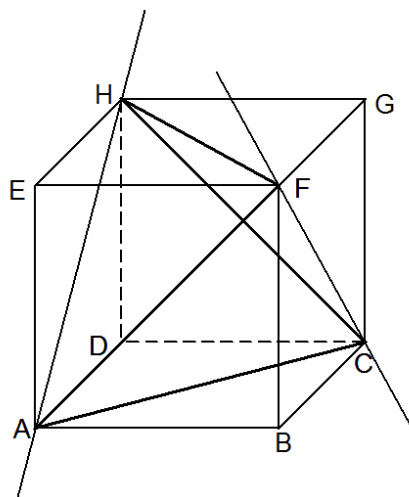
Poznámka 1.9.1 Kromě rovnoběžného osvětlení existuje ještě středové osvětlení, kde zdrojem světla je jeden bod S . Potom nesestrojujeme přímky rovnoběžné, ale při hledání stínu bodu X hledáme průsečík přímky SX s danou rovinou.



Příklad 1.9.3

V krychli $ABCDEFGH$ sestrojte příčku mimoběžek FC , AH , která prochází dvěma vrcholy krychle.

Řešení:



Existují právě čtyři příčky zadaných mimoběžek určené vrcholy krychle, a to FA, FH, CA, CH .



Příklad 1.9.4

Sestrojte stín, který vrhne krychle $ABCDEFGH$ do roviny své spodní podstavy při rovnoběžném osvětlení. Směr osvětlení udává přímka ES , kde S je střed hrany BC .

Příklad 1.9.5 Sestrojte stín, který vrhne krychle $ABCDEFGH$ do roviny své spodní podstavy při středovém osvětlení. Zdroj světla je bod S ležící na polopřímce AE , přičemž platí $|ES| = |AE|$.



Příklad 1.9.6

V krychli $ABCDEFGH$ sestrojte příčku mimoběžek EF, AC tak, aby

- procházela dvěma vrcholy krychle
- ležela v rovině BDF .



Příklad 1.9.7

V pravidelném šestibokém jehlanu $ABCDEFV$ určete průnik přímky BM s rovinou ACV . Bod M je střed hrany EV .

Příklad 1.9.8 Ve čtyřstěnu $ABCD$ je bod M středem hrany CD , bod P středem hrany BD a bod N je vnitřním bodem stěny ABC . Sestrojte průsečík přímky DN s rovinou

- ABM ,
- α , která je rovnoběžná s rovinou ABC a prochází bodem P .



Příklad 1.9.9

Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEF A' B' C' D' E' F'$. Sestrojte příčku mimoběžek BC a $A' F'$ tak, aby byla rovnoběžná s přímkou

- a) AA' ,
- b) DE ,
- c) BE' ,
- d) $B'C$.

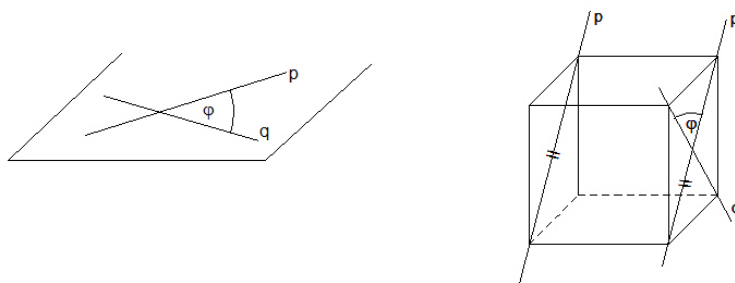
1.10 Metrické vlastnosti

Věta 1.10.1 *Odchylka dvou různoběžných přímek je velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, které spolu tyto přímky svírají. (obr. 1)*

Věta 1.10.2 *Odchylka dvou rovnoběžných přímek je 0° .*

Věta 1.10.3 *Odchylka dvou mimoběžných přímek je odchylka různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami. (obr. 2)*

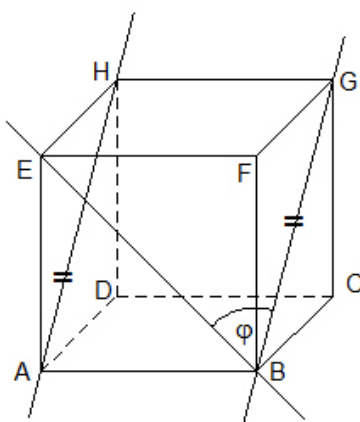
Značení: Je-li φ odchylka dvou přímek p, q , píšeme $\varphi = |\angle pq|$.



Příklad 1.10.1

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete odchylku přímek AH, BE .

Řešení:



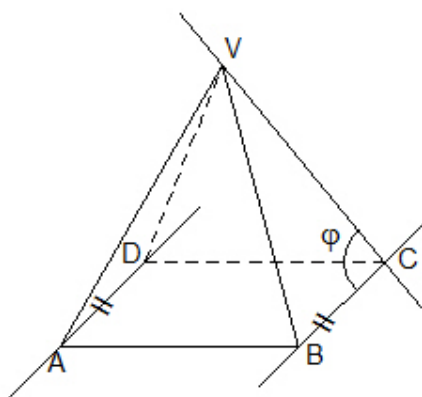
Bodem B vedeme rovnoběžku s přímkou AH . Odchylka různoběžných přímek BE a BG je stejná jako odchylka mimoběžných přímek BE a AH . Jelikož trojúhelník BGE je rovnostranný je odchylka ϕ rovna 60° .



Příklad 1.10.2

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, jehož stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Určete odchylku přímek AD , CV .

Řešení:



Bodem C vedeme rovnoběžku s přímkou AD . Tím dostaneme různoběžné přímky BC a CV , které mají stejnou odchylku jako zadané mimoběžky. Jelikož stěny jehlanu jsou rovnostranné trojúhelníky je odchylka ϕ rovna 60° .

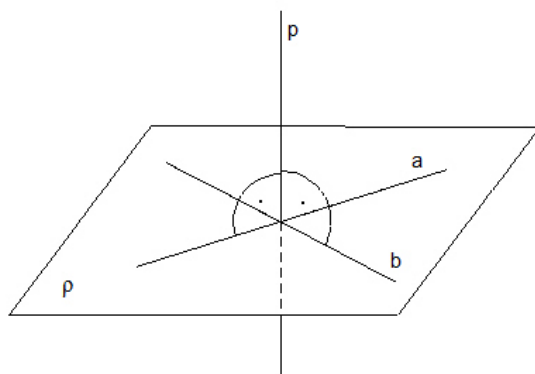
1.11 Kolmost přímek a rovin

Věta 1.11.1 Dvě přímky jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jejich odchylka je 90° . Značíme $p \perp q$.

Definice 1.11.1 Přímka a rovina jsou k sobě kolmé právě tehdy, když je přímka kolmá ke všem přímkám roviny. Značíme $p \perp \rho$.

Věta 1.11.2 Kritérium kolmosti přímky a roviny: Je-li přímka kolmá ke dvěma různoběžkám roviny, pak je k rovině kolmá. (obr.3)

Věta 1.11.3 Dvě roviny jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině. Značíme $\perp\sigma$.



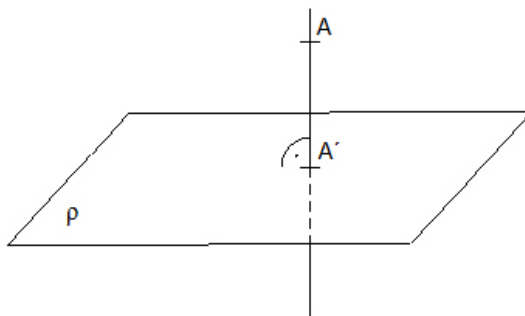
Věta 1.11.4 Rovina je kolmá ke dvěma různoběžným rovinám právě tehdy, když je kolmá k jejich průsečnici.

Věta 1.11.5 Přímkou, která je kolmá k rovině prochází nekonečně mnoho rovin kolmých k dané rovině; tvoří svazek rovin, jehož osou je daná přímka.

Věta 1.11.6 Daným bodem prostoru lze vést k dané rovině právě jednu kolmici. Průsečík této přímky s rovinou nazýváme pravoúhlý průmět bodu A do roviny. (obr. 4)

Věta 1.11.7 Daným bodem prostoru lze vést k dané přímce právě jednu kolmou rovinu.

Věta 1.11.8 Danou přímku, která není k rovině kolmá, prochází právě jedna rovina, která je k rovině ρ kolmá. Průsečnici rovin ρ a σ nazýváme pravoúhlý průmět přímky p do roviny ρ .



Věta 1.11.9 *Přímku lze proložit rovinu kolmou k druhé přímce právě tehdy, když jsou obě přímky k sobě kolmé.*

Pro libovolné přímky p, q a libovolné roviny ρ, σ platí:

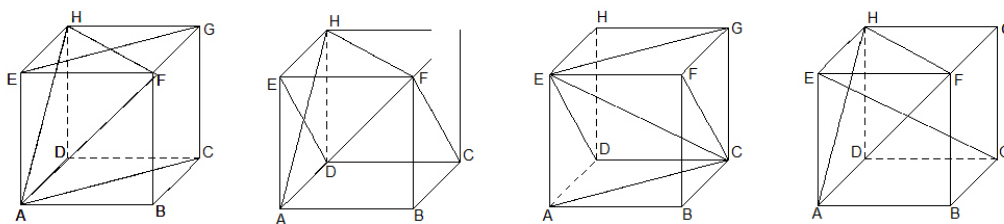
- a) jestliže $p \perp \rho$ a $q \perp \rho$, pak $p \parallel q$,
- b) jestliže $p \perp \rho$ a $p \parallel q$, pak $q \perp \rho$,
- c) jestliže $p \perp \rho$ a $p \perp \sigma$, pak $\rho \parallel \sigma$,
- d) jestliže $p \perp \rho$ a $\rho \parallel \sigma$, pak $p \perp \sigma$.



Příklad 1.11.1

Vrcholem E krychle $ABCDEFGH$ vedte přímku kolmou k rovině AFH

Řešení:



Hledanou přímku určíme jako průsečnici dvou rovin, které jsou kolmé k rovině AFH . Rovina ACE , resp. CDE je kolmá k rovině AFH , jelikož rovina AFH obsahuje přímku FH , resp. AH , která je k této rovině kolmá. Průsečnice rovin ACE a CDE , tedy přímka CE , je hledanou kolmicí.

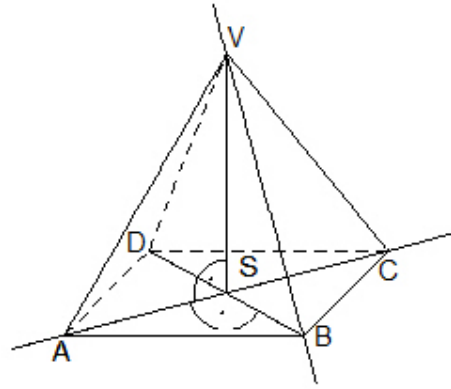


Příklad 1.11.2

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, bod S je středem podstavy. Ověřte kolmost přímek AC a BV .

Řešení:

K ověření kolmosti dvou přímek uijeme kolmosti přímky a roviny. Přímka BV leží v rovině BVD a v této rovině leží přímky BD a VS , které jsou kolmé k přímce AC . Dle kritéria kolmosti přímky a roviny je přímka AC kolmá k rovině BVD . Je tudíž kolmá ke všem přímkám této roviny, tedy i k přímce BV .



1.12 Odchylka přímek a rovin

Odchylka přímky ($p \perp \rho$) a roviny je rovna odchylce přímky od jejího pravouhlého průmětu do této roviny. Je-li přímka kolmá k rovině je odchylka rovna 90° . (obr. 6)

Pro libovolné přímky p, q a libovolné roviny ρ, σ platí:

- a) jestliže $\rho \parallel \sigma$, pak $|\angle p\rho| = |\angle p\sigma|$
- b) jestliže $p \parallel q$, pak $|\angle p\rho| = |\angle q\rho|$
- c) jestliže $\rho \parallel \sigma$ a $p \parallel q$, pak $|\angle p\rho| = |\angle p\sigma| = |\angle q\rho| = |\angle q\sigma|$

Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá. (obr. 5)

Platí: jsou-li roviny ρ a ρ' a také σ a σ' rovnoběžné, pak $|\angle \rho' \sigma'| = |\angle \rho \sigma|$.

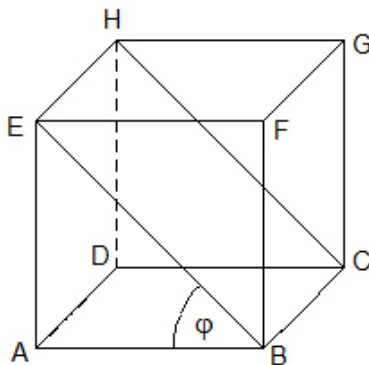
OBRAZEK



Příklad 1.12.1

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete odchylku rovin ABC a BCH .

Řešení:



Odchylku rovin ABC a BCH určíme pomocí odchylky přímek, které jsou průsečnicemi těchto rovin s rovinou k nim kolmou. Takovou rovinou je například rovina ABF , která protíná zadané roviny v přímkách AB a BE . Odchylka rovin ABC a BCH je tedy rovna odchylce přímek AB a BE , která je rovna 45° .

Příklad 1.12.2 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s výškou délky 6 cm a hranou podstavy délky 4 cm. Bod S je středem podstavy. Určete odchylku podstavy a stěny jehlanu.

Řešení:

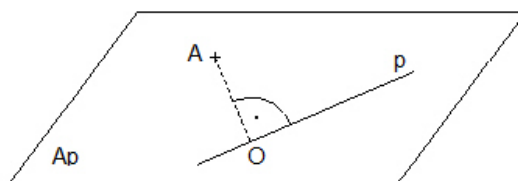
Určíme například odchylku podstavy a stěny BCV . Rovina EVS , kde bod E je střed úsečky BC , je k oběma rovinám kolmá, určíme tedy průsečnice s touto rovinou a určíme jejich odchylku. V pravoúhlém trojúhelníku EVS známe délky dvou stran, $|SE| = 2$, $|VS| = 6$ a pomocí funkce tangens vypočítáme hledanou odchylku.

$$\tan \varphi = \frac{6}{2} = 3, \text{ tedy } \varphi \doteq 71^\circ 34'.$$

OBRAZEK

1.13 Vzdálenost bodu od přímky a od roviny

Vzdálenost bodu A od přímky p ($A \notin p$) je rovna vzdálenosti bodu A od přímky p v rovině Ap . Leží-li bod na přímce je vzdálenost rovna 0. Vzdálenost značíme $|Ap|$. (obr.7)



Vzdálenost bodu A od roviny ρ je vzdálenost bodu A a jeho pravoúhlého průmětu A' do roviny ρ . Značíme $|A\rho|$.

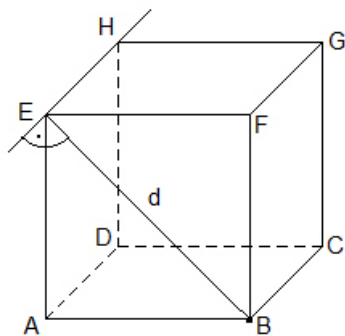


Příklad 1.13.1

Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky 4. Vypočítejte vzdálenost bodu B od přímky EH .

Řešení:

Bod B a přímka EH určují rovinu AEH . V této rovině sestrojíme kolmici z bodu B na přímku EH . Průsečík této kolmice a přímky EH je bod E , a tedy hledaná vzdálenost je rovna délce úsečky BE . Úsečka BE je stěnovou úhlopříčkou a její délka je tudíž rovna $\sqrt{2}$.



Příklad 1.13.2

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s výškou délky 4 a podstavnou hranou délky 6. Vypočítejte vzdálenost středu podstavy S od stěny BCV .

Řešení:

Bodem S proložíme rovinu EVS , kde bod E je střed úsečky BC . Tato rovina je kolmá k rovině BCV a protíná tuto rovinu v přímce EV . Vzdálenost bodu S od roviny BCV je rovna vzdálenosti bodu S od přímky EV . Tuto vzdálenost vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku EVS . Nejprve pomocí Pythagorovy věty vypočítáme délku strany EV , $|EV| = 5$, a poté ze dvou vzorců na obsah pravoúhlého trojúhelníka,

$$S = \frac{|SE| \cdot |VS|}{2} = \frac{|EV| \cdot v}{2},$$

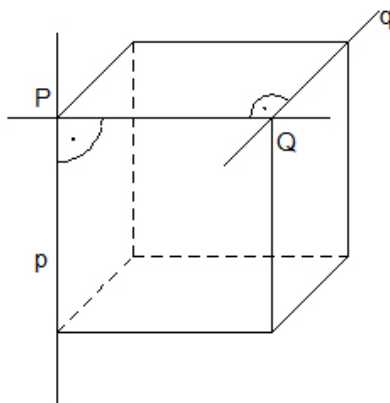
vypočítáme hledanou vzdálenost $v = 2,4$.

OBRAZEK

1.14 Vzdálenost přímek a rovin

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek p, q je vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky. Značíme $|pq|$.

Vzdálenost dvou mimoběžných přímek p, q je délka úsečky PQ , kde body P, Q jsou po řadě průsečíky mimoběžek p, q s osou těchto mimoběžek. (obr. 8)



Osa mimoběžek - je příčka těchto mimoběžek, která je k oběma mimoběžkám kolmá.

Konstrukce osy mimoběžek - Libovolným bodem prostoru vedeme rovnoběžky s danými přímkami. Tyto rovnoběžky určují rovinu rovnoběžnou s oběma mimoběžkami. Určíme směr kolmý k této rovině a tím dostaneme směr hledané osy daných mimoběžek. Libovolným bodem jedné z daných mimoběžek vedeme rovnoběžku s tímto směrem, určíme tak rovinu, ve které leží hledaná osa. Průsečík této roviny s druhou mimoběžkou je bodem hledané osy, stačí tedy tímto bodem vést rovnoběžku se směrem osy a dostaneme hledanou osu mimoběžek.

Vzdálenost dvou mimoběžných přímek lze také určit jako vzdálenost dvou rovnoběžných rovin, které tyto mimoběžky obsahují.

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny. Značíme $|\rho\sigma|$.

Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné je vzdálenost libovolného bodu přímky od této roviny. Značíme $|pp|$.



Příklad 1.14.1

Krychle $ABCDEFGH$ má hranu délky 5, bod M je střed hrany EH . Určete vzdálenost přímek FM a AC .

Řešení:

OBRAZEK

V rovině EFG leží jak přímka MF , tak i přímka EG , která je rovnoběžná s přímkou AC . Rovina EFG je tedy rovnoběžná s oběma zadanými mimoběžkami a tudíž libovolná kolmice určuje směr hledané osy mimoběžek. Rovina ACG je určena přímkou AC a přímkou AE , která patří směru osy. Tato rovina protíná přímku FM v bodě Q , kterým tedy prochází osa mimoběžek AC a FM . Bod P je průsečík této osy a přímky AC . Vzdálenost daných mimoběžek je tedy rovna velikosti úsečky PQ , která je však rovna délce hrany dané krychle, tedy $|AC, FM| = 5$.



Příklad 1.14.2

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ s výškou délky 6. Body K a L jsou po řadě středy hran AV a BV . Určete vzdálenost přímek KL a BC .

Řešení:

OBRAZEK

Vzdálenost mimoběžek KL a BC je rovna vzdálenosti dvou rovnoběžných rovin, které tyto přímky obsahují. Přímka BC leží v rovině podstavy ABC a přímka KL leží v rovině KLM , kde bod M je střed hrany CV . Vzdálenost roviny ABC a KLM je zřejmě rovna polovině výšky jehlanu, tedy rovna 3.

2 Volné rovnoběžné promítání

2.1 Řezy na tělesech

Řez tělesa rovinou je průnik tělesa a roviny. Je to rovinný útvar, jehož hranice je průnik hranice tělesa a roviny řezu. Hranice řezu hranolu, popř. jehlanu se skládá z průniků roviny řezu se stěnami hranolu, popř. jehlanu. Sestrojit řez rovinou tedy znamená sestavit průsečnice jednotlivých stran tělesa s danou rovinou. Při konstrukci řezů jsou důležité tři věty:

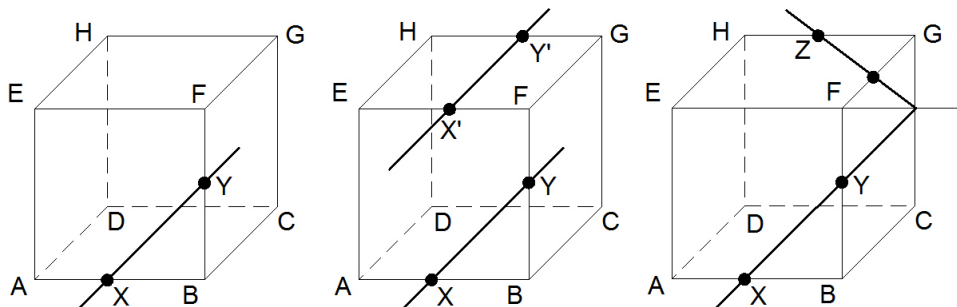
Věta 2.1.1 *Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině.*

Věta 2.1.2 *Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách.*

Věta 2.1.3 *Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto bodem všechny tři průsečnice.*

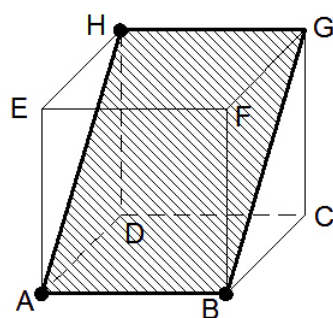
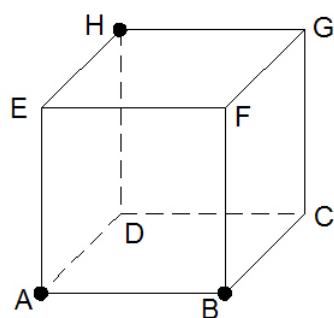
Z těchto vět vyplývají tři důsledky:

- Spojnice dvou různých bodů v jedné rovině přímka, která je jednou stranou řezu.
- Jsou-li roviny dvou stěn rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné.
- Průsečnice rovin dvou sousedních stěn s rovinou řezu a přímka v níž leží společná hrana, se protínají v jednom bodě.



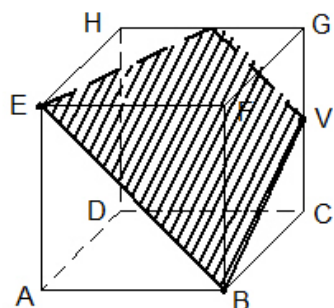
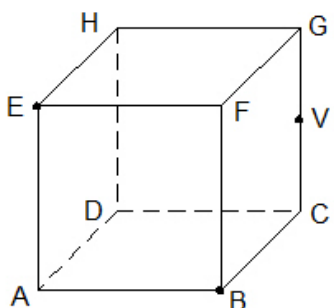
Příklad 2.1.1

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou ABH .



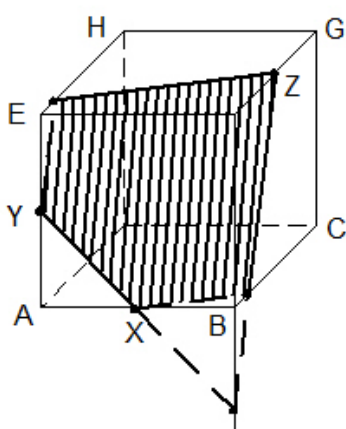
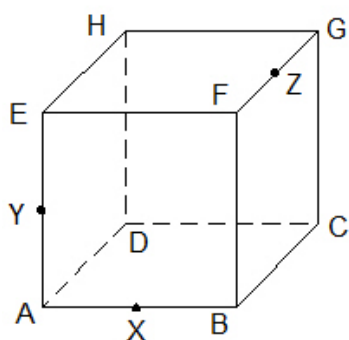
Příklad 2.1.2

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou BEV . Bod V leží ve středu strany CG .



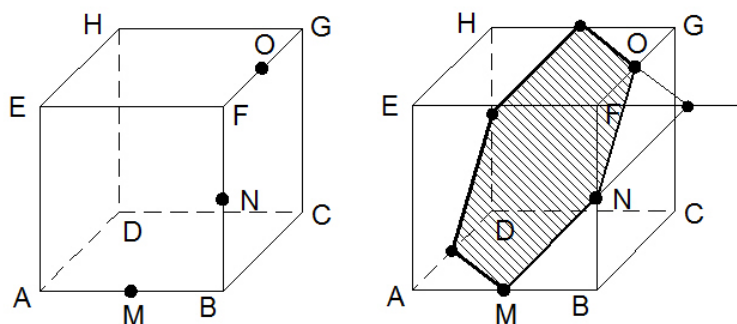
Příklad 2.1.3

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou XYZ . X leží ve středu strany AB , Y ve středu strany AE a Z leží ve středu strany FG .



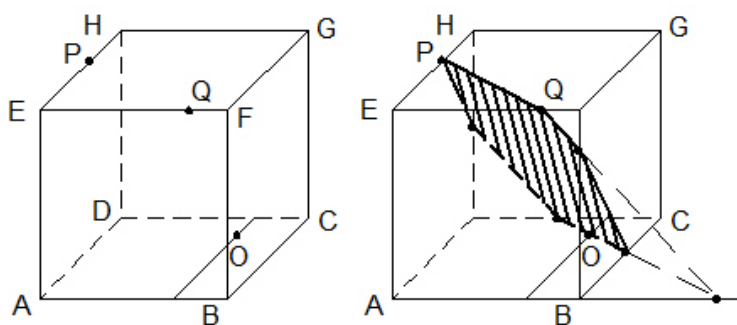
Příklad 2.1.4

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou OMN .



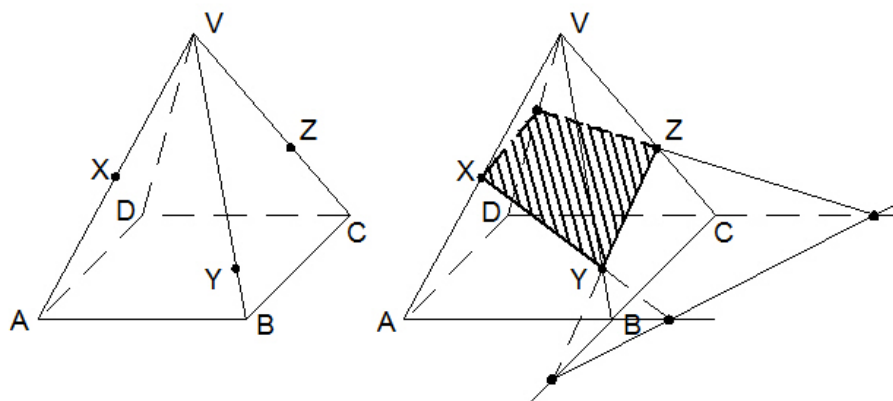
Příklad 2.1.5

Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou PQO .



Příklad 2.1.6

Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou XYZ .



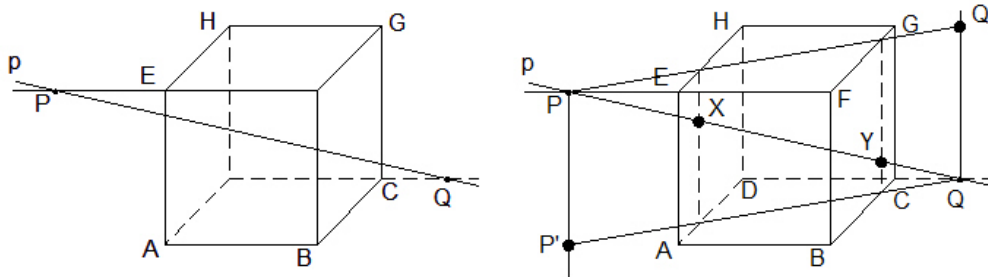
2.2 Průnik přímky s tělesem

Průnik přímky s tělesem řešíme obdobně jako průsečík přímky s rovinou. Přímkou proložíme libovolnou rovinu, určíme řez tělesa s touto rovinou a potom je průnik přímky s řezem tělesa zároveň průnik přímky s tělesem.



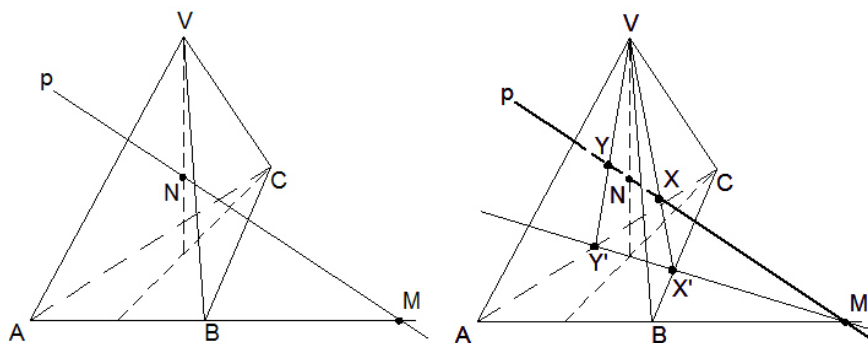
Příklad 2.2.1

Sestrojte průnik přímky $p = (PQ)$ a krychlí $ABCDEFGH$.



Příklad 2.2.2

Sestrojte průnik přímky $p = (MN)$ a trojbokého hranolu $ABCV$.



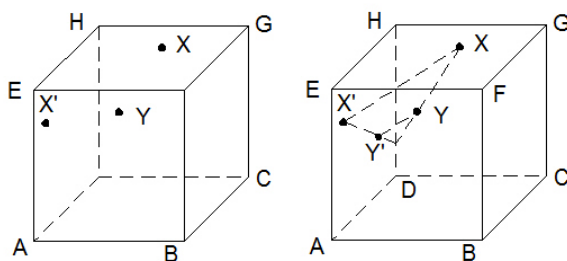
2.3 Osová afinita

Mějme dány roviny α a β a směr s , přičemž roviny α i β nejsou rovnoběžné se směrem s . Osová afinita mezi různoběžnými rovinami α a β je rovnoběžné promítání bodů roviny α do roviny β směrem s . Průsečnice rovin α a β se nazývá osa afinity. Osová afinita mezi rovinami α a β je určena osou afinity o a uspořádanou dvojicí různých bodů AA' , kde A je libovolný bod roviny α neležící na ose afinity a A' je jeho obraz v rovině β . Uspořádaná dvojice bodů AA' se nazývá směr osové afinity. Osovou afinitu budeme využívat ke konstrukci řezů hranolů, kde rovina β je rovina řezu, rovina α je rovina stěny (nejčastěji podstavy) a s je směr bočních stěn.



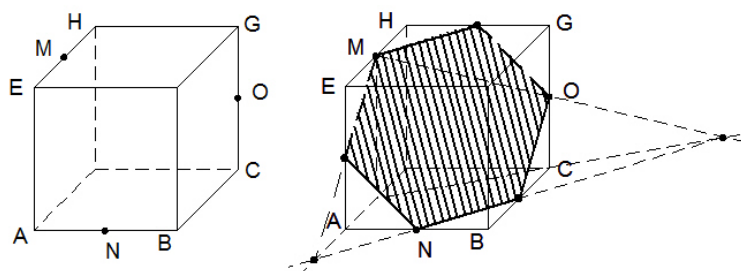
Příklad 2.3.1

Máme danu krychli $ABCDEFGH$ a osovou afinitu mezi rovinami α a β určenou body XX' . Najděte obraz bodu Y roviny α v rovině β . $\alpha = (CDG)$ a $\beta = (ADE)$.



Příklad 2.3.2

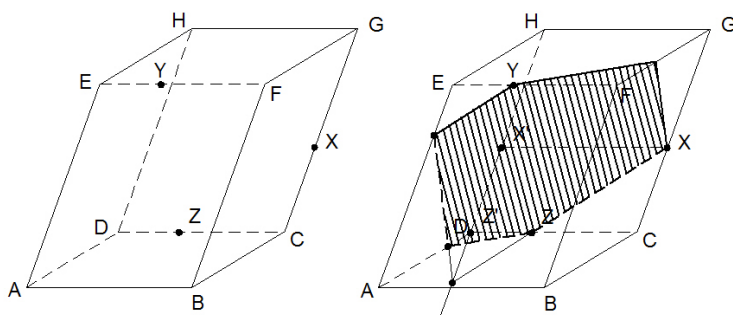
Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou MNO



2.4 Další příklady

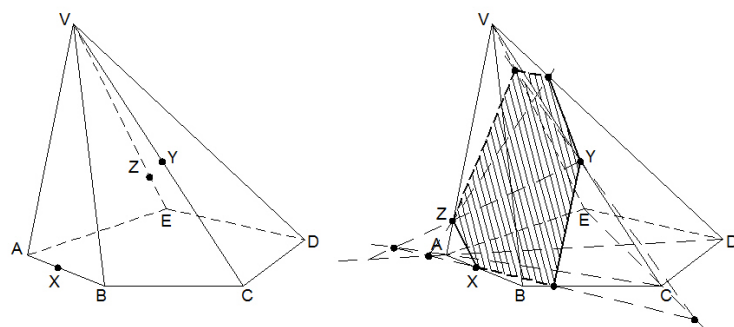


Sestroj řez hranolu $ABCDEFGH$ rovinou XYZ .



Příklad 2.4.1

Sestroj řez jehlanu $ABCDEV$ rovinou XYZ .



```
\Zdroje{
\bibitem[PřF 2011]{op1-1} \href{Moderní_opory_skripta.ppt}
{Jak psát moderní e-learningové studijní opory a skripta},
[Prezentace: Moderní\_opory\_skripta.ppt].
}
```

Reference

[PřF 2011] [Jak psát moderní e-learningové studijní opory a skripta](#), [Prezentace: Moderní_opory_skripta.ppt].