INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

„Rozšíření akreditace učitelství matematiky a učitelství deskriptivní geometrie na PřF UP v Olomouci o formu kombinovanou“

CZ.1.07/2.2.00/18.0013

Vybrané kapitoly z matematiky

Mgr. Vladimír Vaněk, Ph.D.

KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

2013

Obsah

Vybrané kapitoly z matematiky

Cílem studia matematiky na vysoké škole jako podpůrného studijního předmětu je především pochopení studovaného oboru pomocí metod exaktních věd a využití efektivní matematické podpory při poznávání vlastního studovaného oboru. Obecně je však úkolem matematiky jako vědy především naučit myslet – tedy analyzovat problém, stanovit strategii jeho řešení a potom teprve využít matematických prostředků k jeho vyřešení.

Učební text, který právě začínáte číst, je určen zejména studentům prvního ročníku Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci. Učební látka je dána sylabem předmětu Matematika I, který je přednášen v zimním semestru v rozsahu dvou hodin spolu s dvouhodinovým seminářem (cvičením). V letním semestru pak navazuje předmět Matematika II se stejnou hodinovou dotací. U čtenáře se nepředpokládá nic nad rámec znalostí získaných na střední škole.

Cílem textů je zejména upevnění poznatků ze středoškolské matematiky a poukázání na jejich provázanost s potřebnými pojmy vysokoškolské matematiky, zejména z oblasti diferenciálního počtu. Všechny kapitoly mají totožnou strukturu. Kromě nutné teoretické části zde najdete značné množství řešených i neřešených úloh; v řešených úlohách opatřených komentářem je studující veden krok po kroku. Vzhledem k rozsáhlé oblasti učiva, které skripta pokrývají, byly vynechány důkazy většiny vět. Ty však zvídavý čtenář nalezne v literatuře, která je uvedena na konci textu.

Autoři doporučují texty nejenom číst, ale s připravenou tužkou a papírem počítat, řešit, kreslit, uvažovat, tudíž nacházet a objevovat. Klíč ke zvládnutí problémů doopravdy spočívá v jejich řešení – nestačí se na ně jenom dívat. V dosahu pomoci je také vyučující nebo konzultující učitel.

Není vyloučeno, že – i po několikanásobném čtení – najde čtenář v textu nějaké chyby či překlepy; za ty se předem omlouváme a budeme rádi, když se nám dostanou k nahlédnutí a opravě.

Uvedeme ještě vysvětlení významu grafických značek používaných v textu kvůli jeho strukturování. Jejich systém byl převzat z publikace [1], čímž bychom rádi poděkovali jeho autorům.

Tato značka připomíná terčík; v následném textu ji používáme pro vymezení zaměření kapitoly a hlavních cílů kapitoly nebo její části. Po prostudování kapitoly je vhodné vrátit se k této značce a zkontrolovat si, zda jste studiem jednotlivé cíle naplnili a tím kapitolu nebo její část zvládli.

Značka rozsvícené žárovky by mohla posloužit k tomu, abyste získali jasnou *motivaci* **ke studiu: bude uvádět text, ve kterém bude uvedeno,** *proč* **některé pojmy nebo vztahy studovat, k čemu nás přivedou, v čem je jejich význam nebo na čem se zakládají.**

Otevřená knížka značí, že nyní uvádíme základní popisy klíčových pojmů, definice, vztahy mezi pojmy, nebo také obecné principy postupů.

Text, který následuje za tímto klíčem, bude obsahovat řešení konkrétních ukázkových příkladů, případně také s komentovaným postupem. V neřešených úlohách tyto postupy můžete použít – obrazně jako klíč k otevření, rozřešení problému.

Na místě uváděném tímto otazníkem najdete problémy zformulované k vašemu řešení: po předchozím studiu se nyní můžete pustit do jejich řešení – na praktických úlohách se otestujete, jak jste zvládli příslušnou část látky.

♣ Tato značka textového editoru LaTeX, ve kterém jsme pro vás napsali náš matematický text, vymezuje ukončení důkazu tvrzení nebo vyznačuje konec postupu řešení nějaké úlohy.

Úvod učebního textu tímto končí a naopak začíná samotná práce s textem, proto Vám přeji hodně úspěchů, především při pronikání do krás matematiky.

V Olomouci, léto 2013 Vladimír Vaněk

Kapitola 1

Spojitost funkce

V následující kapitole se budeme zabývat tzv. spojitostí funkce a to, jak spojitostí v bodě, tak spojitostí na množině. S pojmem spojitosti se dále váží pojmy jako je okolí bodu, limita aj, se kterými jste se již v textu setkali. Po prostudování kapitoly bychom měli bez problémů definovat pojem spojitosti, určit zda je daná funkce spojitá, nespojitá prvního druhu resp. druhého druhu a v neposlední řadě uvést příklady takových funkcí.

Představme si případ, kdy známe funkční hodnoty $f(a)$ a $f(b)$, kde $a \neq b$ – například počáteční a koncovou hodnotu průběhu nějakého experimentu. Nás ale kromě toho zajímá, jestli daný experiment probíhal kontinuálně, nebo nastaly skokové změny. Matematicky vyjádřeno, zda funkční hodnoty $f(x)$, pro $x \in \langle a, b\rangle$ nabývaly právě všech hodnot z intervalu $\langle f(a), f(b)\rangle$, nebo zde některé chybí či přebývají. Odpověď nám mohou poskytnout následující řádky.

Intuitivní představy o pojmu spojitost

Mezi funkcemi, se kterými jste se již ve skriptech setkali, mají mimořádný význam funkce, které nazýváme spojité. Intuitivně všichni cítíme, že spojité je něco nepřerušované. Na školách se někdy uvádí, že graf spojité funkce lze nakreslit jedním tahem. Taková interpretace pojmu spojitost ovšem naráží na mnoho problémů. Tím největším je schopnost vytvořit si správný geometrický názor. Jen velmi těžko bychom mohli pomocí takové "definice"ukázat, že například funkce $f(x) = x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 16x^3 + 15x^2 - 11x + 12$ je spojitá funkce, i když tomu tak doopravdy je. Je nezbytné, abychom mohli o funkci prohlásit, zda je či není spojitá i bez znalosti jejího grafu. Je velkým úspěchem matematického myšlení, že byl pojem spojitost vyjádřen naprosto exaktně.

Než přistoupíme k samotné definici pojmu spojitost, ukažme si několik funkcí:

Příklad 1.0.1. Mějme funkce:

1. $f : y = x + 3, x \in \mathbb{R}$
2. $g : y = \dfrac{x^3 - 3x}{x}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
3. $h : y = \dfrac{1}{x}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Graf funkce f je přímka , grafem funkce g je parabola kromě jejího minima v bodě $[0, -3]$ a konečně grafem funkce h jsou dvě větve hyperboly (nepřímá úměrnost). Pokud bychom si grafy představili jako cesty, po cestě f bychom přešli bez větších problémů, na cestě g bychom museli překonat jednu překážku a to "díru"po bodě $[0, -3]$, ovšem cestu h bychom nikomu nedoporučovali, neboť pokud by vyšel na jedné její části, nikdy by se nedostal na druhou. Kterou cestu si vybrat a kterou nikoliv nám objasní již známý pojem limita.

1.1 Spojitost funkce v bodě

Spojitost funkce v bodě odpovídá názorné představě, že ”velmi malé”změně hodnoty proměnné z definičního oboru odpovídá ”velmi malá”změna funkčních hodnot. Vyslovme přesnou definici.

Definice 1.1.1. Říkáme, že funkce f je *spojitá* v bodě a, jestliže $a \in D(f)$ a k libovolnému okolí $U(f(a))$ bodu $f(a)$ existuje okolí $V(a)$ bodu a tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$x \in V(a) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in U(f(a)).$$

Vyslovme ještě ekvivalentní definici, která využívá známého pojmu limita.

Definice 1.1.2. Říkáme, že funkce f je *spojitá* v bodě $a \in \mathbb{R}$ takovém, že f je definovaná v jeho okolí, právě když existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

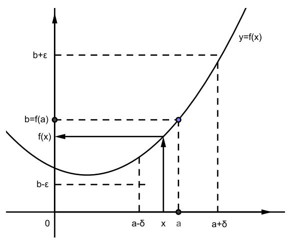
Druhá definice v sobě obsahuje hned tři podmínky, které budeme v dalším textu využívat.

1. funkce f musí být v bodě a definována (na rozdíl od limity),
2. musí existovat limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, tedy musí existovat jednostranné limity a musí si být rovny,
3. limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ musí být rovna funkční hodnotě v bodě a.

V některých publikacích je možné najít další ekvivalentní definici. Pro úplnost ji zde uvedeme také.

Definice 1.1.3. Říkáme, že funkce f je *spojitá* v bodě $a \in D(f)$ a platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f) : |x - a| < \delta \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



Obrázek 1.1: Spojitost funkce v bodě

My se budeme v dalším opírat především o definici využívající pojmu limita.

1.1.1 Základní vlastnosti

Z vět o limitách funkcí plynou snadno některé věty o vlastnostech spojitých funkcí v bodě.

Věta 1.1.1. ***(O vlastnostech spojitosti)*** *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$. Pak*

1. *f je spojitá v bodě a, právě tehdy, když je v a spojitá zleva i zprava.*
2. *Jestliže je f spojitá v a, pak existuje $U(a)$ takové, že f je omezená na $U(a)$.*
3. *Jestliže jsou f, g spojité v a, pak $f + g, f - g, cf, fg, |f|$ jsou také spojité, a je-li $g(a) \neq 0$, je spojitá v bodě a také $\dfrac{f}{g}$.*
4. *Jestliže je f spojitá v a a zároveň g spojitá v $A = f(a)$, pak je také složená funkce $g \circ f$ spojitá v bodě a.*

Věta 1.1.2. ***(O spojitosti elementárních funkcí)*** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \in D(f)$ je elementární funkce. Pak v každém bodě $x \in D(f)$ je f spojitá.*

1.2 Jednostranná spojitost a body nespojitosti

Mějme funkci $f : A \to \mathbb{R}$. Jestliže v jistém levém, resp. pravém okolí bodu a není funkce f definována, pak mluvím zpravidla o *jednostranné spojitosti* v bodě a *zprava, resp. zleva*. Například funkce $f : y = \sqrt{x}$ jde v bodě 0 o spojitost zprava (funkce není definována pro $x < 0$). Pojem jednostranné spojitosti však zavádíme i v případě, že máme definováno okolí bodu a zprava i zleva.

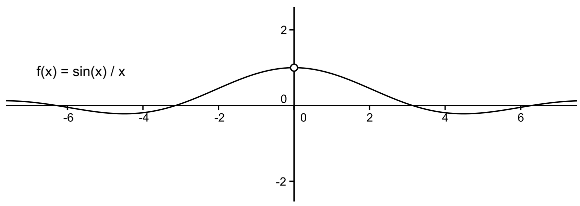
Definice 1.2.1. Říkáme, že funkce $f : A \to \mathbb{R}$ je *spojitá zprava (zleva)* v bodě $a \in A$, jestliže platí:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a).$$

Body definičního oboru funkce f, v nichž není funkce spojitá, nazýváme body *nespojitosti* funkce f. Tyto body můžeme roztřídit do tří skupin.

1. Existuje konečná limita
$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \text{ale} \quad b \neq f(a).$$
Takový bod nazveme *bodem odstranitelné nespojitosti*, protože stačí funkci f v bodě a předefinovat tak, že položíme $f(a) = b$ a funkce se stane spojitou. K bodům odstranitelné nespojitosti patří také body, v nichž je funkce f nedefinovaná, ale existuje v něm limita
$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$
V takovém případě postačí funkci f v bodě a dodefinovat tak, že položíme $f(a) = b$. Funkci f tak rozšíříme na $D(f) \cup \{a\}$.

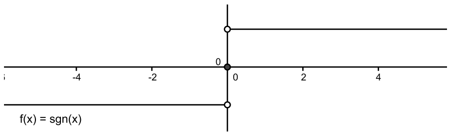
Příklad 1.2.1. Funkce $f(x) = \dfrac{2\sin x}{x}$ není definována v bodě $x = 0$. Vyzkoušíme tedy jednostranné limity: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{sinx}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{sinx}{x} = 1$. Jedná se tedy o odstranitelnou nespojitost, stačí dodefinovat $f(0) = 1$ a funkce bude spojitá v oboru reálných čísel.



Obrázek 1.2: Graf funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

2. Existují konečné jednostranné limity, ale nejsou si rovny.
$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x).$$
V tomto případě nazveme bod a *nespojitostí prvního druhu* a číslo
$$s(a) = \left| \lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x) \right|$$
nazýváme *skokem funkce v bodě* a.

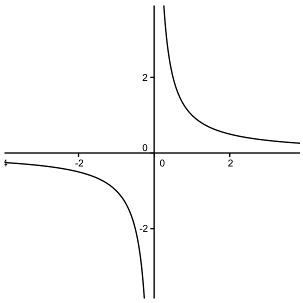
Příklad 1.2.2. Funkce $f(x) = sgnx$ má v bodě 0 nespojitost prvního druhu. Tvrzení nám dokáží hodnoty jednostranných limit: $\lim\limits_{x\to 0^+} sgnx = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0^-} sgnx = -1$. $\;s(0) = |1 - (-1)| = 2$



Obrázek 1.3: Graf funkce $f(x) = sgnx$

3. Jestliže alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje nebo je nevlastní ($\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$), pak bod a nazveme bodem *nespojitosti druhého druhu*.

   Příklad 1.2.3. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má v bodě 0 nespojitost druhého druhu. Tvrzení nám dokáží opět jednostranné limity: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, resp. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.



Obrázek 1.4: Graf funkce $f(x) = \frac{1}{x}$

Příklad 1.2.4. Určete body nespojitosti funkce $f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$ a klasifikujte je.

Řešení: **1.2.4.** Body nespojitosti zjistíme velmi jednoduše. Jsou to kořeny jmenovatele zlomku, tedy $-1, 0, 1$. Nyní vypočítáme jednostranné limity pro všechny body nespojitosti.

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x(x^2-1)} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x(x^2-1)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x(x^2-1)} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(x^2-1)} = -\infty$$

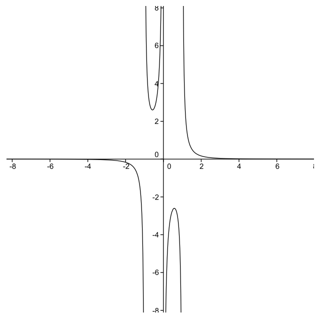
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x(x^2-1)} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x(x^2-1)} = +\infty$$

Všechny tři body můžeme klasifikovat jako body nespojitost druhého druhu. Pro představu uvádíme i graf této funkce.

♣

Příklad 1.2.5. Určete body nespojitosti funkce $g(x) = \begin{cases} x^2+2, & \text{je-li} \quad x \in (-\infty, 0) \\ 0 & \text{je-li} \quad x = 0 \\ -x^2-2, & \text{je-li} \quad x \in (0, \infty). \end{cases}$

a klasifikujte je.



Obrázek 1.5: Graf funkce $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$

Řešení: **1.2.5.** Uvedená funkce je nespojitá pouze pro $x = 0$. Podívejme se na jednostranné limity.

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 2 \qquad\qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = -2.$$

Navíc $g(0) = 0$.
Jednostranné limity sice existují, ale nejsou si rovny, jde tedy o nespojitost prvního druhu. ♣

Příklad 1.2.6. Určete body nespojitosti funkce $h(x) = \begin{cases} x^2+5, & \text{je-li} \quad x \in (-\infty, 0) \\ 2 & \text{je-li} \quad x = 0 \\ -x^2+5, & \text{je-li} \quad x \in (0, \infty). \end{cases}$
a klasifikujte je.

Řešení: **1.2.6.** Uvedená funkce je nespojitá opět pro $x = 0$. Podívejme se na jednostranné limity.

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = 5 \qquad\qquad \lim_{x\to 0^+} h(x) = 5.$$

Navíc $h(0) = 2$.
Jednostranné limity existují, jsou si rovny, ale nejsou rovny funkční hodnotě v bodě $x = 0$, jde tedy o odstranitelnou nespojitost. ♣

1.3 Spojitost funkce na množině

Od spojitosti funkce v bodě nyní přejdeme ke spojitosti funkce na intervalu, jakožto velmi hluboké vlastnosti funkcí. Z hlediska využití vlastností funkcí hrají významnou roli právě funkce spojité na daném intervalu. Znalosti o spojitých funkcích nám umožňují například řešit nerovnice, případně přibližně řešit rovnice. Ačkoliv si to mnozí neuvědomují, využívají vlastnosti spojitých funkcí již od základní školy. Než přejdeme k vyslovení nejdůležitějších vět, specifikujme dva základní pojmy.

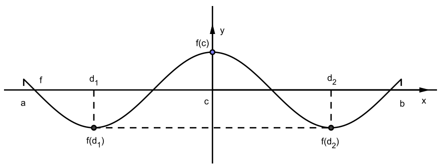
Definice 1.3.1. *Funkce je spojitá na otevřeném intervalu* (a, b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

Definice 1.3.2. *Funkce je spojitá na uzavřeném intervalu* $\langle a, b\rangle$, je-li spojitá v (a, b) a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Věta 1.3.1. *(Weierstrassova věta) Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom platí:*

1. *Funkce f je na tomto intervalu omezená.*
2. *Funkce f nabývá na tomto intervalu své největší a nejmenší hodnoty, tj. existují $c, d \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(c) = \max\limits_{x\in\langle a,\, b\rangle} f(x)$, resp. $f(d) = \min\limits_{x\in\langle a,\, b\rangle} f(x)$ (viz obr. 1.6).*

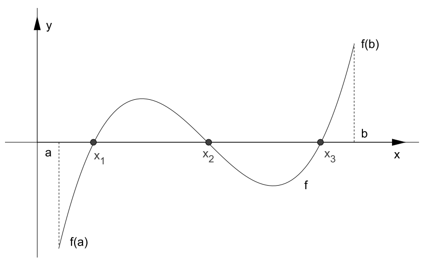
Druhé tvrzení věty Weierstrassovy je existenční, které nám dává jistotu, že má smysl hledat maxima a minima. Neříká však nic o tom, jak dané body nalezneme.



Obrázek 1.6: Ilustrace Weierstrassovy věty.

Věta 1.3.2. *(Bolzanova - Weierstrassova věta) Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a $f(a) \neq f(b)$, pak funkce f nabývá na intervalu (a, b) všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$. Jinými slovy platí, že pro libovolné číslo $y \in (f(a), f(b))$ existuje číslo $x \in (a, b)$ takové, že $f(x) = y$.*

Věta 1.3.3. *(Bolzanova věta) Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že platí $f(a)\cdot f(b) < 0$. Pak existuje alespoň jeden bod $x \in (a, b)$ pro nějž platí $f(x) = 0$ (viz obr. 1.7).*



Obrázek 1.7: Ilustrace Bolzanovy věty.

Poznámka 1.3.1. Bolzanova věta je přímým důsledkem věty Bolzano - Weierstrassovy a zajišťuje nám při splnění uvedených podmínek existenci nulového bodu. Jde o postačující podmínku, tedy pokud není splněna, nemůžeme s jistotou říci, že nulové body funkce neexistují (viz následující příklad).

Příklad 1.3.1. Zjistěte, zda následující funkce mají v intervalu $\langle -2, 2\rangle$ nulový bod.

1. $f : y = x^3 - x$
2. $g : y = x^2 - 1$

***Řešení:* 1.3.1.**

1. Vypočítejme hodnoty funkce v krajních bodech: $f(-2) = -6$ a $f(2) = 6$, tedy $f(-2) \cdot f(2) = -36 < 0$ a podle Bolzanovy věty musí existovat alespoň jeden nulový bod x. Velmi jednoduchou úpravou zjistíme, že hledané reálné nulové body jsou dokonce tři ($f : y = x^3 - x = x(x-1)(x+1) = 0$, pro $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$).

2. Vypočítejme hodnoty funkce v krajních bodech: $g(-2) = 3$ a $g(2) = 3$, tedy $g(-2) \cdot g(2) = 3 > 0$ a Bolzanova věta nám nic neřekne. Přesto je zřejmé, že grafem funkce g je parabola s vrcholem (minimem) v bodě $[0, -1]$. Musí tedy protínat osu o_x ve dvou bodech $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$, které patří do našeho intervalu. ♣

Uvedený příklad po nás požadoval pouze důkaz existence nulového bodu. Většinou ale potřebujeme nejen vědět, že nulový bod existuje, ale je nutné znát i jeho číselnou hodnotu, byť jen přibližnou. Popíšeme si nyní postup, kterým lze číselnou hodnotu nulového bodu nalézt. Tento postup se nazývá **metoda půlení intervalu - bisekce**.
Nechť jsou splněny podmínky Bolzanovy věty na intervalu $\langle a, b\rangle$. Vezmeme nyní prostřední bod tohoto intervalu $c = \dfrac{a+b}{2}$ a určíme jeho funkční hodnotu $f(c)$. Pokud $f(c) = 0$, našli jsme nulový bod. Pokud

ne, nahradíme interval $\langle a, b\rangle$ intervalem $\langle a, c\rangle$ nebo $\langle c, b\rangle$ podle toho, pro který budou splněny podmínky Bolzanovy věty. Postup budeme opakovat do té doby, dokud nenalezneme přesnou hodnotu nulového bodu, nebo pokud délka intervalu nebude menší než námi předem stanovená přesnost.

Poznámka 1.3.2. Samozřejmě není nutné intervaly pouze půlit. Lze volit c v libovolném poměru délek příslušných intervalů, pro něž postup k nalezení nulového bodu bude rychlejší. My jsme volili postup, který lze jednoduše popsat.

Příklad 1.3.2. Najděte nulový bod funkce $f(x) = x^3 - x - 1$ na intervalu $\langle 1, 2\rangle$ s přesností na desetitisíciny.

***Řešení:* 1.3.2.** Použijeme právě popsanou metodu bisekce. Výsledky našich propočtů budeme zapisovat do přehledné tabulky.

a	b	$c = \frac{a+b}{2}$	$f(c)$	$\frac{f(b)-f(a)}{2}$
1	2	$1,5$	$0,875$	$0,5$
1	$1,5$	$1,25$	$-0,2969$	$0,25$
$1,25$	$1,5$	$1,375$	$0,2246$	$0,125$
$1,25$	$1,375$	$1,3125$	$-0,0515$	$0,0625$
$1,3125$	$1,375$	$1,3438$	$0,0828$	$0,0313$
$1,3125$	$1,3438$	$1,3282$	$0,0149$	$0,0157$
$1,3125$	$1,3282$	$1,3204$	$-0,0183$	$0,0079$
$1,3204$	$1,3282$	$1,3243$	$-0,0018$	$0,0039$
$1,3243$	$1,3282$	$1,3263$	$0,0068$	$0,002$
$1,3243$	$1,3263$	$1,3253$	$0,0025$	$0,001$
$1,3243$	$1,3253$	$1,3248$		$0,0005$

Přibližný výsledek je tedy $1,3248$ s chybou 0.0005. ♣

Věta 1.3.4. *(O hodnotách spojité funkce) Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu (a, b) a v (a, b) nemá žádné nulové body, pak buď $\forall x \in (a, b)$ je $f(x) > 0$ nebo $\forall x \in (a, b)$ je $f(x) < 0$.*

Příklad 1.3.3. Na množině reálných čísel řešme nerovnici $(x^2 - 1)(x^2 - 9) > 0$.

***Řešení:* 1.3.3.** Úlohy tohoto typu jsou nám již důvěrně známé a setkávali jsme se nimi od základní školy. Je ovšem důležité si uvědomit, že naše řešení je založeno na vlastnosti spojité funkce na množině a znalosti předchozí věty.
Uvažujme funkci $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$. Nejprve najdeme nulové body funkce f, zřejmě půjde o čísla $-3, -1, 1, 3$. Na základě spojitosti funkce f, můžeme využít tvrzení předchozí věty tak, že rozdělíme definiční obor funkce na disjunktní intervaly $(-\infty, -3), (-3, -1), (-1, 1), (1, 3), (3, \infty)$. V těchto intervalech je funkce spojitá a neobsahuje žádné další nulové body, musí tedy v jednotlivých intervalech nabývat buď jen kladných hodnot nebo jen záporných hodnot. K tomu, abychom určili znaménko hodnot v jednotlivých intervalech, tedy stačí vybrat si libovolný bod intervalu a všechny ostatní body budou nabývat hodnot se stejným znaménkem. např. z intervalu $(1, 3)$ vybereme bod $x = 2$. Platí $f(2) = -15 < 0$ a funkce je na tomto intervalu záporná. Výsledky zapíšeme do přehledné tabulky:

$x \in$	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f(x)$	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0

Věta 1.3.5. *(O spojitosti inverzní funkce) Nechť funkce f je spojitá a ryze monotónní na intervalu I. Pak f^{-1} je spojitá na $f(I)$.*

❓ Úlohy

Úloha 1.3.1 Určete body nespojitosti funkce a klasifikujte je.

a) $f_1 = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ [$x=-2,$ odstranitelná]

b) $f_2 = \dfrac{x^2-+5x+6}{x^2+2x}$ [$x=-2,$ odstranitelná; $x=0,$ druhého druhu]

c) $f_3 = \dfrac{x^3+2x^2+x}{x^3-2x^2-3x}$ [$x=-1, x=0,$ odstranitelná; $x=3,$ druhého druhu]

d) $f_4 = 2^x + 2^{-x}$ [spojitá na celém definičním oboru]

e) $f_5 = e^{\frac{1}{x}}$ [$x=0,$ druhého druhu]

f) $f_6 = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ [$x=0,$ prvního druhu, $s=1$]

g) $f_7 = \begin{cases} \frac{x}{|x|-x}, & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases}$ [$x=0,$ prvního druhu, $s=\frac{1}{2}$]

h) $f_8 = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & x<-1 \\ x^2-3 & x\geq -1 \end{cases}$ [spojitá na celém definičním oboru]

i) $f_9 = sgn(\sin x)$ [$x=k\pi, k\in\mathbb{Z},$ prvního druhu, $s=2$]

j) $f_{10} = sgn(x^2-4)$ [$x=\pm 2,$ prvního druhu, $s=2$]

k) $f_{11} = \dfrac{2}{\ln x - 1}$ [$x=e,$ druhého druhu]

Úloha 1.3.2 Najděte takové hodnoty konstanty C, pro které je daná funkce spojitá na celém definičním oboru.

a) $g_1 = \begin{cases} 2x+4, & x<1 \\ Cx-1 & x\geq 1 \end{cases}$ [$C=7$]

b) $f_7 = \begin{cases} Cx, & x<1 \\ 2-\dfrac{x}{C} & x\geq 1 \end{cases}$ [$C=1$]

c) $f_7 = \begin{cases} Cx-3, & x<2 \\ 3-x+2x^2 & x\geq 2 \end{cases}$ [$C=6$]

d) $f_7 = \begin{cases} e^{Cx}, & x<0 \\ C-x & x\geq 0 \end{cases}$ [$C=1$]

Úloha 1.3.3 Určete, zda rovnice mají v daném intervalu alespoň jeden kořen.

a) $x^3-10x-5=0, \quad ,(2,4)$ [ano]

b) $x^3-3x+1=0, \quad ,(0,-1)$ [ano]

c) $x^3+5x-1=0, \quad ,(1,2)$ [ne]

d) $x^3+5x^2-1=0, \quad ,(-1,1)$ [nelze to vyloučit]

Úloha 1.3.4 Metodou bisekce určete v daných intervalech řešení rovnice s přesností 0,005.

a) $x^3 - x - 1 = 0, \quad , \langle 1, 2\rangle$ [$1,325$]

b) $x^3 + 5x^2 - 1 = 0, \quad , \langle 0, 1\rangle$ [0.4258]

c) $x^4 + 5x^3 - 1 = 0, \quad , \langle 0, 1\rangle$ [0.5664]

Úloha 1.3.5 Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

a) $x^3 > x^2$ [$(1, \infty)$]

b) $x^3 + x^2 - 12x \geq 0$ [$\langle -4, 0\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$]

c) $(x + 1)(x - 3)^2 > 0$ [$(-1, 3) \cup (3, +\infty)$]

d) $\dfrac{4x - x^2}{x + 7} \geq 0$ [$(-7, 0\rangle \cup \langle 4, +\infty)$]

e) $\sqrt{x^2 + 8} > x + 2$ [$(-\infty, 1)$]

f) $x \cdot \log x < x$ [$(0, 10)$]

Kapitola 2

Derivace funkce

Vedle pojmu limity, o které již byla zmínka, patří mezi základní stavební prvky diferenciálního a integrálního počtu pojem *derivace*. Pomocí ní lze například elegantním způsobem vyšetřovat průběh funkce, hledat extrémní hodnoty, či okamžitou rychlost změny dané veličiny. Velký význam derivace oceníme také ve fyzice nebo geometrii. Diferenciální počet zavedli téměř současně anglický fyzik a matematik Isaac Newton a německý filosof a matematik Gottfried Wilhelm Leibniz.

Hlavním cílem této kapitoly bude zavést pojem derivace a s ním související používanou symboliku. Ukážeme zde pravidla a techniky výpočtu derivací počínaje elementárními funkcemi a konče derivací funkce složené. Ukážeme si dále praktický význam derivace a její nenahraditelnou funkci při řešení matematických a praktických problémů. Po prostudování kapitoly byste měli být schopni vypočítat derivaci každé elementární funkce.

2.1 Derivace funkce v bodě

Rychlost, tečna

K zavedení pojmu derivace vedly především úlohy typu *stanovit okamžitou rychlost* přímočarého pohybu hmotného bodu, či *napsat rovnici tečny ke grafu libovolné reálné funkce v daném bodě.*

Úloha o rychlosti

Naším úkolem je zjistit okamžitou rychlost auta. Předpokládejme pohyb auta po přímé dráze

$$s = f(t) \tag{2.1}$$

v závislosti na čase t (viz obrázek 2.3). Označme Δs přírůstek dráhy s za dobu Δt od okamžiku spuštění stopek t_0 do okamžiku $t_0 + \Delta t$. Potom

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0). \tag{2.2}$$

Obrázek 2.1: Isaac Newton

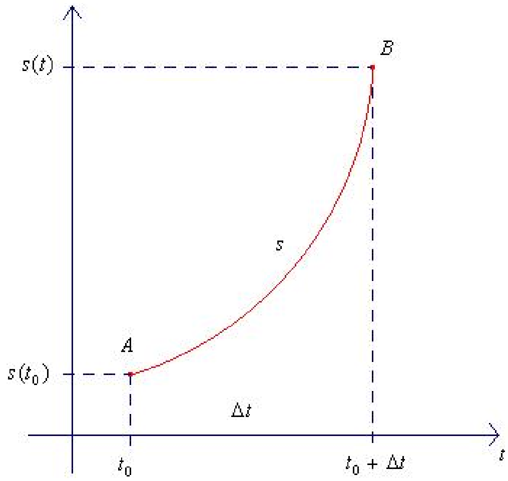
Obrázek 2.2: Gottfried Wilhelm Leibniz

Podíl

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \tag{2.3}$$

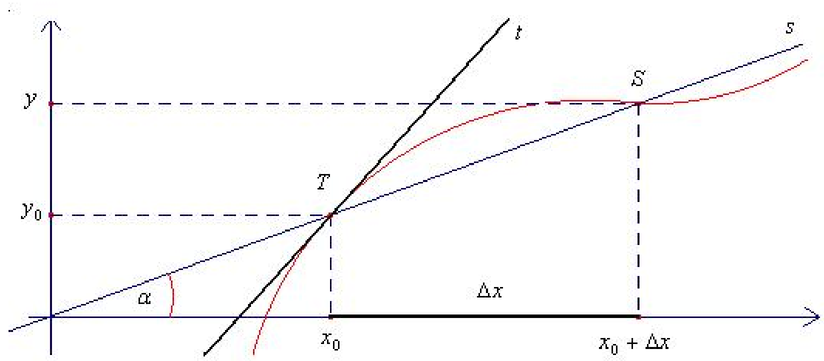
značí průměrnou rychlost pohybu auta v časovém úseku od t_0 do $t_0 + \Delta t$. Budeme-li dále neomezeně zmenšovat Δt až k 0, přejde průměrná rychlost v na okamžitou rychlost v_0. Je tedy

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}. \tag{2.4}$$



Obrázek 2.3: Graf funkce $s = s(t)$.

Poznámka 2.1.1. Předchozí úloha vedla na výpočet okamžité rychlosti. Nemusíme se ovšem omezovat pouze na pohyb bodu (auta). Rychlost můžeme chápat také jako tempo změny (růstu) obecně libovolné veličiny závislé na čase, takže můžeme sledovat například tempo růstu důchodů v ČR, rychlost růstu cen určité komodity či tempo klesání státního deficitu. Jestliže například $s = s(t)$ znamená počet obyvatel určité oblasti v čase t měřeném v rocích, pak rychlost růstu počtu obyvatel (nebo rychlost klesání, obecně míra změny) bude také určena předchozím způsobem a lze ji vyjádřit mírou nebo jednotkou analogickou k jednotce rychlosti pohybu nějakého objektu: počet obyvatel za rok, nebo obecněji počet obyvatel za časovou jednotku. Klíčem ke stanovení tempa změny bude určení strmosti stoupání nebo klesání grafu příslušné funkce; změříme to pomocí strmosti tečny ke grafu funkce, tudíž pomocí směrnice takové tečny. To bude obsahem našich dalších úvah.



Obrázek 2.4: Tečna ke grafu funkce.

Úloha o tečně

Máme za úkol najít rovnici tečny v bodě $T[x_0,\ f(x_0)]$ ke grafu spojité funkce $y = f(x)$ (viz obrázek 2.4).

Rovnici tečny jako rovnici přímky lze určit například ve směrnicovém tvaru pomocí bodu, u nás T, a její směrnicí $k_t = tg\,\alpha$. Nyní se nabízí otázka, jak takovou směrnici najít. Zvolme si na grafu funkce libovolný bod $S[x_0 + \Delta x,\ f(x_0 + \Delta x)]$ pro $\Delta x \neq 0$ poblíž bodu T $(S \neq T)$. Pak přímka TS je jistě sečnou grafu funkce, označme ji jako s, a její směrnici označme k_s; bude $k_s = tg\,\beta$.

Co by se stalo, kdybychom bod S stále přibližovali po grafu funkce k bodu T? Určitě by se měnila směrnice sečny, až by v limitním případě, kdy by vzdálenost Δx mezi body T a S byla libovolně malá, sečna by přecházela v tečnu t, a pro směrnici k_t této tečny bude $k_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_s$. (Oba body by prakticky splynuly v jeden a vytvořili bychom přímku, která má s daným grafem společný právě jeden bod, tedy tečnu.) V jazyce matematiky bude naše úvaha vypadat následovně:

$$k_t = \lim_{\Delta x \to 0} k_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2.5}$$

Pokud $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k_t$ existuje a je konečná, je úloha o určení tečny t ke grafu funkce $y = f(x)$ v daném bodě $T[x_0,\ f(x_0]$ vyřešena: hledaná rovnice tečny t ve směrnicovém tvaru je

$$t:\ y - f(x_0) = k_t \cdot (x - x_0). \tag{2.6}$$

Pokud porovnáme vztahy 2.4 a 2.5, zjistíme, že až na označení neznámých jsou naprosto totožné. Tedy po matematické stránce tyto dvě úlohy vedou na problém určení stejné limity a vzhledem k její důležitosti dostala tato limita speciální název *derivace funkce v bodě*. Velmi často se v jejím výpočtu využívá také substituce v limitě: klademe $x = x_0 + h$, tedy $h = x - x_0$ (neboli přírůstek Δx pro x bude nyní označen jako h). Pak vztah pro směrnici tečny dostává tvar:

$$k_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{2.7}$$

A nyní již můžeme přistoupit k definici derivace funkce v bodě.

Definice 2.1.1. Říkáme, že *funkce má v bodě $x_0 \in D(f)$ derivaci*, je-li definovaná v okolí bodu x_0 a existuje-li limita $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Tuto limitu nazýváme *derivací funkce f v bodě* x_0 a značíme ji $f'(x_0)$ nebo

$\frac{dy}{dx}$ (označení zavedené G.W.Leibnizem, jehož výhodu si vysvětlíme později). Proto

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{2.8}$$

Poznámka 2.1.2. Definice tedy připouští také nevlastní limity. Pokud určujeme rovnici tečny grafu dané funkce v daném bodě, musíme se na základě definice směrnice přímky omezit na konečnou limitu.

Výpočet derivace funkce pomocí definice

Příklad 2.1.1. Pomocí definice najděme derivaci funkce $f : f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

***Řešení:* 2.1.1.** Počítáme podle definice:

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 3^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(6 + h)}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6. \clubsuit$$

Poznamenejme, že operace krácení nebo dělení zlomku $\frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h}$ reálným číslem h neznamená dělení nulou, což by byl nepřípustný krok: toto dělení vystupuje pod znakem limity $\lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h}$ a o čísle h se na základě definice limity předpokládá (viz kapitolu o limitách funkcí), že se sice neomezeně přibližuje k nule, nicméně pokaždé je různé od nuly: $h \neq 0$. Proto lze korektně psát

$$\lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h).$$

Tuto argumentaci "o krácení v limitě"uvedenou v kapitole o limitách lze uplatnit také v jiných příkladech.

Výpočet derivace funkce pomocí definice

Příklad 2.1.2. Pomocí definice najděme derivaci funkce $f : f(x) = \sqrt{x}$ v bodě $x \in D(f)$.

***Řešení:* 2.1.2.** Počítáme podle definice:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}};$$

čitatele a také jmenovatele zlomku jsme násobili stejným číslem, vztah rovnosti zůstává v platnosti; v čitateli pokračujeme roznásobením neboli úpravou na rozdíl čtverců. Po zrušení x a krácení h máme:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h \cdot (\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \clubsuit$$

Výpočet derivace funkce pomocí definice

Příklad 2.1.3. Pomocí definice najděme derivaci funkce $f : f(x) = e^x$ v bodě x_0.

***Řešení:* 2.1.3.** Počítejme podle definice:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(e)^{x_0 + h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0} e^h - e^{x_0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}.$$

♣

Poznámka 2.1.3. V posledním kroku jsme využili znalosti speciální limity $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

🕮 Geometrická interpretace derivace funkce v bodě

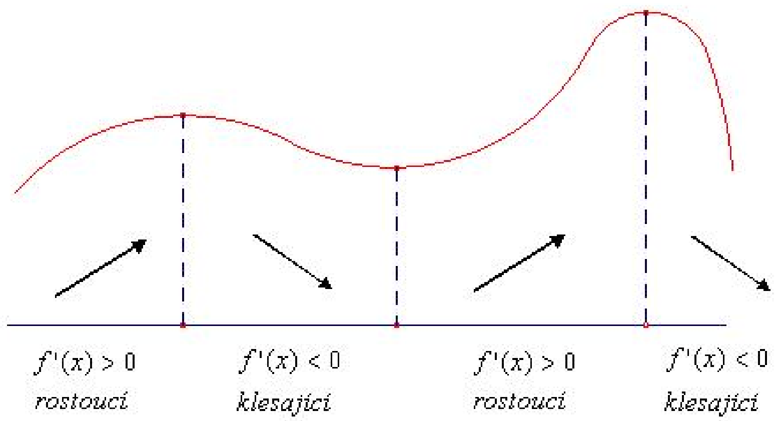
Na začátku kapitoly jsme hledali tečnu ke grafu funkce určené předpisem $y = f(x)$ v bodě $T[x_0, y_0]$ a dospěli jsme k závěru, že pro směrnici tečny platí vztah 2.7, což je zároveň definice derivace funkce v bodě. Zopakujme, že lze tedy psát $k_t = f'(x_0)$ a konečně pro rovnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[x_0,\, y_0]$ platí:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{2.9}$$

Z předchozích úvah plyne ještě jeden velmi důležitý poznatek. Jelikož derivace funkce v bodě je rovna směrnici tečny v tomto bodě, můžeme říci, že pokud je směrnice kladná, resp. záporná, je tečna v tomto bodě rostoucí, resp. klesající přímka (vždy se díváme zleva doprava) (obrázek 2.5).

Bod dotyku je současně bodem grafu funkce, takže můžeme naši úvahu shrnout do následující věty.

Věta 2.1.1. *Má-li funkce f v každém bodě intervalu (a, b) kladnou, resp. zápornou derivaci, je v tomto intervalu rostoucí, resp. klesající.*



Obrázek 2.5: Význam znaménka první derivace.

Po nastudování předchozích odstavců tedy teoreticky umíme najít tečnu ke grafu funkce v libovolném bodě. (Samozřejmě musí v tomto bodě existovat vlastní neboli konečná limita.) Dále umíme rozpoznat, ve kterých intervalech definičního oboru funkce klesá či roste. Zvládnutí rozpoznání takových vlastností funkcí je nezbytné pro úspěšné zvládnutí problému vyšetřit průběh funkce, což je stěžejní úloha diferenciálního počtu. Zbývá tedy převést teorii do praxe a vyzkoušet si řešení konkrétních úloh. Zatím umíme derivovat použitím definice derivace. Ponechme proto ukázkové příklady až na dobu, kdy nám derivace libovolné funkce nebude dělat problémy.

2.2 Derivace funkce na množině

Derivace jako nová funkce

Nechť je funkce f definována na množině $M \subset \mathbb{R}$. Označme M_1, $M_1 \subset M$ jako množinu všech čísel, v nichž má tato funkce derivaci, a předpokládejme $M_1 \neq \emptyset$. Potom můžeme na množině M_1 definovat funkci $g : M_1 \to \mathbb{R}$ vztahem $g(x) = f'(x)$ pro $x \in \mathrm{M}_1$.

Poznámka 2.2.1. Předchozí úvaha znamená, že z definičního oboru funkce f vybereme jen ty hodnoty x (a vytvoříme z nich množinu M_1), ve kterých existuje limita definující derivaci funkce v bodě x. Množina M_1 se tak stane definičním oborem nové *funkce* $g(x)$. Například funkce $f : y = |x|$ s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$ nemá derivaci v bodě $x = 0$. Proto lze uvažovat o množině M_1, na které naopak existuje derivace funkce absolutní hodnota, jako $M_1 = \mathbb{R} - \{0\}$.

Funkci $g(x)$ pak nazveme *derivací funkce f na množině M_1* a značíme ji jako f' nebo $\dfrac{df}{dx}$.

Poznámka 2.2.2. Derivace funkce v bodě je tedy číslo, ale derivace funkce na množině je opět funkce. Její hodnoty jsou tvořeny jednotlivými hodnotami derivace původní funkce pro $x \in M_1$.

Poznámka 2.2.3. Uvědomme si, že derivace funkce v bodě je definována jako limita a tedy jako limita má všechny vlastnosti plynoucí z této definice; uvedli jsme je v předchozích kapitolách. Musí existovat také souvislost mezi existencí derivace funkce v bodě a spojitostí funkce v tomto bodě. Jde o analogickou souvislost, kterou jsme se zabývali u spojitosti funkce v bodě a existencí její limity v tomto bodě, ale derivace je také limita, proto tato otázka je na místě. Uveďme bez důkazu tvrzení:

Věta 2.2.1. *Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v tomto bodě spojitá.*

Doposud jsme ukázali výpočet derivace funkce pomocí definice. Tabulka 2.1 uvádí vzorce pro derivace některých elementárních funkcí; tyto vzorce lze také odvodit na základě definice derivace jako limity.

Základní pravidla pro počítání derivací uvedeme formou věty. Důkazy jsou založeny na vlastnostech limit.

Věta 2.2.2. *Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají v bodě x_0 derivaci, má v bodě x_0 derivaci i součet, rozdíl a součin funkcí $u(x)$, $v(x)$ a pro $v(x) \neq 0$ i podíl $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ a platí:*

$$\begin{array}{ll} \textit{derivace součtu:} & (u+v)' = u' + v' \\ \textit{derivace rozdílu:} & (u-v)' = u' - v' \\ \textit{derivace součinu:} & (uv)' = u'v + uv' \\ \textit{derivace podílu} & \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \\ \textit{derivace speciálního podílu:} & \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2} \end{array} \tag{2.10}$$

Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu elementárních funkcí

Příklad 2.2.1. Následují ukázkové příklady: určeme derivaci funkce y v libovolném bodě jejího definičního oboru:

1. $y = 0,5x^2 - 5x + 6$ 2. $y = x^4 - x^2 + 1$ 3. $y = 6x^3 \cos x$
4. $y = x \ln x$ 5. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ 6. $y = x^2 - \dfrac{1}{x^3}$

***Řešení:* 2.2.1.** 1. Použijeme pravidla z tabulky a pravidla pro derivace součtu (rozdílu), násobku. $y' = 0,5(2x^{2-1}) - 5(1) + 0 = x - 5.$

Funkce f	*Derivace f′*	*Podmínky platnosti*
c	0	$x \in (-\infty, \infty)$
x	1	$x \in (-\infty, \infty)$
x^n	nx^{n-1}	$x \in (-\infty, \infty),\, n \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
e^x	e^x	$x \in (-\infty, \infty)$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in (-\infty, \infty), a > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \in (0, \infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x \in (0, \infty), a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \pi/2 + k\pi, k \in Z$
$\mathrm{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in Z$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$x \in (-1, 1)$
arctg x	$\frac{1}{(1+x^2)}$	$x \in (-\infty, \infty)$

Tabulka 2.1: Derivace elementárních funkcí

2. $y' = 4x^{4-1} - 2x^{2-1} + 0 = 4x^3 - 2x$.

3. Tato funkce je součinem dvou elementárních funkcí $u = 6x^3$ a $v = \cos x$, proto využijeme vztahu pro derivaci součinu $(uv)'$. Abychom mohli dosadit do příslušného vztahu, vypočteme si nejprve u' a v'. Máme $u' = 18x^2$, $v' = -\sin x$ a po dosazení dostáváme:

$$y' = (uv)' = u'v + uv' = 18x^2 \cos x + 6x^3(-\sin x).$$

4. Obdobně jako v předchozím příkladě použijeme vztah pro derivaci součinu, kde $u = x$, $v = \ln x$, $u' = 1$ a $v' = \frac{1}{x}$. Pak $y' = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$.

5. Již zadání příkladu napovídá, že se jedná o zlomek, musíme tedy použít vztahu pro derivaci podílu. Opět si označíme: čitatel $u = x^2$, $v = x - 1$. Pak budeme mít $u' = 2x$, $v' = 1$ a $v^2 = (x-1)^2$. Po dosazení dostaneme:

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x(x-1)) - (x^2 \cdot 1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

6. Funkce v zadání je nyní součtem dvou členů, z nichž jeden je zlomek. Budeme derivovat součet, v něm na druhý aplikujeme vztah pro derivaci zlomku. Tedy:

$$y' = 2x - \frac{(0 \cdot x^3) - (1 \cdot 3x^2)}{x^6} = 2x - \frac{-3x^2}{x^6} = 2x + \frac{3}{x^4} \cdot \clubsuit$$

Derivace složené funkce

V praktických úlohách se samozřejmě nesetkáváme pouze s elementárními funkcemi, nýbrž se zde objevuje složitější argument, či několik funkcí složených do sebe. Existují další pravidla pro derivace funkcí utvořených právě tímto způsobem; uvádí je následující věta.

Věta 2.2.3. *Jestliže funkce $z = g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a jestliže funkce $y = f(z)$ má derivaci v bodě $z_0 = g(x_0)$, má složená funkce $y = f(g(x))$ derivaci v bodě x_0 a platí*

$$(f(g(x)))'_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \tag{2.11}$$

Poznámka 2.2.4. Možná, že předchozí tvrzení způsobí najednou zmatek. Víme však, že každá složená funkce je vytvořena pomocí několika funkcí, které jsou vloženy postupně jedna do další - složenou funkci tedy tvoří konečný řetězec funkcí začínající vnitřní funkcí až po tu poslední, vnější funkci. Z této struktury složené funkce vyplývá postup při jejím derivování, který je obsahem tvrzení předchozí věty: nejprve vezmeme vnější funkci, tu derivujeme jako funkci jednoduchého argumentu, a pak pokračujeme násobením derivací vnitřní funkce. Někdy se tomuto pravidlu derivování složené funkce říká také *řetězové pravidlo*. Věta uvádí tedy jeho princip pro derivování složené funkce tvaru $f(g(x))$, ale z tohoto principu lze snadno nahlédnout zobecnění i pro více vložených funkcí: vždy postupujeme od vnější funkce, tu derivujeme tak, jako by byla jednoduchého argumentu; pak postupujeme dovnitř a derivujeme další funkce, až se dostaneme k poslední, vnitřní funkci, která již není složená; jednotlivé derivace vynásobíme. Derivaci složené funkce si můžeme představit jako loupání cibule. Nejprve sloupneme první vrstvu, pak druhou, třetí a tak dále až se dostaneme k samému středu nebo jádru.

Uvedeme ještě příklad, který vysvětlí, proč je řetězové pravidlo právě tvaru součinu derivací jednotlivých složek složené funkce.

Předpokládejme, že poptávka $D(p)$ po určitém zboží závisí na jeho ceně p a že tato cena p závisí na čase - jak je obvyklé, cena se s časem mění a obvykle roste v čase: lze psát $p = p(t)$ neboli cena zboží je funkcí času. Proto celkově - prostřednictvím závislosti $p = p(t)$ - poptávka závisí až na čase jako složená funkce: $D = D(t) = D(p(t))$. Předpokládejme nyní například, že jednotková cena našeho zboží vzroste za jednotku času 1,2-násobně a že poptávka na takovou změnu v jednotkové ceně zboží reaguje 80 procentním poklesem prodeje zboží (ve vhodných jednotkách: balení, kusech a pod.) K jaké změně - poklesu poptávky za časovou jednotku tedy dochází: uvedené změny se násobí, tj. poptávka klesne mírou, která je součinem $1,2 \cdot 0,8 = 0,96$ neboli má hodnotu 96 procent velikosti původní poptávky.

Nyní si ukažme příklad.

Výpočet derivace složené funkce

Příklad 2.2.2. Vypočteme derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

1. $y = (x^5 + x^3 + 1)^6$
2. $y = sin^2(x^2 + 3)$
3. $y = \frac{4}{(1-x)^2}$

***Řešení:* 2.2.2.** 1. U první funkce vidíme okamžitě podle závorek, že jsou do sebe vloženy pouze dvě funkce. Vnější funkce je šestá mocnina argumentu v závorce, vnitřní funkce pak přímo ta funkce v závorce, kterou si můžeme označit třeba $z = z(x) = x^5 + x^3 + 1$.

V kapitole 2.1 jsme zavedli označení derivace užívané Leibnizem, nyní si vysvětlíme jeho výhody. V prvé řadě je ze zlomku $\dfrac{dy}{dx}$ okamžitě vidět, jak derivace vznikla, tedy derivovali jsme y podle nezávislé proměnné x. Druhou výhodu zápisu zlomkem využíváme při derivaci složených funkcí. V tomto příkladě jsme použili vyjádření $y = y(z) = y(z(x))$, hledáme tedy derivaci y podle x:

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

ale y je funkcí z. Pokud bereme $\frac{dy}{dx}$ jako "klasický"zlomek, můžeme jej rozšířit o naše dz:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Leibnizovo praktické označení nám dává návod, jak počítat derivace složené funkce, a je v něm obsaženo i to označení jako "řetězové pravidlo". V našem případě má funkce tvar $y = z^6$; derivaci pak můžeme vyjádřit následovně:

$$y' = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 6z^5 \cdot (5x^4 + 3x^2 + 0) = 6(x^5 + x^3 + 1)^5(5x^4 + 3x^2 + 0).$$

2. Druhá funkce je poněkud složitější, pro lepší zjištění struktury složené funkce je někdy vhodné předpis funkce přezávorkovat: $(\sin(x^2+3))^2$. Tato funkce je složená ze tří funkcí; z druhé mocniny ($y = (z)^2$), z goniometrické funkce sinus ($z = \sin t$) a kvadratické funkce ($t = x^2 + 3$), a to v tomto uvedeném pořadí od vnější k vnitřní. Její derivace je proto:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2z \cdot \cos t \cdot (2x) = 2\sin(x^2+3) \cdot \cos(x^2+3) \cdot 2x = 2x \cdot \sin(2x^2+6).$$

3. Na první pohled není tento příklad typickou úlohou na derivaci složené funkce. V odstavci věnovaném derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí jsme derivaci počítali podle vzorce pro derivaci podílu. Dále jsme se zmínili, že pokud je v čitateli zlomku pouze konstanta, lze derivaci počítat jednodušším způsobem. Tedy: $y = \frac{4}{(1-x)^2} = 4(1-x)^{-2}$, což je tvar složené funkce a její derivace je:

$$y' = 4(-2)(1-x)^{-3} \cdot (-1) = 8(1-x)^{-3} = \frac{8}{(1-x)^3} \cdot \clubsuit$$

V závěru kapitoly 2.1 jsme diskutovali problém vyjádření tečny grafu funkce v libovolném bodě T a s ním spojené vyhledávání intervalů, kde funkce roste či klesá. Určit vlastnost funkce "je rostoucí", "je klesající"můžeme obecněji nahradit slovy "*vyšetřete monotonii funkce*".

Nyní ukážeme řešení praktických úloh, v nichž je úkolem najít tečnu, případně vyšetřit monotonii funkce.

Úlohy o tečnách 1

Příklad 2.2.3. Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[x_0,\, y_0]$.

1. $y = x^2 - 2x,\ \ T[4,\ ?]$
2. $y = 2\cos x,\ \ T[0,\ ?]$

***Řešení:* 2.2.3.** 1. Podle vztahu 2.9 pro rovnici tečny t grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[x_0,\, y_0]$ máme

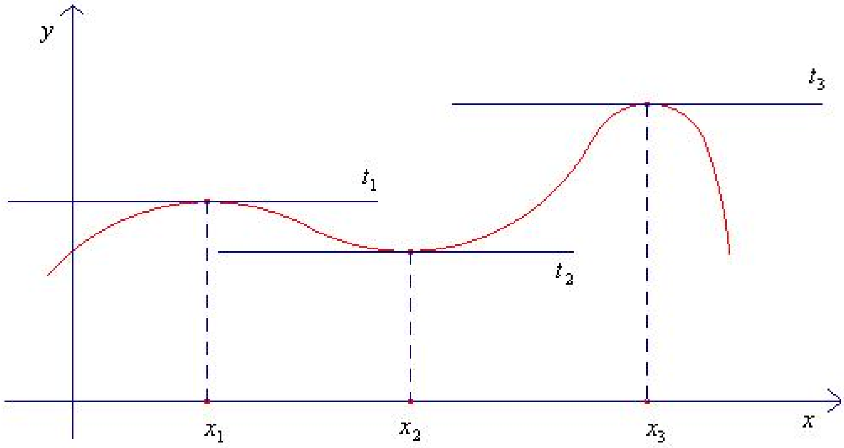
$$t:\ y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Proto je pro nalezení rovnice tečny nutná znalost směrnice $k_t = f'(x_0)$ a bodu dotyku $T[x_0,\, y_0]$. V zadání je ovšem uvedena pouze x-ová souřadnice bodu dotyku T, je proto nutné nejprve najít y-ovou souřadnici, což není nic jiného, než určit funkční hodnotu funkce f pro $x_0 = 4$. Tedy

$$y_0 = f(x_0) = f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$$

a pro směrnici k_t platí

$$k_t = f'(x_0) = (2x - 2)_{x=4} = 6.$$



Obrázek 2.6: Ilustrativní obrázek tečny v bodě, pro který platí $f'(x_1) = 0$.

Po dosazení do vztahu 2.9 dostáváme rovnici tečny

$$t : y - 8 = 6 \cdot (x - 4) \text{ neboli } t : y = 6x - 16.$$

2. Ukažme si nyní na tomto příkladu vlastnost, která bude pro další úvahy naprosto nezbytná. Opět budeme hledat tečnu ke grafu funce. Obdobně jako v minulé úloze nejprve dopočítáme y-ovou souřadnici bodu dotyku a poté pomocí derivace i směrnici tečny v tomto bodě:

$$y_0 = f(0) = \cos 0 = 1, \quad \text{proto } k_t = (\cos x)'_{x=0} = -\sin 0 = 0.$$

Po dosazení do vztahu (1.8) získáme rovnici tečny:

$$y - 1 = 0 \cdot (x - 0) \text{ neboli } y = 1. \clubsuit$$

Tečna je tedy přímka rovnoběžná s osou o_x a prochází bodem $[0,\ 1]$. Pro ilustraci uvádíme obecný obrázek 2.6 takové situace.

Zjistili jsme jednu zajímavou skutečnost: pokud derivace v bodě dotyku je rovna 0, pak je tečna rovnoběžná s osou o_x a graf funkce v tomto bodě může, ale nemusí dosahovat své maximální resp. minimální hodnoty (svého extrému). Jinými slovy řečeno pokud je derivace funkce v bodě T nenulová, funkce zde nemůže dosáhnout maximální resp. minimální hodnoty. Tato úvaha nám přinesla nový poznatek; známe nyní *nutnou podmínku pro existenci extrému funkce*: je to podmínka

$$f'(x_0) = 0 \tag{2.12}$$

Poznámka 2.2.5. Jde pouze o *nutnou, nikoliv postačující podmínku.* Co to znamená: např. funkce $y = x^3$ nemá v bodě $T[0,\ 0]$ extrém a přitom je její derivace v bodě $x = 0$ nulová. Využití získaného poznatku uvidíme v další kapitole (Optimalizace).

V mnoha praktických úlohách se setkáváme s jiným typem úloh, kde hledáme rovnici tečny ke grafu funkce, ale neznáme ani jednu souřadnici dotykového bodu. Máme ale jiné informace; například víme, že daná tečna má

- mít směrnici rovnu konkrétní hodnotě,

- s osou o_x svírat daný úhel α,
- být rovnoběžná se zadanou přímkou p,
- být kolmá na zadanou přímkou p.

Ukažme si na příkladech, jak řešit výše zmíněné úlohy.

Úlohy o tečnách 2

Příklad 2.2.4. Je dána funkce $f : y = 2x^2 + x - 1$. Na grafu funkce $y = f(x)$ určeme bod $T[x_0, y_0]$ tak, aby:

1. tečna v bodě T měla směrnici $k_t = 5$;
2. tečna v bodě T měla směrový úhel $\alpha = 60^0$;
3. tečna v bodě T byla rovnoběžná s přímkou $p : y - x - 10 = 0$;
4. tečna v bodě T byla kolmá k přímce $p : y = 1 - 3x$.

Řešení: **2.2.4.** Hlavní myšlenkou postupů řešení těchto úloh zůstává: potřebujeme najít směrnici tečny ke grafu funkce a ta je rovna derivaci funkce v bodě.

1. Pokud má mít tečna směrnici $k_t = 5$, lze její směrnici najít jako derivaci funkce v bodě dotyku, tedy
$$f'(x) = (2x^2 + x - 1)' = 4x + 1 = 5.$$
Odtud $x_0 = 1$. Nyní již víme, že x-ová souřadnice bodu dotyku je rovna 1 a stačí pouze dohledat y-ovou souřadnici jako funkční hodnotu $y_0 = f(1) = 2$.
Konečně hledaný bod je $T[1, 2]$.

2. Pokud si uvědomíme, že pro směrnici k přímky ve směrnicovém tvaru $y = k \cdot x + q$, tedy i pro tečnu, platí $k = tg\,\alpha$, můžeme zadání přeformulovat: hledáme bod T tak, aby tečna procházející tímto bodem měla směrnici $k_t = tg\ 60^0 = \sqrt{3}$. Takový příklad jsme již před chvílí řešili.
Má být
$$f'(x) = 4x + 1 = \sqrt{3},\ \text{odkud}\ x_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{4},\ y_0 = -\frac{3}{4}.$$
Hledaným bodem je $T\left[\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{3}{4}\right]$.

3. Nutnou a postačující podmínkou rovnoběžnosti dvou přímek je rovnost jejich směrnic. Pro větší přehlednost převedeme obecný tvar přímky p na směrnicový tvar $p : y = x + 10$ a máme $k_p = 1$. Opět tedy řešíme stejnou úlohu:
$$f'(x) = (2x^2 + x - 1)' = 4x + 1 = 1,\ \text{odkud}\ x_0 = 0,\ y_0 = f(0) = 1.$$
Bodem dotyku je $T[0, 1]$.

4. Nutnou a postačující podmínkou kolmosti dvou přímek t, p je:
$$t \perp p \ \ \text{tehdy a jen tehdy, jestliže}\ \ k_t \cdot k_p = -1$$
(symbolem $t \perp p$ se zapisuje kolmost přímek t, p). V našem případě je $k_p = -3$ a podle předchozího vztahu musí být pro směrnici tečny kolmé na přímku p splněno $k_t = \dfrac{1}{3}$. Odtud plyne:
$$f'(x) = (2x^2 + x - 1)' = 4x + 1 = \frac{1}{3},\ \text{proto}\ x_0 = -\frac{1}{6},\ y_0 = f(0) = -\frac{10}{9}.$$
Hledaným bodem je $T\left[-\frac{1}{6}, -\frac{10}{9}\right]$. ♣

Monotonie

Příklad 2.2.5. Užitím derivace funkce $y = f(x)$ určeme intervaly, ve kterých je daná funkce rostoucí, resp. klesající:

1. $y = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$

2. $y = x + \dfrac{1}{x}$

***Řešení:* 2.2.5.** Připomeňme, že funkce je rostoucí, resp. klesající v bodě právě tehdy, když je derivace v tomto bodě kladná, resp. záporná. Tedy body, v nichž derivace mění znaménko, pro nás budou důležité. Aby se tak stalo, musí hodnota derivace funkce v bodě **"přejít přes nulu"**. Protože jde o významnou množinu bodů, získala speciální název. Body, v nichž $f'(x) = 0$, nazýváme *stacionární (také kritické) body*. Samozřejmě musíme vzít v úvahu i body, které nejsou v definičním oboru funkce f a f', neboť v nich nelze vyloučit změnu monotonie funkce.

1. Kvůli určení stacionárních bodů vypočítejme derivaci funkce a položme ji rovnou nule: máme

$$f'(x) = (2x^3 - x^2 - 8x + 4)' = 6x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Vyřešením kvadratické rovnice získáme dvě hodnoty $x_1 = -1,\ x_2 = \dfrac{4}{3}$. Definičním oborem dané funkce jsou všechna reálná čísla, proto zůstávají oba body podezřelé ze změny monotonie. Celý definiční obor $D(f)$ můžeme rozdělit na tři intervaly:

$$(-\infty,\,-1); \qquad \left(-1,\,\frac{4}{3}\right); \qquad \left(\frac{4}{3},\,\infty\right).$$

V jednotlivých intervalech se již znaménko první derivace nemění, proto v nich funkce stále roste nebo klesá. Postačí vybrat libovolnou hodnotu x z každého intervalu a podle znaménka první derivace v x rozhodnout, zda tam funkce roste či klesá. V prvním intervalu zvolíme například $x = -2 \Longrightarrow f'(-2) = 20 > 0$, tedy na intervalu $(-\infty,\,-1)$ funkce roste. Z druhého intervalu vybereme hodnotu $x = 0 \Longrightarrow f'(0) = -8 < 0$, funkce je na intervalu $\left(-1,\,\frac{4}{3}\right)$ klesající. Konečně pro třetí interval zvolme $x = 2 \Longrightarrow f'(2) = 12 > 0$, proto funkce je na intervalu $\left(\frac{4}{3},\,\infty\right)$ opět rostoucí.

2. Teď bez slovního doprovodu.

$$y' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Derivace není definovaná v bodě $x_1 = 0$. Po úpravě rovnice získáme stacionární body

$$x_2 = 1,\ \ x_3 = -1.$$

Pokud je bodů více, bývá vhodné nakreslit si reálnou osu a jednotlivé hodnoty zapsat ve správném pořadí (od nejmenší k největší, zleva doprava) a znaménko derivace funkce v bodě z každého takto vzniklého intervalu naznačit rostoucí či klesající šipkou jako na obrázku 2.5. Daná funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty,\,-1)$, $(1,\,\infty)$ a klesající na intervalech $(-1,\,0)$, $(0,\,1)$. ♣

❓ Úlohy

Úloha 2.2.6 Užitím definice derivace vypočtěte derivaci funkce v daném bodě x_0.

a) $f(x) = 2x^2 - x + 5,\ x_0 = 3$ [11]

b) $f(x) = x^2 - 4x,\ x_0 = 1$ [-2]

c) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0$ [1]

d) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 4$ [$-\frac{1}{16}$]

e) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1$ [$\frac{1}{2}$]

Úloha 2.2.7 Najděte derivaci funkce v libovolném bodě definičního oboru.

a) $y = 4x^2 - x + 1$ [$y' = 8x - 1$]

b) $y = 2\sin x + 3\cos x$ [$y' = 2\cos x - 3\sin x$]

c) $y = \sqrt{x} + x^{-2}$ [$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x^{-3}$]

d) $y = 6\sqrt[3]{x} - 5$ [$y' = 2\sqrt[3]{x^{-2}}$]

e) $y = 3\ln x - 9\log x$ [$y' = \frac{3}{x} - \frac{9}{x\ln 10}$]

f) $y = \tan x + 11\mathrm{cotg} x$ [$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{11}{sin^2 x}$]

g) $y = 3^x + 2e^x$ [$y' = 3^x \cdot \ln 3 + 2e^x$]

Úloha 2.2.8 Najděte derivaci funkce v libovolném bodě definičního oboru. (Nejprve upravte předpis funkce, pak teprve derivujte.)

a) $y = \frac{(x^2+2)^2}{4}$ [$y' = x^3 + 2x$]

b) $y = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt[3]{x} - 5\sqrt{x})}{x}$ [$y' = -\frac{1}{6 \cdot \sqrt[6]{x^7}}$]

c) $y = \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$ [$y' = -\sin x + \cos x$]

d) $y = \frac{\sin 2x + 1}{\sin x + \cos x}$ [$y' = -\sin x + \cos x$]

Úloha 2.2.9 Derivujte funkce podle pravidel pro derivaci součinu a podílu.

a) $y = x \cdot \sin x$ [$y' = \sin x + x\cos x$]

b) $y = (x^2 + 1) \cdot \sin x$ [$y' = 2x \cdot \sin x + (x^2+1) \cdot \cos x$]

c) $y = \sin x \cdot \cos x$ [$y' = \cos 2x$]

d) $y = e^x \cdot \ln x$ [$y' = e^x \cdot \ln x + \dfrac{e^x}{x}$]

e) $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$ [$y' = \dfrac{7}{(x+3)^2}$]

f) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ [$y' = \dfrac{-2}{1-\sin 2x}$]

g) $y = \dfrac{x^2+2x}{1-x^3}$ [$y' = \dfrac{x^4+4x^3+2x+2}{(1-x^3)^2}$]

h) $y = \dfrac{e^x \cdot \ln x}{x+1}$ [$y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} \cdot (e^x \cdot x \cdot \ln x + e^x + \dfrac{e^x}{x})$]

Úloha 2.2.10 Vypočítejte derivace složených funkcí.

a) $y = (x^2+1)^2$ [$y' = 4x \cdot (x^2+1)$]

b) $y = (\sqrt{2x^3-1}+2)^8$ [$y' = \dfrac{24x^2 \cdot (\sqrt{2x^3-1}+2)^7}{\sqrt{2x^3-1}}$]

c) $y = \cos(2x+4)$ [$y' = -2\sin(2x+1)$]

d) $y = \sqrt{\cos 2x}$ [$y' = -\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$]

e) $y = \dfrac{1}{\cos 2x}$ [$y' = \dfrac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$]

f) $y = \sin^2 x$ [$y' = \sin 2x$]

g) $y = \sin x^2$ [$y' = 2x \cdot \cos x^2$]

h) $y = \sqrt[3]{\cos 2x + 2x}$ [$y' = \dfrac{2-2\sin 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(\cos 2x + 2x)^2}}$]

i) $y = \tan(3x - \dfrac{\pi}{4})$ [$y' = \dfrac{3}{\cos^2(3x-\dfrac{\pi}{4})}$]

j) $y = \ln \sin x$ [$y' = \mathrm{cotg} x$]

k) $y = \sqrt{x+\sqrt{5x}}$ [$y' = \dfrac{2\cdot\sqrt{5x}+5}{4\cdot\sqrt{5x^2+5x\cdot\sqrt{5x}}}$]

l) $y = \ln(3\sin x - 8)$ [$y' = \dfrac{3\cos x}{3\sin x - 8}$]

m)$y = e^{\sin x}$ [$y' = e^{\sin x} \cdot \cos x$]

Úloha 2.2.11 Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě T.

a) $y = 2x^4 + 8x,\ T[-1,\ ?]$ [$t : y = -6$]

b) $y = 2\sin x,\ T[0,\,?]$ $[t : y = 2x\,]$

c) $y = \dfrac{1+x^3}{x-1},\ T[2,\,?]$ $[t : y = 3x+3\,]$

Úloha 2.2.12 Je dána funkce $y = x \cdot \ln x$. Určete bod T grafu funkce tak, aby:

a) tečna v bodě T měla směrnici $k_t = 1$; $[T[1,\,0]\,]$

b) tečna v bodě T byla rovnoběžná s přímkou $p : y = 2x + 3$; $[T[e,\,e]\,]$

c) tečna v bodě T svírala s osou o_x úhel $\alpha = 135^o$; $[T[e^{-2},\,-2e^{-2}]\,]$

d) tečna v bodě T byla kolmá k přímce $r : y = 6 - 2x$. $[T[\frac{1}{\sqrt{e}},\,-\frac{1}{2\sqrt{e}}]\,]$

2.3 Monotonie a extrémy

V předchozích odstavcích jsme se postupně setkávali s pojmy **stacionární bod, monotonie** a **lokální extrém**. Přistupovali jsme k nim tak, aby byly čtenáři především srozumitelné a mnohdy se stalo, že korektní zápisy a definice byly zatlačeny do pozadí. Vzhledem k důležitosti předchozího textu pro následující kapitoly, si nabyté poznatky nyní shrneme a doplníme (již naprosto korektním způsobem). Připravíme si tak veškeré nástroje potřebné k řešení stěžejního problému učiva tohoto semestru - pro vyšetřování průběhu funkce.

Definice 2.3.1. Bod x_0 nazýváme **stacionárním bodem funkce** f, existuje-li $f'(x_0)$ a je-li $f'(x_0) = 0$.

Definice 2.3.2. Říkáme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *rostoucí* v bodě $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když existuje $P(a) \subset D(f)$ takové, že

$$\forall x \in P^-(a) : f(x) < f(a) \text{a} \forall x \in P^+(a) : f(x) > f(a).$$

Obdobně můžeme definovat pojmy *klesající, neklesající a nerostoucí*.

Poznámka 2.3.1. $P^-(a)$, resp. $P^-(a)$ značí levé, resp. pravé prstencové okolí bodu a.

Definice 2.3.3. Říkáme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$

1. *ostré lokální maximum* právě tehdy, když existuje $P(a) \subset D(f)$ takové, že $\forall x \in P(a) : f(x) < f(a)$
2. *ostré lokální minimum* právě tehdy, když existuje $P(a) \subset D(f)$ takové, že $\forall x \in P(a) : f(x) > f(a)$

Pokud zaměníme ostré nerovnosti za neostré, dostaneme definici pro *lokální maximum*, resp. *lokální minimum*. Obecně mluvíme o *lokálních extrémech*.

Máme tedy zadefinovány nejdůležitější pojmy a nyní si uvedeme několik vět, které nám pomohou jednoduše zjišťovat, na kterých intervalech je funkce rostoucí (klesající), resp. jak dohledat lokální extrémy těchto funkcí.

Věta 2.3.1. ***(Postačující podmínka pro lokální monotonii)*** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f'(a) \in \mathbb{R}^*$. Pak*

1. *je-li $f'(a) > 0$, je f v a rostoucí,*
2. *je-li $f'(a) < 0$, je f v a klesající.*

Věta 2.3.2. ***(Nutná podmínka pro lokální extrém - věta Fermatova)*** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f'(a) \in \mathbb{R}^*$. Má-li funkce f v bodě a extrém, pak $f'(a) = 0$.*

Předchozí tvrzení nám sice zajišťuje podmínku, za které by mohl nastat v bodě extrém, nic nám však neříká, zda tam opravdu nastane. Je dobré si uvědomit směr předchozích dvou tvrzení (implikací):

$$\text{kladná (záporná) derivace v bodě} \Rightarrow \text{funkce v bodě roste (klesá)}$$

$$\text{extrém v bodě} \Rightarrow \text{nulová derivace v bodě.}$$

Obráceně to neplatí, což si ukážeme na příkladě. Uvažujme funkci

$$f : y = x^3, x \in \mathbb{R}$$

v bodě $x = 0$. Derivace $f'(x) = 3x^2$ a tedy $f'(0) = 0$, přitom v libovolném levém okolí nuly platí: $\forall x \in P^-(0) : f(x) < f(0)$ a v libovolném pravém okolí nuly platí: $\forall x \in P^+(0) : f(x) > f(0)$. Tedy v bodě $x = 0$ není extrém, přestože $f'(0) = 0$ a navíc je tam rostoucí, i když neplatí $f'(0) > 0$. Dále by nás mohla zneklidnit informace, že extrému může nabýt funkce v bodě, v němž derivace vůbec neexistuje. Pro ilustraci nemusíme chodit daleko. Velmi známá funkce $f : y = |x|$ naše obavy splňuje. Tato funkce nemá v bodě $x = 0$ derivaci, má zde pouze jednostranné derivace (jednostranné limity) $f'_- = -1$ a $f'_+ = 1$. Přitom víme, že má v tomto bodě minimum ($\forall x \in P(0) : f(x) > 0$).

Bylo by tedy žádoucí poznat nějaké kritérium, které by nám nejen zaručilo, že v daném bodě extrém nastane, ale také nám objasnilo, o jaký extrém se bude jednat (maximum nebo minimum), nebo-li hledáme postačující podmínku pro existenci maxima, resp. minima.
Abychom ji mohli vyslovit, je nutné poznat, jak se chová funkce nejen v daném bodě, ale také v jeho okolí (intervalu). Vyslovme další užitečnou větu.

Věta 2.3.3. (***O monotonii na intervalu***) *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, je spojitá na intervalu **I** a nechť v každém vnitřním bodě intervalu **I** existuje derivace, pak platí:*

1. *Funkce f je na intervalu **I rostoucí (klesající)**, právě když pro všechny vnitřní body x je $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).*

2. *Funkce f je na intervalu **I neklesající (nerostoucí)**, právě když pro všechny vnitřní body x je $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).*

3. *Je-li $f'(x) = 0$ pro každý vnitřní bod intervalu **I**, je f konstantní na **I**.*

Jak již bylo řečeno znaménková změna první derivace ovlivňuje monotonii funkce. Zaměřme se konečně na body (stacionární body), v nichž k této změně dochází. Velmi výstižný název pro stacionární body je též "body podezřelé z extrému".

Věta 2.3.4. *(Postačující podmínky pro lokální maximum) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak*

1. *Je-li f rostoucí na $P^-(a)$ a klesající na $P^+(a)$, pak f má v bodě a ostré lokální maximum.*

2. *Je-li $\forall x \in P^-(a) : f'(x) > 0$ a $\forall x \in P^+(a) : f'(x) < 0$, pak f má v bodě a ostré lokální maximum.*

Věta 2.3.5. *(Postačující podmínky pro lokální minimum) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak*

1. *Je-li f klesající na $P^-(a)$ a rostoucí na $P^+(a)$, pak f má v bodě a ostré lokální minimum.*

2. *Je-li $\forall x \in P^-(a) : f'(x) < 0$ a $\forall x \in P^+(a) : f'(x) > 0$, pak f má v bodě a ostré lokální minimum.*

Doposud jsem pracovali pouze s první derivací funkce, mnohdy pro nás bude výhodné určit i druhou, třetí a obecně **n-tou derivaci**. Definujme ji tedy.

Definice 2.3.4. Derivaci

$$(f')'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

budeme nazývat **druhou derivací funkce f v bodě** x_0.

Indukcí pak můžeme zavést derivace vyšších řádů.

Definice 2.3.5. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má vlastní derivaci $f^{(n-1)}, n \in \mathbb{N}$ v nějakém okolí bodu x_0 z definičního oboru $D(f)$. Pak definujeme **n-tou derivaci funkce v bodě** x_0 jako

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$

Dále klademe $f^{(0)} = f$.

Uveďme ještě poslední tvrzení, které nám mnohdy může pomoci rozhodnout o monotonii či extrému v bodě v případě, kdy prvních $n-1$ derivací v bodě je nulových.

Věta 2.3.6. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ *a existuje* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ *takové, že* $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ *a* $f^{(n)} \neq 0$. *Pak*

1. *Je-li* n *sudé a* $f^{(n)} > 0$, *pak* f *má v bodě* a *ostré lokální minimum.*
2. *Je-li* n *sudé a* $f^{(n)} < 0$, *pak* f *má v bodě* a *ostré lokální maximum.*
3. *Je-li* n *liché a* $f^{(n)} > 0$, *pak* f *je v bodě* a *rostoucí.*
4. *Je-li* n *liché a* $f^{(n)} < 0$, *pak* f *je v bodě* a *klesající.*

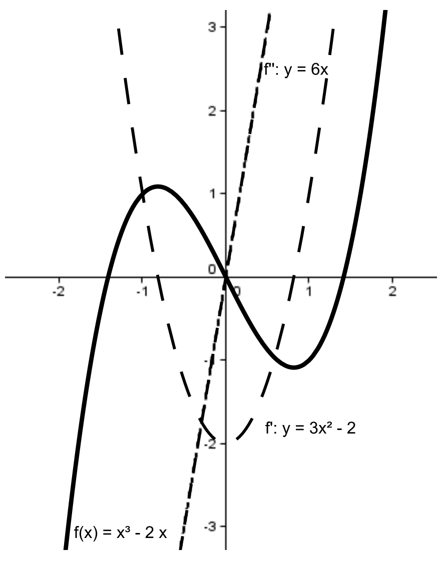
Poznámka 2.3.2. Předchozí věta nám ukazuje mimo jiné způsob klasifikace extrémů, aniž bychom museli vyšetřovat znaménko první derivace. Stačí tedy najít body podezřelé z extrému a spočítat druhou derivaci v těchto bodech. Pokud bude záporná, jedná se o ostré lokální maximum, pokud bude kladná, můžeme ho prohlásit za ostré lokální minimum.
Který ze způsobů klasifikace extrému zvolíme, záleží na nás, resp. na situaci (Je jednodušší dosazovat dvě hodnoty do první derivace, nebo vypočítat hodnotu druhé derivace ve stacionárním bodě?). V následujících příkladech využijme oba postupy.

Uvedeme zde ještě jednodušší a ucelenější zápis postačující podmínky pro lokální extrémy.

Věta 2.3.7. *Nechť* $f'(x_0) = 0$ *a nechť existuje v bodě* x_0 *druhá derivace.*

1. *Je-li* $f''(x_0) < 0$, *má funkce* f *v bodě* x_0 *ostré lokální maximum.*
2. *Je-li* $f''(x_0) > 0$, *má funkce* f *v bodě* x_0 *ostré lokální minimum.*

Všechny výše uvedené poznatky si ilustrujme na funkci $y = x^3 - 2x$ (viz. obrázek 2.7), kde vidíte i její první a druhou derivaci!



Obrázek 2.7: Funkce a její derivace

Příklad 2.3.1. Vyšetřete monotonii a klasifikujte extrémy funkce $f : y = (x^2-1)^4$

***Řešení:* 2.3.1.** Nejprve najdeme stacionární body (body podezřelé z extrému), tedy body pro které je splněna nutná podmínka pro existenci extrému $f'(x) = 0$.

$$f' : y' = ((x^2-1)^4)' = 4(x^2-1)^3 \cdot 2x = 0$$

Podle pravidla, že součin se rovná nule právě tehdy, když alespoň jeden ze členů součinu se rovná nule, nám vychází: $x = -1$ nebo $x = 0$ nebo $x = 1$. Rozdělíme reálnou osu na čtyři intervaly: $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ a $(1,\infty)$. Zvolíme libovolnou hodnotu z každého intervalu a podle věty 1.3.4 určíme znaménko první derivace v každém intervalu.
Přehledné znázornění vidíte v tabulce. Tedy funkce f klesá na intervalech $(-\infty,-1),(0,1)$ a roste na intervalech $(-1,0),(1,\infty)$. Navíc z tabulky plyne, že v bodech $[-1,0]$ a $[1,0]$ je ostré lokální minimum a v bodě $[0,1]$ ostré lokální maximum.

$(-\infty,-1)$	$[-1,0]$	$(-1,0)$	$[0,1]$	$(0,1)$	$[1,0]$	$(1,\infty)$
$\searrow$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

♣

Příklad 2.3.2. Vyšetřete monotonii a klasifikujte extrémy funkce $f : y = x + \frac{1}{x-2}$

***Řešení:* 2.3.2.** Nejprve najdeme stacionární body (body podezřelé z extrému).

$$f' : y' = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2} = 0.$$

Body podezřelé z extrému jsou $x = 1$ nebo $x = 3$. Extrémy zkusíme najít druhou metodou pomocí hodnot druhé derivace. Nejprve vyjádříme druhou derivaci:

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)-(x-3)(x-1)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Po dosazení bodů podezřelých z extrému dostáváme: $f''(1) = -2 < 0$, resp. $f''(3) = 2 > 0$ a podle věty 2.3.1 pro $x = 1$ má funkce lokální maximum, resp. pro $x = 3$ lokální minimum. Intervaly monotonie pak doplníme z následující úvahy. Pokud má funkce v bodě $[1,0]$ lokální maximum, pak před tímto bodem musela růst a za ním klesat (pro minimum samozřejmě naopak). Následující tabulka pak naše úvahy sumarizuje.

Poznámka 2.3.3. Při konstrukci tabulky nesmíme zapomenout na hodnoty mimo definiční obory a hodnoty, v nichž derivace neexistuje.

$(-\infty,1)$	$[1,0]$	$(1,2)$	$x=2$	$(2,3)$	$[3,4]$	$(3,\infty)$
$\nearrow$	MAX	$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$

♣

Příklad 2.3.3. Vyšetřete monotonii a klasifikujte extrémy funkce $f : y = (x^2-1)^3$

***Řešení:* 2.3.3.** Obdobně jako v prvním příkladě i zde najdeme nulové body první derivace funkce f:

$$f' : y' = ((x^2-1)^3)' = 3(x^2-1)^2 \cdot 2x = 0,$$

neboli $x = -1$ nebo $x = 0$ nebo $x = 1$. Po výpočtu libovolných hodnot funkce v jednotlivých intervalech vychází: funkce f klesá na intervalech $(-\infty,0)$ a roste na intervalech $(0,\infty)$ (viz. následující tabulka). Extrémy zkusíme najít opět druhou metodou, tedy pomocí hodnot druhé derivace. Nejprve vyjádříme druhou derivaci:

$$f''(x) = 6(x^2-1)2x \cdot 2x + 3(x^2-1)^2 \cdot 2 = 24x^2 \cdot (x^2-1) + 6(x^2-1)^2 = (x^2-1)(30x^2-6).$$

Po dosazení bodů podezřelých z extrému dostáváme: $f''(\pm 1) = 0$. Tímto způsobem tak nelze rozhodnout a musíme se vrátit ke zkoumání znaménkových změn první derivace, ovšem pro $f''(\pm 0) = 6 > 0$, tedy v bodě $x = 0$ funkce nabývá svého lokálního minima. Vzhledem k absenci jiných znaménkový změn se jedná o jediný extrém funkce.

$(-\infty, -1)$	$[-1, 0]$	$(-1, 0)$	$[0, -1]$	$(0, 1)$	$[1, 0]$	$(1, \infty)$
$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$		$\nearrow$

♣

Příklad 2.3.4. Vyšetřete monotonii a klasifikujte extrémy funkce $y = 1 + 2x + \dfrac{18}{x}$

***Řešení:* 2.3.4.**

$$f' : y' = (1 + 2x + \frac{18}{x})' = 2 - \frac{18}{x^2} = 0 \quad \to \quad 2x^2 = 18 \quad \to \quad x = -3 \vee x = 3.$$

Při dělení reálné osy si musíme dát pozor na jednu důležitou věc. Nestačí ji rozdělit pouze body -3 a 3, musíme ji ještě doplnit doplnit o číslo 0. Důvod je nasnadě: podle věty 1.3.4 musí být funkce v jednotlivých intervalech spojitá. Naše funkce však má v intervalu $(-3, 3)$ bod nespojitosti $x = 0$.
Funkce f klesá na intervalech $(-3, 0), (0, 3)$ a roste na intervalech $(-\infty, -3), (3, \infty)$. Lokálního minima nabývá funkce v bodě $x = 3$ a lokálního maxima v bodě $x = -3$, (viz. následující tabulka).

$(-\infty, -3)$	$[-3, 1]$	$(-3, 0)$	$x = 0$	$(0, 3)$	$[3, 7]$	$(3, \infty)$
$\nearrow$	MAX	$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$

♣

? Úlohy

Úloha 2.3.13 Vyšetřete monotonii funkce a klasifikujte extrémy

a) $y = x^3 + 3x^2 + 1$ b) $y = x^5 - 5x^4 + 100$ c) $y = \dfrac{(x^2 - 3x)}{(x + 1)}$

d) $y = x \cdot e^x$ e) $y = e^{-x^2}$ f) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

Řešení.

a) roste na$(-\infty, -2)a(0, \infty)$, klesá na$(-2, 0)$, $[-2, 5]$lok. max, $[0, 1]$lok. min;
b) roste na$(-\infty, 0)a(4, \infty)$, klesá na$(0, 4)$, $[0, 100]$lok. max, $[4, -156]$lok. min;
c) roste na$(-\infty, -3)a(1, \infty)$, klesá na$(-3, -1)a(-1, 1)$, $[-3, -9]$lok. max, $[1, -1]$lok. min;
d) roste na$(-1, \infty)$, klesá na$(-\infty, -1)$, $[-1, \frac{-1}{e}]$lok. min;
e) roste na$(-\infty, 0)$, klesá na$(0, \infty)$, $[0, 1]$lok. max;
f) roste na$(0, e)$, klesá na$(0, \infty)$, $[e, \frac{1}{e}]$lok. max.

2.3.1 Věty o střední hodnotě

Věta 2.3.8. *(Rolleova věta) Nechť funkce f má následující vlastnosti:*

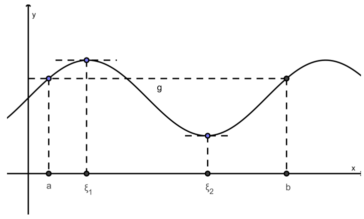
1. *Je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$.*
2. *Má derivaci na otevřeném intervalu (a, b).*

3. *Platí* $f(a) = f(b)$.

Potom v otevřeném intervalu (a, b) *existuje aspoň jeden bod* x *takový, že*

$$f'(x) = 0.$$

Poznámka 2.3.4. Věta Rolleova sama zaručuje pouze existenci aspoň jednoho takového bodu, neumožňuje nám však ani tento bod určit, ani stanovit počet takových bodů. Geometrický význam Rolleovy věty můžete vidět na obrázku viz 2.8 .



Obrázek 2.8: Geometrická interpretace Rolleovy věty

Z Rolleovy věty plyne další důležitá věta:

Věta 2.3.9. *(Cauchyova věta) Nechť funkce* f, g *má následující vlastnosti:*

1. *Jsou spojité na uzavřeném intervalu* $\langle a, b\rangle$.
2. *Mají derivace na otevřeném intervalu* (a, b).
3. *Platí* $g'(x) \neq 0$ *na*(a, b).

Potom v otevřeném intervalu (a, b) *existuje aspoň jeden bod* x *takový, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x).$$

Významným zvláštním případem Cauchyovy věty je věta Lagrangeova, která se používá nejčastěji.

Věta 2.3.10. *(Lagrangeova věta) Nechť funkce* f *má následující vlastnosti:*

1. *Je spojitá na uzavřeném intervalu* $\langle a, b\rangle$.
2. *Má derivaci na otevřeném intervalu* (a, b).

Potom v otevřeném intervalu (a, b) *existuje aspoň jeden bod* x *takový, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

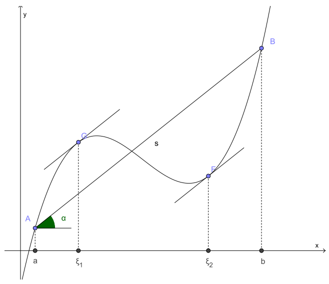
Geometrický význam Lagrangeovy věty ilustruje obrázek 2.9.

Lagrangeova věta má některé významné důsledky, které zde uvedeme.

Věta 2.3.11. *Nechť funkce* f *vyhovuje podmínkám Lagrangeovy věty a navíc ať* $f'(x) \neq 0$ *pro všechna* $x \in (a, b)$. *Potom je funkce* f *prostá na* $\langle a, b\rangle$.

Věta 2.3.12. *Funkce* f *je konstantní na intervalu* $x \in (a, b)$, *právě když má v tomto intervalu derivaci a platí* $f'(x) = 0$ *pro všechna* $x \in (a, b)$.

Věta, kterou se právě chystáme vyslovit, na první pohled nemá nic společného s předcházejícími informacemi, nicméně využívá derivací a pro její důkaz je nezbytná Cauchyova věta. Velmi nám pomáhá při hledání limity podílů dvou funkcí.



Obrázek 2.9: Geometrická interpretace Lagrangeovy věty

Věta 2.3.13. *(l'Hospitalovo pravidlo [čti: lopitalovo pravidlo]) Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in R^*$. Nechť existuje*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

a nechť je splněna jedna z následujících podmínek

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$,
2. $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = \infty$.

Pak existuje $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Poznámka 2.3.5. je třeba si uvědomit, že pokud počítáme limitu zlomku pomocí tohoto pravidla, derivujeme čitatele a jmenovatele zvlášť, nikoliv jako zlomek!!!

Příklad 2.3.5. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 2x + 5}{\ln x}$.

***Řešení:* 2.3.5.** Po dosazení ∞ do funkce, dostáváme tvar $\dfrac{\infty}{\infty}$, který vyhovuje druhé podmínce l'Hospitalova pravidla. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 2x + 5}{\ln x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 2}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} x^3 + 2x = \infty$. ♣

Příklad 2.3.6. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$.

***Řešení:* 2.3.6.** Po dosazení 0 do funkce, dostáváme tvar $\dfrac{0}{0}$, který vyhovuje první podmínce l'Hospitalova pravidla. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 \cos 4x}{1} = 4$. ♣

Příklad 2.3.7. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln x$.

***Řešení:* 2.3.7.** Pokud si vyzkoušíme dosadit do funkce čísla blízké nule zprava, blížíme se tvaru $0 \cdot -\infty$, který není definován. Můžeme si ale pomoci úpravou. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.
Zkusme dosadit teď. Najednou se dostáváme ke tvaru $\frac{-\infty}{\infty}$, který vyhovuje druhé podmínce l'Hospitalova pravidla. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} -x = 0$. ♣

? Úlohy

Úloha 2.3.14 U
rčete, zda limity funkcí lze počítat l'Hospitalovým pravidlem. V kladném případě je vypočítejte.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-4}{x^2-5x+6}$ $[-2]$

b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-9x}$ $[\frac{1}{54}]$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^n}{e^x}$ $[0]$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-1}{x}$ $[\ln 2]$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^3}{x^3-4x+3}$ $[0]$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{\ln x}$ $[\infty]$

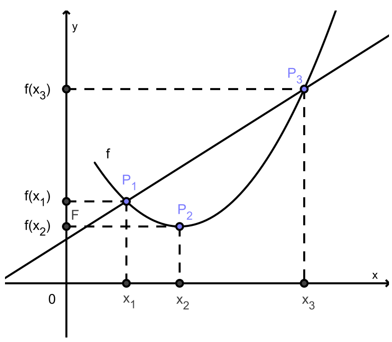
g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{2x}}{x^4-2x+3}$ $[\infty]$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ $[\infty]$

2.4 Konvexní a konkávní funkce

Konvexní a konkávní funkce

Uvažujme obecnou funkci $f(x)$ (viz. obrázek **??**). Zvolíme-li na grafu funkce tři různé body $P_1 = [x_1, f(x_1)], P_2 = [x_2, f(x_2)], P_3 = [x_3, f(x_3)]$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$. Vidíme, že bod P_2 leží pod přímkou P_1P_3.



Obrázek 2.10: Graf konvexní funkce

(Má-li přímka P_1P_3 rovnici $y = kx + q$, pak výrok "P_2 leží pod přímkou P_1P_3"znamená, že P_2 leží v polorovině $\{(x, y) \in R^2; y < kx + q\}$. Vzhledem k našim znalostem z kapitoly "Elementární funkce", najdeme velmi snadno rovnici přímky P_1P_3. Uvedeme ji zde, ale doporučujeme čtenáři, aby si výpočet provedl sám. $y = f(x_1) + \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1)$. Pokud bod P_2 má ležet pod touto přímkou, stačí zaměnit $=$ za $<$ a obecný bod o souřadnicích $[x, y]$ za náš $P_2 = [x_2, f(x_2)]$). Analogickou úvahu lze provést pro bod ležící nad přímkou.

Tato úvaha nás vede k následující definici:

Definice 2.4.1. Nechť f je definována na intervalu **I**. Říkáme, že funkce f je na intervalu **I**

1. **ryze konvexní** právě tehdy, když pro libovolnou trojici $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{I}$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí
$$f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1). \tag{2.13}$$

2. **ryze konkávní** právě tehdy, když pro libovolnou trojici $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{I}$, $x_1 < x_2 < x_3$ platí
$$f(x_2) > f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1). \tag{2.14}$$

Abychom poznali, zda je konkrétní funkce na intervalu konvexní, resp. konkávní bylo by podle definice nutné ověřit platnost vztahů 2.13 resp. 2.14 pro libovolnou trojici bodů, což je velmi náročné. Uveďme si proto větu, která nám dá návod, jak ověřit konvexnost, resp. konkávnost mnohem jednodušeji pomocí znaménka druhé derivace.

Věta 2.4.1. *(O kovexnosti a konkávnosti funkce na intervalu) Nechť je f spojitá na intervalu **I** a nechť v každém vnitřním bodě tohoto intervalu existuje druhá derivace. Pak*

1. *Je-li $f''(x) > 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu **I**, je f ryze konvexní na **I**.*
2. *Je-li $f''(x) < 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu **I**, je f ryze konkávní na **I**.*
3. *Je-li $f''(x) = 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu **I**, je f lineární na **I**.*

Stejně jako spolu úzce souvisí monotonie a extrémy, můžeme i zde najít souvislost konvexnosti (konkávnosti) a bodu, kde se tyto dvě vlastnosti mění. Bod, kde se konvexnost mění na konkávnost nebo naopak nazveme **inflexním bodem**.

Věta 2.4.2. *(Nutná podmínka pro existenci inflexního bodu) Je-li bod x_0 inflexním bodem funkce f a má-li funkce v tomto bodě vlastní druhou derivaci, pak $f''(x_0) = 0$.*

Příklad 2.4.1. Vyšetřete konvexnost a konkávnost funkce $f : (x-1)^3$ a určete inflexní body.

***Řešení:* 2.4.1.** Konkávnost resp. konvexnost funkce nám určuje znaménko druhé derivaci, vyjádřeme si ji.
$$y' = ((x-1)^3)' = 3(x-1)^2,$$
$$y'' = (3(x-1)^2)' = 6(x-1).$$
Opět využijeme věty 1.3.4 a rozdělíme reálnou osu dle nulových bodů druhé derivace.
$$y'' = (3(x-1)^2)' = 6(x-1) = 0, \text{nebo-li} x = 1.$$
Z obou intervalů $(-\infty, 1), (1, \infty)$ vybereme libovolná čísla x a určíme pro ně znaménka druhé derivace (volíme $x = 0$ a $x = 2$): $f''(0) = -6$ a $f''(2) = 6$.
Dle věty 2.4.1 je funkce f v intervalu $(-\infty, 1)$ ryze konkávní a v intervalu $(1, \infty)$ ryze konvexní. Bod $[1, 0]$ je inflexním bodem.

$(-\infty, 1)$	$[1, 0]$	$(1, \infty)$
$\frown$	IB	$\smile$

$\clubsuit$

Příklad 2.4.2. Vyšetřete konvexnost a konkávnost funkce $f : y = \dfrac{x}{1+x^2}$ a určete inflexní body.

***Řešení:* 2.4.2.** Analogicky prvnímu případu vyjádříme druhou derivaci a položíme ji rovnu nule.

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

$$f''(x) = \frac{(-2x)(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3} = 0.$$

Poslední zlomek se rovná nule, právě když se rovná nule čitatel ($2x^3 - 6x = 0$). Dostáváme tři nulové body druhé derivace funkce f: $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$. V jednotlivých intervalech vypočítáme znaménka hodnot jejich bodů. V intervalech $(-\infty, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$ je funkce konkávní a v intervalech $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, \infty)$ je konvexní. Všechny tři body $[-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4}], [0,0], [\sqrt{}, \frac{\sqrt{3}}{4}]$ jsou tak body inflexní.

$(-\infty, -\sqrt{3})$	$[-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4}]$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$[0,0]$	$(0, \sqrt{3})$	$[\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}]$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$\frown$	IB	$\smile$	IB	$\frown$	IB	$\smile$

♣

? Úlohy

Úloha 2.4.15 Vyšetřete konvexnost a konkávnost funkce a určete inflexní body

a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ b) $y = x^4 - 4x^3 + 10$ c) $y = \dfrac{(x^2-3x)}{(x+1)}$

d) $y = x \cdot e^{-x}$ e) $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ f) $y = \ln(1 + x^2)$

Řešení.

a) konvexní na$\langle \frac{4}{3}, \infty)$, konkávní na$(-\infty, \frac{4}{3}\rangle$, IB$[\frac{4}{3}, \frac{128}{27}]$;
b) konvexní na$(-\infty, 0\rangle, \langle 2, \infty)$, konkávní na$\langle 0, 2\rangle$, IB$[0, 10], [2, -6]$;
c) konvexní na$(-1, \infty)$, konkávní na$(-\infty, -1)$, IB nemá;
d) konvexní na$\langle 2, \infty)$, konkávní na$(-\infty, 2\rangle$, IB$[2, 2e^{-2}]$;
e) konkávní na $\mathbb{R}$;
f) konvexní na$\langle -1, 1\rangle$, konkávní na$(-\infty, -1\rangle a \langle 1, \infty)$, IB$[\pm 1, \ln 2]$. ♣

2.5 Asymptota

Při vyšetřování průběhu funkce a především pro přesnější kreslení jejího grafu je dobré, znát přímky, kterým se graf funkce v okolí některých zajímavých bodů podobá (Zjednodušeně řečeno asymptota je přímka, ke které se graf funkce blíží, ale nikdy se ji nedotkne).

Definice 2.5.1. (Asymptota bez směrnice - ABS) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Přímka $p : x = a$ se nazývá asymptota bez směrnice (svislá asymptota) f v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \text{ nebo } \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Definice 2.5.2. (Asymptota se směrnicí - ASS) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Přímka $p : y = kx + q, x \in \mathbb{R}$ se nazývá asymptota se směrnicí (asymptota v $\pm\infty$) funkce f , jestliže

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$$

Věta 2.5.1. *(O asymptotě se směrnicí) Lineární funkce $p : y = kx + q, x \in \mathbb{R}$ je asymptotou se směrnicí (asymptota v ∞), právě když*

- $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, *kde* $k \in \mathbb{R}$.
- $q = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx]$, *kde* $q \in \mathbb{R}$.

Podobná věta platí také pro asymptotu v $-\infty$ a při řešení příkladů na ni nesmíme zapomenout. Použití předchozích odstavců si ukážeme na příkladech.

Příklad 2.5.1. Najděte asymptoty funkce $f : y = \dfrac{x^3}{x(x-1)}$.

***Řešení:* 2.5.1.** Nejprve vyšetříme asymptoty bez směrnice (ABS). Funkce f není definována v bodech $x = 0$ a $x = 1$. Po dosazení $x = 0$ dostáváme tvar $\frac{0}{0}$, můžeme tedy aplikovat l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2x-1} = 0.$$

Asymptota neexistuje. Po dosazení $x = 1$ dostáváme tvar $\frac{1}{0}$, určíme tedy jednostranné limity, abychom odhalili chování funkce v levém, resp. pravém okolí bodu $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x(x-1)} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x(x-1)} = \infty.$$

Dle definice 2.5.1, v bodě $x = 1$ tak existuje asymptota bez směrnice právě o rovnici $a_1 : x = 1$. Hledejme nyní symptoty se směrnicí (ASS). Pokud existují, musíme najít konečné číslo k, resp. q, které představuje směrnici, resp. kvocient asymptoty. Určeme příslušné limity.

$$k_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x(x-1)}}{x} = 1,$$

$$q_2 = \lim_{x\to\infty} [f(x) - k\cdot x] = \lim_{x\to\infty} [\frac{x^3}{x(x-1)} - 1\cdot x] = 1.$$

Konečné limity existují, proto existuje i ASS s rovnicí $a_2 : y = x + 1$.
Obdobně hledáme limitu pro $x \to -\infty$:

$$k_3 = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x(x-1)}}{x} = 1,$$

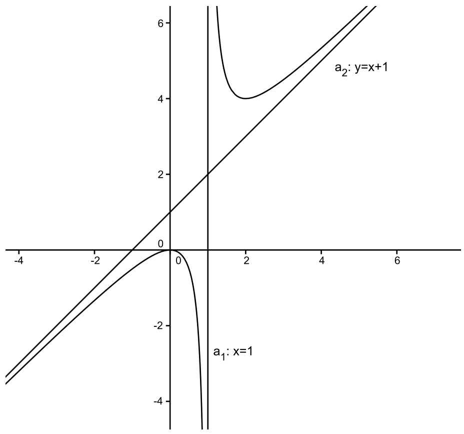
$$q_3 = \lim_{x\to -\infty} [f(x) - k\cdot x] = \lim_{x\to\infty} [\frac{x^3}{x(x-1)} - 1\cdot x] = 1.$$

Opět vyšlo konečné k i q, ovšem jsou stejné jako pro $x \to \infty$, tedy udávají stejnou asymptotu, proto ji zde již uvádět nemusíme.
Graf funkce spolu s asymptotami vidíte na obrázku 2.11.

♣

Příklad 2.5.2. Najděte asymptoty funkce $g : y = x^2 \cdot 2^{-x}$.

***Řešení:* 2.5.2.** Analogicky prvnímu příkladu hledejme nejprve ABS.
ABS:
Funkce je spojitá v celém definičním oboru $(-\infty, \infty)$, proto zde ABS nemohou existovat. Tuto informaci si zapamutujme, protože nám při komplexním vyšetřování průběhu funkce ulehčí práci.
Pokud $D(f) = \mathbb{R}$, nemohou existovat ABS!!!
ASS:
Vyšetřeme chování funkce v $\pm\infty$.



Obrázek 2.11: Asymptoty funkce $f : y = \dfrac{x^3}{x(x-1)}$

Pro ∞:

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot 2^{-x}}{x} \stackrel{1}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x \cdot 2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^x} \stackrel{2}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x \cdot \ln 2} = 0,$$

$$q_1 = \lim_{x\to\infty} [x^2 \cdot 2^{-x} - 0 \cdot x] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x \cdot \ln 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln 2} = 0.$$

ASS má rovnici $a_1 = 0$. Vraťme se ještě k úpravám limit:

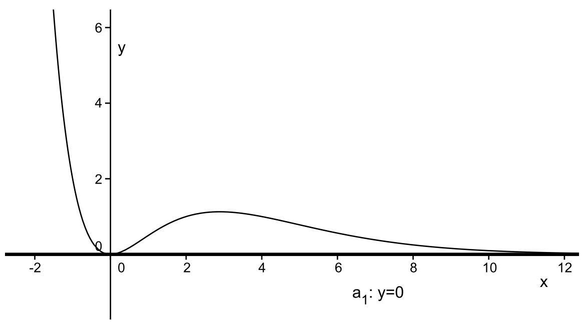
- pro k_1 jsme použili úpravu:

  (1) přepis $2^{-x} = \dfrac{1}{2^x}$

  (2) l'Hospitalovo pravidlo
- pro q_1 jsme aplikovali l'Hospitalovo pravidlo dvakrát za sebou (ověřte se sami oprávněnost jeho využití).

Pro $-\infty$:

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 \cdot 2^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} x \cdot 2^{-x} = \infty; \text{ASS v } -\infty \text{ neexistuje.}$$



Obrázek 2.12: Asymptoty funkce $f : y = x^2 \cdot 2^{-x}$

♣

❓ Úlohy

Úloha 2.5.16 Nalezněte asymptoty funkcí.

a) $y = x + \dfrac{1}{x}$ $[ASS : y = x, ABS : x = 0\,]$

b) $y = \dfrac{2x^2}{x + 5}$ $[ASS : y = 2x - 10, ABS : x = -5\,]$

c) $y = \dfrac{1}{x^2} - x$ $[ASS : y = -x, ABS : x = 0\,]$

d) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ $[ASS : y = x + 1, ABS : x = 0\,]$

e) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ $[ASS : y = 0, ABS : x = 0\,]$

f) $y = x \cdot \sqrt{3 + x}$ [nemá asymptoty]

2.6 Průběh funkce

V předchozích kapitolách jsme postupně získávali znalosti a dovednosti, které nyní využijeme pro komplexní vyšetření průběhu funkce. Uveďme si nyní postup, který budeme využívat při řešení problému typu: **Vyšetřete průběh funkce**. Obecně není postup závazný, přesto se jej v dalším budeme držet.

1. Z předpisu funkce $y = f(x)$
   - určíme definiční obor funkce, příp. nulové body
   - určíme paritu funkce (sudá resp. lichá)
   - rozhodneme o spojitosti funkce v definičním oboru
2. Vypočítáme první derivaci funkce
   - určíme definiční obor derivace, příp. nulové body derivace (body podezřelé z extrému)
   - určíme intervaly monotonie (roste resp. klesá)
   - klasifikujeme extrémy
3. Vypočítáme druhou derivaci
   - určíme intervaly konkávnosti resp. konvexnosti funkce
   - určíme inflexní body
4. Sestavíme tabulku dosavadních informací o funkci (není nezbytné, ale je užitečné pro přehlednost a konečný nákres funkce), příp. určíme hodnoty funkce ve význačných bodech (extrémy, inflexní body).
5. Určíme rovnice asymptot (ABS, ASS), pokud existují.
6. Nakreslíme graf funkce.

Poznámka 2.6.1. Pokud zjistíme, že funkce je sudá, resp. lichá, nemusíme vyšetřovat funkci na celém definičním oboru. Stačí ji vyšetřit buď na $(\infty, 0\rangle$ nebo na $\langle 0, \infty)$ a v opačné polorovině se funkce bude chovat symetricky.

Příklad 2.6.1. Určete průběh funkce $f : y = 8x^3(x - 1)$ a zakreslete její graf.

***Řešení:* 2.6.1.** Jde o polynomickou funkci, o které víme, že je spojitá a definičním oborem jsou všechna reálná čísla ($D(f) = \mathbb{R}$), tedy nemůže mít asymptoty bez směrnice. Ověříme paritu: $f(-x) = 8(-x)^3[(-x) - 1] = -8x^3(-x - 1) \neq f(x) \neq -f(x)$. Funkce tak není ani sudá ani lichá. Přejděme k první derivaci.

$$y' = 24x^2(x-1) + 8x^3 = 8x^2(4x-3).$$

Ta je definovaná a spojitá také na celé ose, najdeme tedy body podezřelé z extrému.
$y' = 24x^2(x-1) + 8x^3 = 8x^2(4x-3) = 0$, právě když $x = 0$ nebo $x = \dfrac{3}{4}$. Rozdělíme číselnou osu dle těchto bodů a budeme zkoumat monotonii a zároveň hledat lokální extrémy.

$(-\infty, 0)$	$[0, 0]$	$(0, \frac{3}{4})$	$[\frac{3}{4}, -\frac{27}{32}]$	$(\frac{3}{4}, \infty)$
$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$

Zjistili jsme, že funkce klesá na $(-\infty, 0)$ a $(0, \frac{3}{4})$, roste na $(\frac{3}{4}, \infty)$ a lokální minimum nastává v bodě $[\frac{3}{4}, -\frac{27}{32}]$.

Obdobně si budeme počínat s druhou derivací, kde ovšem nebudeme vyšetřovat monotonii a extrém, ale konvexnost (konkávnost) a inflexní body. Ta je definovaná a spojitá také na celé ose.

$$y'' = 16x(4x-3) + 8x^2(4) = 48x(2x-1).$$

$y'' = 16x(4x-3) + 8x^2(4) = 48x(2x-1) = 0$ právě když $x = 0$ nebo $x = \dfrac{1}{2}$.

$(-\infty, 0\rangle$	$[0, 0]$	$\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$	$[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$	$\langle \frac{1}{2}, \infty)$
$\smile$	IB	$\frown$	IB	$\smile$

Zjistili jsme, že funkce je konvexní na $(-\infty, 0\rangle$ a $(\frac{1}{2}, \infty)$, konkávní na $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ a inflexní body jsou $[0, 0], [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$.
Hledejme asymptoty se směrnicí:

$$k_1 = \lim_{x \to \infty} 8x^3(x-1) = \infty.$$

Stejně tak pro $x \to -\infty$, proto ASS také neexistují. Získané poznatky zapíšeme do tabulky:

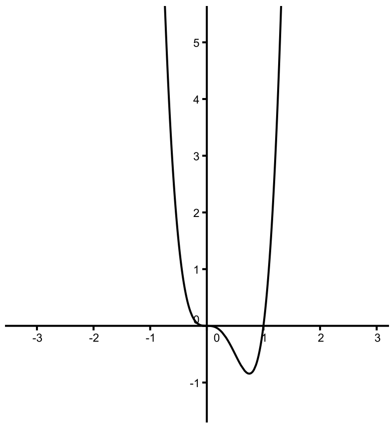
$f:$	$(-\infty, 0)$	$[0, 0]$	$(0, \frac{1}{2})$	$[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$	$[\frac{3}{4}, -\frac{27}{32}]$	$(\frac{3}{4}, \infty)$
$f':$	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$
$f'':$	$\smile$	IB	$\frown$	IB	$\smile$		$\smile$

Třešničkou na dortu je nakreslit graf funkce viz. 2.13.

♣

Příklad 2.6.2. Určete průběh funkce $f : y = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ a zakreslete její graf.

***Řešení:* 2.6.2.** Definičním oborem funkce $y = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ jsou všechna reálná čísla, kromě $x = \pm 1$. Tyto body jsou také jedinými body nespojitosti. Ověříme paritu funkce: $f(-x) = y = \dfrac{2}{(-x)^2 - 1} = f(x)$. Funkce splňuje podmínky pro funkci sudou, postačí tedy, když budeme vyšetřovat její průběh například v intervalu $\langle 0, \infty)$ (na opačné straně reálné osy se bude chovat symetricky s osou symetrie totožnou s osou y).



Obrázek 2.13: Graf funkce $f : y = 8x^3(x-1)$

První derivace je $y' = \dfrac{0-4x}{(x^2-1)^2}$. Bod podezřelý z extrému (nulový bod první derivace) je pouze $x = 0$. Číselnou osu rozdělíme na intervaly dle nulových bodů první derivace a bodů, v kterých není první derivace definována (omezíme se jen na $\langle 0, \infty)$).

Derivace nabývá záporných hodnot (klesá) na obou intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$. Dle symetrie tak musí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$ růst. V bodě $x = 0$ dochází ke znaménkové změně první derivace ($+$ na $-$), tedy $[0, -2]$ je lokální maximum.

$(-\infty, -1)$	$x = -1$	$(-1, 0)$	$[0, 0]$	$(0, 1)$	$x = 1$	$(1, \infty)$
$\nearrow$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$		$\searrow$

Druhá derivace $y'' = \dfrac{-4(x^2-1)^2 + 4x2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$ se nerovná nule pro žádná $x \in \mathbb{R}$, a proto nemohou existovat ani inflexní body a změny v konvexnosti, resp. konkávnosti mohou nastat pouze v bodech, pro které není druhá derivace definována. Kladných hodnot (konvexní) nabývá druhá derivace na intervalu $\langle 1, \infty)$ (vzhledem k symetrii na $(-\infty, -1\rangle$), záporných (konkávní) pak na $\langle 0, 1\rangle$, (vzhledem k symetrii na $\langle -1, 0\rangle$).

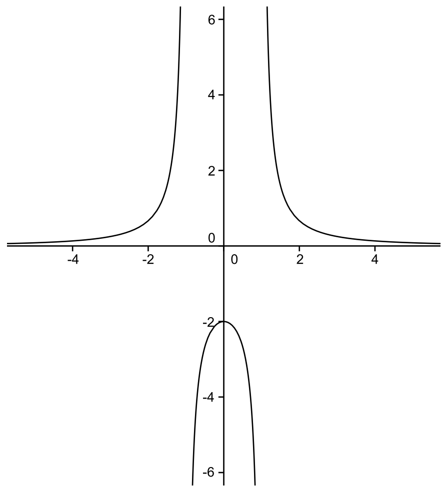
$(-\infty, -1\rangle$	$x = -1$	$\langle -1, 1\rangle$	$x = 1$	$\langle 1, \infty)$
$\smile$		$\frown$		$\smile$

ABS: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{x^2-1} = \infty.$
Opět s přihlédnutím k symetrii funkce jsme objevili dvě asymototy bez směrnice. $a_1 : x = -1$ a $a_2 : x = 1$

ASS: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{2}{x^2-1}}{x} = 0, \qquad q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{x^2-1} - 0x = 0.$
Asymptotou se směrnicí je přímka $a_3 : y = 0$.

Následuje tabulka s kompletními informacemi a graf funkce 2.14.

$f:$	$(-\infty,-1)$	$x=-1$	$(-1,0)$	$[0,0]$	$(0,1)$	$x=1$	$(1,\infty)$
$f':$	$\nearrow$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$		$\searrow$
f''	$\smile$		$\frown$		$\frown$		$\smile$
AS	$a_3: y=0$	$a_1: x=-1$				$a_2: x=1$	$a_3: y=0$



Obrázek 2.14: Graf funkce $f: y = \dfrac{2}{x^2-1}$

♣

Příklad 2.6.3. Vyšetřete průběh funkce $f: y = \dfrac{x}{x^2+1}$ a zakreslete její graf.

***Řešení:* 2.6.3.** Funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, nemůže tak mít ABS. $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+1} = -f(x)$, jedná se tedy o funkci lichou a stejně jako v předchozím příkladu, stačí vyšetřovat pouze interval $\langle 0,\infty)$. První derivace $y' = \dfrac{1+x^2-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0$, právě když $x = \pm 1$. Vyšetříme-li znaménka první derivace na intervalu $\langle 0,\infty)$, zjistíme, že funkce je rostoucí na $(0,1)$ a klesající na $(1,\infty)$. Opět ze symetrie (tentokrát podle počátku) plyne, že funkce musí růst také na intervalu $(-1,0)$ a klesat na $(-\infty,-1)$. Najdeme zde lokální minimum v bodě $[-1,-\frac{1}{2}]$ a lokální maximum v bodě $[1,\frac{1}{2}]$.

$(-\infty,-1)$	$[-1,-\frac{1}{2}]$	$(-1,1)$	$[1,\frac{1}{2}]$	$(1,\infty)$
$\searrow$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

Druhá derivace je $y'' = \dfrac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \dfrac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}$. Body podezřelé z inflexe (nulové body druhé derivace) musí splňovat podmínku $2x^3-6x = 2x(x^2-3) = 0$. Jsou to body $x=-\sqrt{3}, x=0, x=\sqrt{3}$. Po zjištění znaménka druhé derivace a znalosti symetrie nám vychází, že funkce je konvexní na $\langle -\sqrt{3},0\rangle$ a $\langle 3,\infty)$ a konkávní na $(-\infty,-\sqrt{3}\rangle$ a $\langle 0,\sqrt{3}\rangle$. Inflexní body jsou pak $[\pm\sqrt{3},\pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}]$, $[0,0]$.

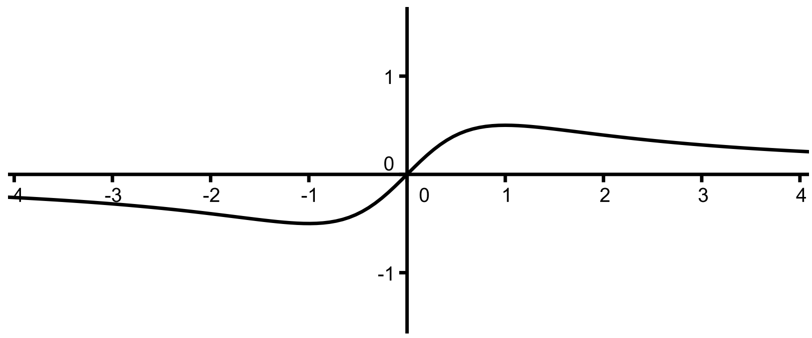
$(-\infty,-\sqrt{3}\rangle$	$[-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}]$	$\langle -\sqrt{3},0\rangle$	$[0,0]$	$\langle 0,\sqrt{3}\rangle$	$[\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}]$	$\langle 3,\infty)$
$\frown$	IB	$\smile$	IB	$\frown$	IB	$\smile$

$$\text{ASS: } k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x} = 0, \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} - 0x = 0.$$

Nalezli jsme ASS o rovnici $y = 0$. Následuje tabulka (vzhledem k velikosti je rozdělena na dvě části na sebe navazující) s kompletními informacemi a graf funkce 2.15.

$f:$	$(-\infty, -\sqrt{3}\rangle$	$[-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}]$	$\langle -\sqrt{3}, -1)$	$[-1, -\frac{1}{2}]$	$(-1, 0\rangle$
$f':$	$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$
$f'':$	$\frown$	IB	$\smile$		$\smile$
AS	ASS $y = 0$				

$f:$	$[0,0]$	$\langle 0,1)$	$[1, \frac{1}{2}]$	$(1, \sqrt{3}\rangle$	$[\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}]$	$\langle 3, \infty)$
$f':$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$		$\searrow$
$f'':$	IB	$\frown$		$\frown$	IB	$\smile$
AS						ASS $y = 0$



Obrázek 2.15: Graf funkce $f: y = \dfrac{x}{x^2+1}$

♣

Příklad 2.6.4. Vyšetřete průběh funkce $f: y = x^2 \cdot e^{-x}$ a zakreslete její graf.

***Řešení:* 2.6.4.** Funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, nemůže tak mít ABS. $f(-x) = (-x)^2 \cdot e^x \neq \pm f(x)$, funkce není ani sudá ani lichá. První derivace $2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = 0$, právě když $x = 0$ nebo $x = 2$. Následující obrázek ukazuje intervaly monotonie a lokální minimum v bodě $[0,0]$, resp. lokální maximum v bodě $[2, 4e^2]$.

$(-\infty, 0)$	$[0,0]$	$(0,2)$	$[2, 4e^2]$	$(2, \infty)$
$\searrow$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

Druhá derivace je $y'' = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. Body podezřelé z inflexe pak vycházejí $[2 - \sqrt{2}, (6 - 4\sqrt{2}) \cdot e^{\sqrt{2}-2}]$ a $[2 + \sqrt{2}, (6 + 4\sqrt{2}) \cdot e^{-\sqrt{2}-2}]$. V intervalech $(-\infty, 2 - \sqrt{2}\rangle$ a $\langle 2 + \sqrt{2}, \infty)$ nabývá druhá derivace kladných hodnot, funkce je konvexní a v intervalu $\langle 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\rangle$ hodnot záporných, je tedy konkávní.

$(-\infty, 2-\sqrt{2}\rangle$	$[2-\sqrt{2}, f(2-\sqrt{2})]$	$\langle 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\rangle$	$[2+\sqrt{2}, f(2+\sqrt{2})]$	$\langle 2+\sqrt{2}, \infty)$
$\smile$	IB	$\frown$	IB	$\smile$

ASS:

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x \cdot e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

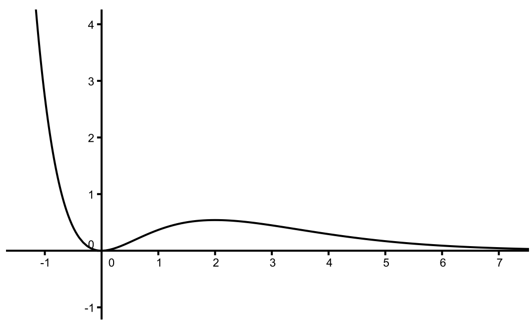
$$q_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} - 0x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Našli jsme asymptotu se směrnicí $a_1 : y = 0$. U obou limit jsem využili l'Hospitalova pravidla. Podívejme se ještě k $-\infty$: $k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 \cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{-x} = -\infty$. Druhá asymptota neexistuje.

Následuje tabulka s kompletními informacemi (opět je z důvodů velikosti rozdělena) a graf funkce 2.16.

f :	$(-\infty, 0)$	$[0, 0]$	$(0, 2-\sqrt{2}\rangle$	$[2-\sqrt{2}, f(2-\sqrt{2})]$	$\langle 2-\sqrt{2}, 2)$	$[2, 4e^2]$	$(2, 2+\sqrt{2}\rangle$
f' :	$\searrow$	MIN	$\nearrow$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$
f'' :	$\smile$		$\smile$	IB	$\frown$		$\frown$
AS							

f :	$[2+\sqrt{2}, f(2+\sqrt{2})]$	$\langle 2+\sqrt{2}, \infty$
f' :		$\searrow$
f'' :	IB	$\smile$
AS		ASS $y = 0$



Obrázek 2.16: Graf funkce $f : y = x^2 \cdot e^{-x}$

♣

❓ Úlohy

Úloha 2.6.17 Vyšetřete průběh funkce a nakreslete její graf.

a) $y = (x+2)^{\frac{5}{3}}$ b) $y = 16x(x-1)^3$ c) $y = x + \frac{4}{x+2}$
d) $y = \frac{x^2}{x-3}$ e) $y = x \cdot \ln x$ f) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

Řešení.
a) $D(f) = \mathbb{R}$, ani sudá ani lichá, $\nearrow naD(f)$, nemá lok. extrémy, konkávní na $(-\infty, -2\rangle$, konvexní na $\langle -2, \infty)$, IB: $[-2, 0]$, bez ABS i ASS;
b) $D(f) = \mathbb{R}$,ani sudá ani lichá, $\nearrow$ na $(\frac{1}{4}, \infty)$, $\searrow$ na $(-\infty, \frac{1}{4})$, $[\frac{1}{4}, -\frac{27}{16}]$ lok. min., konkávní na $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$, konvexní na $(-\infty, \frac{1}{2}\rangle$ a $\langle 1, \infty)$, IB: $[\frac{1}{2}, -1]$, $[1, 0]$, bez ABS i ASS;
c) $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$,ani sudá ani lichá, $\nearrow$ na $(-\infty, -4)$ a $(0, \infty)$, $\searrow$ na $(-4, -2)$ a $(-2, 0)$, $[0, 2]$ lok. min., $[-4, -6]$ lok. max., konkávní na $(-\infty, -2$,konvexní na $(-2, \infty)$, IB nemá, $y = x$ ASS, $x = -2$ ABS;
d) $D(f) = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$, ani sudá ani lichá, $\nearrow$ na $(-\infty, 0)$ a $(6, \infty)$, $\searrow$ na $(0, 3)$ a $(3, 6)$, $[6, 12]$ lok. min., $[0, 0]$ lok. max., konkávní na $(-\infty, 3\rangle$, konvexní na $\langle 3, \infty)$, IB nemá, $y = x + 3$ ASS, $x = 3$ ABS;
e) $D(f) = (0, \infty)$, ani sudá ani lichá, $\nearrow$ na $(\frac{1}{e}, \infty)$, $\searrow$ na $(0, \frac{1}{e})$, $[\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$ lok. min., konvexní na $D(f)$, IB nemá, bez ABS i ASS;
f) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, ani sudá ani lichá, $\nearrow$ na $(\frac{1}{2}, \infty)$, $\searrow$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}]$ lok. min., konvexní na $(-\infty, 0\rangle$ a $\langle 0, \infty)$, IB nemá, $x = 0$ ABS.

♣

Kapitola 3

Použití derivací (optimalizační úlohy)

Motivace

Užití diferenciálního počtu je velmi široké a zasahuje nejen do oblasti matematiky, ale také fyziky, chemie a dalších disciplín, kde je nutné zkoumat průběh chování určité veličiny, např. nalezení extrémů či okamžitých změn v čase. Optimalizační úlohy využívají znalosti derivace funkce v bodě. Především z praxe se dá usoudit, že pomocí derivací lze snadno vyřešit problémy, které by se jinak řešili heuristicky (zkusmo).

Příklad 3.0.5. Pro motivaci uvedeme dva příklady.

- *Problém plechovek*
  Představte si, že jsme výrobci nealkoholických nápojů. Zaměřujeme se výhradně na plechovkové balení a plechovky si sami vyrábíme. Jediné, co musíme nakoupit, je plech na jejich výrobu. Víme, že nejlépe se prodávají plechovky o objemu 0,5 litru. Pro jednoduchost předpokládejme válcový tvar plechovky a plechovka bude nápojem naplněna až po okraj. Určitě jako dobří obchodníci nechceme vynakládat zbytečné peníze za nakupovaný plech. Požadujeme tedy plechovku, která bude mít za daného objemu $V = 0,5\,l = 0,5\,dm^3 = 50\,cm^3$ co nejmenší povrch. Jak tedy zvolit rozměry plechovky tak, abychom spotřebovali co nejméně plechu?

- *Problém vstupenek*
  Změnili jsme povolání a z výrobce plechovek pro nápoje jsme se stali prodejci vstupenek na hudební koncert. Objednali jsme sál pro 800 lidí. Víme, že hudebníci, tisk vstupenek a celková režie nás bude stát 20000 \$. Zbývá zvolit, za kolik \$ budeme vstupenky prodávat zájemcům o koncert. Ze zkušenosti víme, že pokud budeme prodávat jednu vstupenku za 40 \$, určitě vyprodáme celý sál. Dále víme, že každý dolar nad tuto cenu sníží prodej vstupenek o 10 kusů. Máme určit, o kolik dolarů je třeba navýšit cenu tak, aby náš zisk byl maximální.

Poznámky k postupu

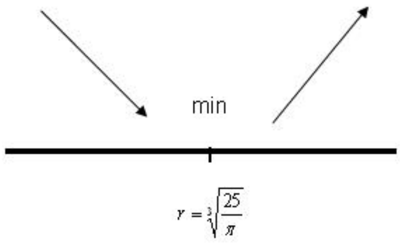
Než začneme úlohy řešit, zopakujme si některé poznatky z předchozí kapitoly.

1. Má-li reálná funkce v bodě x_0 kladnou derivaci, pak je v tomto bodě rostoucí.

2. Má-li reálná funkce v bodě x_0 zápornou derivaci, pak je v tomto bodě klesající.

3. Má-li reálná funkce v bodě x_0 derivaci rovnu nule, pak v tomto bodě může, ale nemusí nabývat extrémní hodnoty (*nutná podmínka existence extrému*).

Výše zmíněné poznatky nám postačí pro vyřešení obou uvedených příkladů.



Obrázek 3.1: Grafické vyznačení monotonie

Řešení: **3.0.5.** *Problém plechovek*
V našem případě je plechovka dokonalý válec, jehož velikost povrchu S spočítáme podle vzorce $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$, kde r je poloměr podstavy a v je výška plechovky. Dále víme, že pro objem válce platí vztah $V = \pi r^2 v = 50\,cm^3$. Odtud pro výšku je $v = \frac{50}{\pi r^2}\cdot$ Dosadíme do vztahu pro povrch:

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{50}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{100}{r}\cdot$$

Tím jsme dostali velikost povrchu plechovky jako funkci poloměru její podstavy. Naším úkolem je najít takové r, pro něž bude S extrémní. Nutnou podmínku pro existenci extrému jsme již uvedli; použijme ji:.

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{100}{r^2} = 0.$$

Pro poloměr je $r > 0$ (nekladný poloměr je nepřípustný), proto můžeme r^2 celou rovnici vynásobit a po úpravě dostáváme:

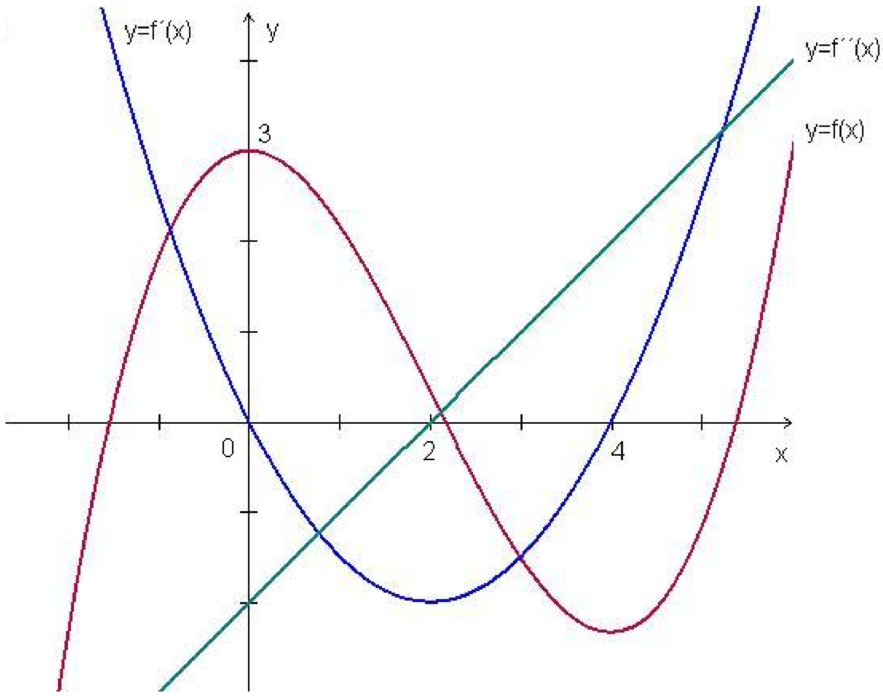
$$r = \sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}\cdot$$

Odtud po dosazení

$$v = \frac{50}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{25^2}{\pi^2}}} = \sqrt{\frac{200}{\pi}}\cdot$$

Našli jsme tedy hodnoty neznámých veličin, pro které by mohl mít povrch plechovky extrémní hodnotu. Stále ještě nevíme, zda tam opravdu extrém nastane, ale je jisté, že pokud ne tam, tak nikde jinde (důvodem je nutná podmínka pro existenci extrému). Pro kontrolu, zda jde opravdu o minimální povrch, zjistíme, jak se funkce $S = S(r)$ chová v okolí naší hodnoty $r = \sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}\cdot$ Ta nám rozdělila reálnou osu na dva intervaly (obrázek 3.1): $\left(0, \sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}\right)$ a $\left(\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}, \infty\right)$, z nichž v prvním funkce klesá a v druhém roste. Zřejmě pak v bodě $r = \sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}$ musela dosáhnout své minimální hodnoty. Příklad je tedy vyřešen.

V předchozím příkladě jsem si ukázali způsob, jak poznat, zda v daném bodě dosahuje funkce své maximální, resp. minimální hodnoty. K jejímu určení jsme museli znát znaménkové změny první derivace v okolí stacionárního bodu. Toto zjišťování znaménkových změn může být v některých případech komplikovanější. Ukážeme si nyní, jak se této nepříjemnosti vyhnout pomocí druhé derivace. To je samozřejmě výhodné jen tehdy, pokud je výpočet druhé derivace jednoduchý.



Obrázek 3.2: Grafy funkce a jejích derivací

Poznámka 3.0.2. *Druhá derivace je první derivace první derivace.*

Pro funkci danou předpisem $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 3$ jsou na obrázku 3.2 graf funkce $f(x)$, graf její první derivace $f'(x)$ a graf druhé derivace $f''(x)$. Máme $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ a $f''(x) = x - 2$. Z grafu funkce $f'(x)$ můžeme snadno odečíst, kde $f'(x)$ nabývá kladných, resp. záporných hodnot a kde je rovna nule. Na základě toho si můžeme učinit závěry o monotónnosti funkce $f(x)$, resp. o jejích extrémních hodnotách. Nás však zajímá graf druhé derivace $f''(x) = x - 2$. Z obrázku vidíme, že $f''(x) > 0$ v intervalu $(2, \infty)$ a $f''(x) < 0$ v intervalu $(-\infty, 2)$. Druhá derivace je tedy záporná i v bodě, ve kterém má funkce lokální maximum, resp. kladná i v bodě relativního minima. Nyní vyslovíme větu, která bude zobecněním našich předchozích úvah a zároveň je *postačující podmínkou pro existenci extrému*.

Věta 3.0.1. *Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť v bodě x_0 existuje druhá derivace.*

Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 ostré lokální maximum,

je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Je-li $f''(x_0) = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout a je třeba zjistit znaménkové změny první derivace.

Zkusme pomocí nově získaného poznatku spočítat druhý motivační příklad.

Řešení: **3.0.6.** *Problém vstupenek*
Nejprve je nutné z údajů sestavit funkci zisku Z. Zisk bude určitě záviset na ceně vstupenky a na počtu prodaných vstupenek. Zisk se bude rovnat počtu prodaných vstupenek krát hodnota jedné vstupenky mínus náklady na uspořádání koncertu. Pokud označíme x počet dolarů, kterým navýšíme cenu vstupenky nad základní cenu 40 $, můžeme psát:

$$Z(x) = (40 + x) \cdot (800 - 10x) - 20000,$$

kde první závorka je cenou vstupenky a druhá představuje počet prodaných vstupenek (za každý jeden $ se prodá o 10 vstupenek méně). Získali jsme tedy funkci jedné proměnné a hledáme její maximum: určíme

$$Z'(x) = (12000 + 400x - 10x^2)' = -20x + 400.$$

Podle nutné podmínky pro existenci extrémů musí být první derivace funkce rovna 0. To je splněno pro $x = 20$ dolarů. Cena vstupenky by v optimální případě měla být $40 + 20 = 60$ dolarů. Zda se jedná opravdu o hodnotu, v které funkce nabývá maxima zjistíme podle 2. derivace $Z''(x) = -20 < 0$. Z předchozí věty plyne, že se jedná o lokální maximum.

Sami si můžete zkusit, např. pomocí grafu $Z(x)$, že při žádné jiné ceně vstupenky nebude náš zisk větší.

🕮 Postup řešení

Jak je vidět, optimalizační úlohy se řeší podle stejného postupu. Ten lze vyjádřit jako sled následujících kroků:

1. najdeme popis nebo vyjádření veličiny, která má dosahovat extrému (povrch plechovky, zisk, ...)
2. zjistíme, zda tuto veličinu lze vyjádřit jako funkci jedné, či dvou nebo více proměnných
3. pokud jde o funkci jedné proměnné, můžeme okamžitě hledat první derivaci (viz: vstupenky)
4. pokud jde o funkci dvou (více) proměnných, často je v zadání uvedena nějaká podmínka nebo vztah, který pomůže za jednu proměnnou dosadit; tím dostaneme funkci pouze jedné proměnné (viz: objem plechovky)
5. spočítáme první derivaci této veličiny jako funkce jedné proměnné a tuto derivaci položíme rovnu nule
6. nalezneme hodnoty, pro které by mohla funkce nabývat extrémů
7. pomocí druhé derivace dokážeme existenci extrému

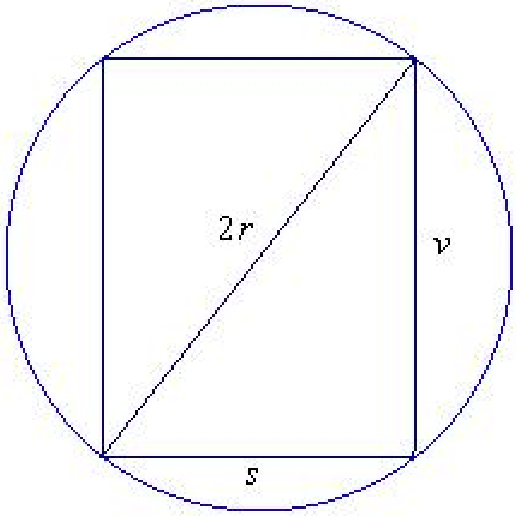
V následujícím příkladě budeme postupovat podle uvedené "kuchařky".

Optimalizační úloha: trám s největší nosností

Příklad 3.0.6. Z válcovitého kmenu s kruhovým průřezem o poloměru r se má vytesat trám co největší nosnosti. Nosnost trámu je určena vztahem $y = k \cdot s \cdot v^2$, kde k je materiálová konstanta daného druhu dřeva, s je šířka průřezu trámu a v je výška průřezu trámu. Jaké rozměry s a v má mít trám, aby jeho nosnost byla maximální?

***Řešení:* 3.0.7.** Na obrázku 3.3 je vyznačen průřez daného trámu. Budeme postupovat v krocích.

1. V prvním kroku je nutné si uvědomit, která veličina má nabývat extrémní hodnoty. V našem případě je to nosnost - označme ji jako y.
2. Nosnost je určena vztahem
$$y = k \cdot s \cdot v^2, \tag{3.1}$$
tedy je funkcí dvou proměnných s a v a my můžeme třetí krok "kuchařky"přeskočit.
3. Jedinou známou hodnotou v zadání zůstává r, což nám napovídá, že pomocí ní by se dala jedna neznámá (třeba v) vyjádřit pomocí s. Vyjdeme z obrázku 3.3 a za předpokladu, že průřezem trámu je obdélník, můžeme využít Pythagorovy věty: $(2r)^2 = v^2 + s^2$, odkud plyne
$$v^2 = 4r^2 - s^2.$$
Dosaďme za v^2 do vztahu pro 3.1. Získáme vztah pro nosnost trámu v závislosti na jedné proměnné s, a to šířce průřezu trámu:
$$y = k \cdot s \cdot (4r^2 - s^2) = 4k \cdot s \cdot r^2 - k \cdot s^3,$$
neboť k je konstanta a r je pevně dáno poloměrem použitého kmenu.



Obrázek 3.3: Průřez trámem

4. Použijeme nutnou podmínku pro existenci extrému: funkci nosnosti derivujeme a derivaci klademe rovnou nule:
$$y' = \frac{dy}{ds} = 4k \cdot r^2 - 3k \cdot s^2 = 0.$$

5. Předchozí rovnici vyhovují pouze hodnoty $s = \pm\sqrt{\frac{4k \cdot r^2}{3}}$, ale zápornou hodnotu můžeme vyloučit z důvodu významu délky strany s.

6. Pro druhou derivaci dostáváme: $y'' = -6s < 0$ pro všechna přípustná s, tedy i pro naši hodnotu. Záporné znaménko hodnoty druhé derivace v bodě s značí, že naše funkce nabývá maximální hodnoty, neboli nosnost trámu pro nalezenou hodnotu je největší. K této hodnotě je nutné dopočítat ze vztahu $v^2 = 4r^2 - s^2$ hodnotu veličiny s a tím budou rozměry trámu maximální nosnosti určeny. ♣

Poznámka 3.0.3. V třetím kroku jsme mohli vyjádřit i s, ale předpis pro funkci nosnosti by byl komplikovanější.

Optimalizační úloha: nejmenší vzdálenost

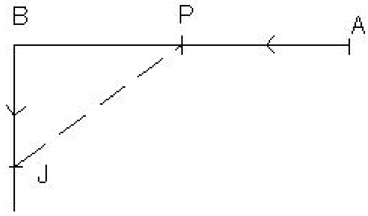
Příklad 3.0.7. Přístavy A, B (viz obr. 3.4) jsou od sebe vzdáleny 145 km. Z přístavu A vyjede parník ve směru určeném šipkou a současně ve stejném okamžiku z přístavu B vyjede jachta (ve směru určeném šipkou). Jejich rychlosti jsou stálé, a to pro parník $v_p = 40\,km/h$, pro jachtu $v_j = 16\,km/h$. V jakém čase bude jejich vzájemná vzdálenost nejmenší?

Řešení: **3.0.8.** Označme polohy parníku a jachty po t hodinách plavby z přístavů A a B písmeny P a J. Pak délky drah parníku $\overline{AP}$ a jachty $\overline{BJ}$ v čase t hodin od začátku pohybu jsou:

$$\overline{AP} = 40 \cdot t\,km, \qquad \overline{BJ} = 16 \cdot t\,km.$$

Pro vzdálenost $\overline{PJ}$ parníku a jachty v kilometrech v tomto čase t (v hodinách) platí podle Pythagorovy věty

$$\overline{PJ} = \sqrt{\overline{BP}^2 + \overline{BJ}^2} = \sqrt{(145 - 40t)^2 + (16t)^2}.$$



Obrázek 3.4: Parník a jachta

Odtud

$$\overline{PJ} = \sqrt{1856t^2 - 11600t + 21025}.$$

Tato odmocnina nabyde nejmenší hodnoty při témže t, při němž bude mít veličina pod odmocninou

$$z(t) = 1856t^2 - 11600t + 21025$$

nejmenší hodnotu. Hledejme tuto nejmenší hodnotu: počítejme

$$z'(t) = 3712t - 11600 = 0,$$

odkud plyne

$$t = \frac{11600}{3712} = 3,125\, hodin.$$

Pomocí druhé derivace lze ukázat, že extremální hodnota je minimem. Tedy parník a jachta budou mít vzájemnou vzdálenost nejmenší za 3 hodiny 7 minut a 30 sekund po jejich vyplutí z A, resp. z B. ♣

Optimalizační úloha: válec s největším objemem

Příklad 3.0.8. Do kužele o poloměru podstavy $r = 4\,m$ a výšce $v = 6\,m$ je vepsán válec, který má mít co největší objem. Vypočítejme ten největší možný objem.

Řešení: **3.0.9.** Na obrázku 3.5 je naznačen průřez daným kuželem. Potřebujeme najít objem tohoto válce, tudíž hledáme velikost poloměru x jeho podstavy a výšky y.
Využijeme trojúhelníky $\triangle AB'C'$ a $\triangle ABC$, které jsou podobné: podobnost dvou trojúhelníků značíme $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$. Z podobnosti pro vzájemné poměry odpovídajících stran plyne

$$\frac{y}{r-x} = \frac{v}{r} \Longrightarrow y = \frac{(r-x)v}{r}.$$

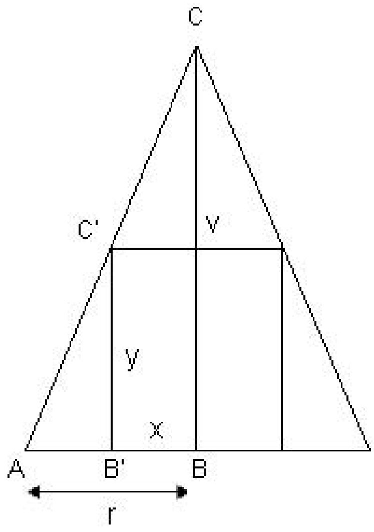
Pro objem válce máme

$$V = \pi x^2 y = \pi x^2 \frac{(r-x)v}{r} = \pi x^2 \frac{(4-x)\cdot 6}{4} = \frac{3\pi}{2}(4x^2 - x^3) = V(x).$$

Tudíž objem je funkcí jedné proměnné, a tedy počítáme první derivaci a klademe ji rovnou nule:

$$V'(x) = \frac{3\pi}{2}(8x - 3x^2) = 0 \Longrightarrow x(3x-8) = 0$$

$$x_1 = \frac{8}{3}, \text{ nulový kořen } x_2 = 0 \text{ nedává smysl přo řešení úlohy;}$$



Obrázek 3.5: Průřez kuželem

$$V''(x) = \frac{3\pi}{2}(8 - 6x), \quad V''\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{3\pi}{2} \cdot \left(8 - 6 \cdot \frac{8}{3}\right) < 0,$$

tedy pro $x = \frac{8}{3}\,m$ je objem válce maximální a jeho hodnota činí $V_{max} = \frac{128\pi}{9}\,m^3$. ♣

3.1 Další využití derivací

V minulé kapitole jsme si uvedli, že derivaci lze interpretovat jako rychlost nebo míru (tempo) změny. Nyní si ukážeme, jak při počítání tuto vědomost aplikovat.

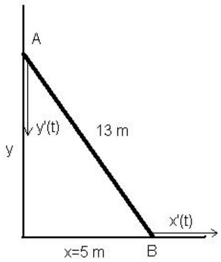
Aplikace derivace: padající žebřík

Příklad 3.1.1. Žebřík dlouhý 13 m se jedním koncem A opírá o zeď a druhým koncem B o podlahu (viz obrázek se žebříkem). Žebřík začne ujíždět, a to tak, že bod B se od zdi vzdaluje rychlostí 1,6 m/min. Zjistěme, jakou rychlostí se pohybuje bod A, když je bod B vzdálen ode zdi 5 m.

Řešení: **3.1.1.** Nejprve si ujasněme, co chceme vypočítat. Zavedeme souřadnicový systém podle obrázku. Víme, že rychlost bodu B pohybujícího se ve směru osy o_x je známa. Pokud označíme jako $x(t)$ velikost dráhy, kterou urazí bod B v čase t od začátku pohybu, můžeme pro rychlost tohoto bodu jako pro derivaci veličiny $x(t)$ podle času napsat

$$x'(t) = 1,6\,m/min$$

a analogicky, pro rychlost (v čase t od začátku pohybu) bodu A pohybujícího se ve směru osy o_y pišme $y'(t)$. Našim úkolem je najít $y'(t)$ právě v tom okamžiku, kdy bod B urazí 5 m. Z obrázku je vidět, že podle Pythagorovy věty se splní v každém časovém okamžiku takovém, že $x^2(t) + y^2(t) = 13^2$, odtud plyne $y(t) = \sqrt{169 - x^2(t)}$. Proto



Obrázek 3.6: Žebřík

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{-\,2x(t)\cdot x'(t)}{2\sqrt{169 - x^2(t)}} = \frac{-\,5\cdot 1,6}{\sqrt{169-5^2}} = -\frac{2}{3}\,m/min.$$

Při vyjádření derivace y' platí: délka dráhy bodu B ve směru osy o_x je funkcí času a vzhledem k tomu, že derivujeme podle t, je nutné brát funkci $x^2(t)$ jako funkci složenou. Její derivace podle t je součinem derivace vnější funkce (kvadratické) a derivace samotné funkce $x(t)$, o které nevíme, jaký je její předpis, víme však, že její derivace má hodnotu 1,6 m/min, neboli $x'(t) = 1,6$. (Záporná hodnota y' vyjadřuje směr pohybu zkoumaného bodu B.) ♣

❓ Optimalizační úlohy

Úloha 3.1.18 Najděte takové kladné číslo, aby součet tohoto čísla a jeho převrácené hodnoty byl minimální.

[$x = 1$]

Úloha 3.1.19 Určete rozměry a, b obdélníku tak, aby při daném obsahu $16\,cm^2$ měl minimální obvod.

[čtverec se stranou $a = 4cm$]

Úloha 3.1.20 Tvrdý papír obdelníkového tvaru má rozměry $60\,cm$ a $28\,cm$. V rozích se vystřihnou stejné čtverce a zbytek se ohne do tvaru otevřené krabice. Jak dlouhá musí být strana x odstřižených čtverců, aby objem krabice byl maximální?

[$x = 12\,cm$]

Úloha 3.1.21 Obchod prodává skateboardy za 40 dolarů za kus a při této ceně prodá měsíčně 50 skateboardů. Majitel obchodu chce zvýšit cenu a očekává, že každý dolar zvýšení ceny přinese snížení prodeje skateboardů o 2 kusy za měsíc. Jestliže majitel nakupuje skateboardy za cenu 25 dolarů, při jaké prodejní ceně bude jeho měsíční zisk maximální?

[$x = 45\,\$$]

Úloha 3.1.22 Město Bory je 10 km východně od města Akáty a město Cédry je 3 km jižně od města Bory. Z A do C se má postavit silnice, a to tak, že se využije dálnice z A do B, přičemž se do C odbočí v nějakém bodě P na trase A-B. Náklady na přestavbu dálnice jsou 4 miliony Kč na 1 km, zatímco cena na stavbu silnice kdekoliv jinde je 5 milionu Kč na 1 km. Jak daleko od města A se má umístit bod P tak, aby stavba byla co nejlevnější a jaká bude tato cena?

[$6\,km$ od města Akáty, stavba bude stát $49\cdot 10^6$ Kč]

Úloha 3.1.23 Zjistěte rozměry otevřeného bazénu o daném objemu $32\,m^3$ se čtvercovým dnem tak, aby na vyzdění jeho stěn a dna bylo použito co nejmenší množství materiálu.

$\left[a = 4\,m,\, v = 2\,m\right]$

Úloha 3.1.24 Najděte rovnoramenný trojúhelník, který má při daném obvodu minimální obsah.

[rovnostranný trojúhelník se stranou $a = \dfrac{o}{3}$, o je jeho obvod]

Úloha 3.1.25 Roh v 1. kvadrantu potřebujeme uzavřít závorou délky 20 metrů přes body $[a,\,0]$, $[0,\,b]$ tak, aby uzavřený segment tvaru trojúhelníku měl maximální plošný obsah. Pro jaké hodnoty a, b to nastane?

$\left[a = b = 10 \cdot \sqrt{2}\,m\right]$

Použitá literatura

[1] Gavalcová, T., Haviger, J., Pražák, P., Vaněk, V.: Úvod do matematiky, Gaudeamus, Hradec Králové, 2007, ISBN 978-80-7041-225-1

[2] Pražák, P.: Základy matematiky 1,Gaudeamus, Hradec Králové, 2005, ISBN 80-7041-511-8

[3] Petáková, J.: Matematika, příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, Praha, 2005, ISBN 80-7196-099-3

[4] Hrubý, D., Kubát, J.: Matematika pro gymnázia - Diferenciální a integrální počet, Prometheus, 1997, ISBN 978-80-7196-363-9

[5] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, Praha, 2008, ISBN 978-80-7196-356-1

[6] Odvárko, O.: Matematika pro gymnázia - Posloupnosti a řady, Prometheus, Praha, 1995, 978-80-7196-195-7

[7] Osička, J.: Matematika pro chemiky, Masarykova univerzita, Brno, 2007, 80-210-2083-0

Seznam používaných symbolů

$\forall x \in A: \; V(x)$	pro každé x z A platí vlastnost (předpis) V
$\exists x \in A: \; V(x)$	existuje alespoň jedno x z A takové, že pro něj platí vlastnost (předpis) V
$a \wedge b$	a konjunkce b (a a zároveň b)
$a \vee b$	a disjunkce b (a nebo b)
$a \Rightarrow b$	a implikuje b
$a \Leftrightarrow b$	a je ekvivalentní s b
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0$	množina přirozených čísel s nulou
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
(a, b)	otevřený interval, množina $x \in \mathbb{R}; a < x < b$
$\langle a, b\rangle$	uzavřený interval, množina $x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b$
$\langle a, b)$	zleva uzavřený interval, množina $x \in \mathbb{R}; a \leq x < b$
$a, b\rangle$	zprava uzavřený interval, množina $x \in \mathbb{R}; a < x \leq b$
$U_\delta(a)$	delta okolí bodu a; interval$(a - \delta, a + \delta)$
$P(a)$	prstencové okolí bodu $a(U(a) - a)$
$P^-(a)$	levé prstencové okolí bodu a
$P^+(a)$	pravé prstencové okolí bodu a
D_f	definiční obor funkce f
H_f	obor hodnot funkce f
$[x, y]$, $[f(x), f(y)]$	souřadnice bodu,souřadnice bodu, který náleží grafu funkce
$f^(- 1)$	funkce inverzní k funkci f
$f \circ g$	f složená s g
$\triangle\ x, h$	přírůstek argumentu
$\triangle\ y$	přírůstek funkce
$x \to a$	x se blíží k (konverguje) a
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	limita funkce f v bodě a
$\lim\limits_{\substack{+ \\ x \to a}} f(x)$	limita funkce f v bodě a zprava
$\lim\limits_{\substack{- \\ x \to a}} f(x)$	limita funkce f v bodě a zleva
$y', f'(x)$	první derivace funkce $y = f(x)$
$f'(a)$	hodnota první derivace funkce $y = f(x)$ v bodě a
$y'', f''(x)$	druhé derivace funkce $y = f(x)$
$f''(a)$	hodnota druhé derivace funkce $y = f(x)$ v bodě a

Název:	Vybrané kapitoly z matematiky
Autor:	Mgr. Vladimír Vaněk, Ph.D.
Rok:	2013
Místo:	Olomouc