INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rozšíření akreditace učitelství matematiky a učitelství deskriptivní geometrie
na PřF UP v Olomouci o formu kombinovanou

CZ.1.07/2.2.00/18.0013

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Projektivní geometrie

Marie Chodorová

Olomouc, 2013

Oponenti: RNDr. Miloslava Sedlářová, CSc.
RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.

ISBN 978-80-244-4000-2

Obsah

Úvod

Tento text by měl sloužit studentům deskriptivní geometrie jako opora pro předmět Projektivní geometrie. Výklad této látky je přizpůsoben spíše samostudiu. Pro studium tohoto textu je zapotřebí vrozené geometrické představivosti, a tudíž není ani zapotřebí nějakých hlubších geometrických znalostí. Většina uvedených vět je intuitivních a není tak u každé věty uveden důkaz. Velká část textu je věnována příkladům a jejich řešení. Pro jednoduchost je v závěru publikace ke každému řešenému příkladu uvedeno navíc i jeho grafické zadání. U většiny zadání příkladů je přerušovanou čarou předrýsovaná samotná kuželosečka, a to z důvodu názornosti a ověření si správnosti výsledku.

Samotná Projektivní geometrie představuje takovou geometrii, která zkoumá vlastnosti, které se nemění u projektivních transformací, tedy zabývá se těmi vlastnosti, které se zachovávají středovým promítáním. Studium těchto vlastností si vynutily hlavně potřeby malířství v 16. století. V té době žil a také tvořil jeden z nejvýznamnějších malířů a perspektivců Leonardo da Vinci. Ale za zakladatele projektivní geometrie je považován Jean-Victor Poncelet, který připravil základy ke studiu projektivních vlastností kuželoseček, kterým je také věnována podstatná část tohoto textu.

Model pro tuto geometrii je obvykle projektivní rovina anebo projektivní prostor. V této geometrii jsou definovány body a přímky, nikoli však úhly a vzdálenosti. Pojem orientovaná vzdálenost je uveden v afinní geometrii, ale ta se na rozdíl od projektivní geometrie zabývá studiem invariantů, které se zachovávají při rovnoběžném promítání. Dále projektivní geometrie nerozlišuje vlastní a nevlastní body a tudíž nedělí kuželosečky podle průniku s nevlastní přímkou na elipsu, parabolu a hyperbolu, ale popisuje jen kuželosečku zadanou pěti podmínkami bez rozdílu. Rozdělení kuželoseček, tak jak je známe z konstrukční geometrie, je uvedeno až v afinní geometrii, protože rovnoběžné promítání zobrazí vlastní body na vlastní a nevlastní na nevlastní, což neplatí pro středové promítání.

Upřímně děkujeme Mgr. Petru Kozákovi za tvorbu příkladů a obrázků, Bc. Janu Mlčůchovi za psaní v programu LaTeXa recenzentům RNDr. Lence Juklové, Ph.D. a RNDr. Miloslavě Sedlářové, CSc. za jejich cenné připomínky.

Seznam ikon užívaných v textu

Dále jsou uvedeny ikony označující prvky podporující studenta při studiu, tj. odkazy, otázky, úkoly, korespondenční úkoly apod. s vysvětlivkami:

Cíle

Na začátku každé kapitoly naleznete konkrétně formulované cíle. Jejich prostřednictvím získáte přehled o tom, co budete po nastudování příslušného tématického celku umět, znát, co budete schopni dělat.

Motivace

Odstavec, v němž by mělo být vysvětleno, proč se danou problematikou vůbec hodláme zabývat. Motivujte studenty k tomu, aby studovali právě tuto pasáž.

Průvodce studiem

Pasáž, v níž „zbavíme studenta strachu z nového učiva“, poukážeme na propojenost učiva s předchozí kapitolou, uvedeme, co již student zná z předmětu v předchozím ročníku, ze SŠ, s čím se setkal v praxi...

Otázka k zamyšlení

Měla by vás podněcovat k přemýšlení, k úvahám, k hledání vlastního řešení. Je to prostor, který vám nabízím k vyjádření osobního názoru, postoje k studované problematice. Odpovědi na tyto otázky si formulujete sami, bývají předmětem diskusí na prezenčních setkáních, jsou součástí zkoušky (často je pokládají examinátoři).

Pasáž pro zájemce

Tato část textu je určena těm z vás, kteří máte zájem o hlubší studium problematiky, nebo se chcete dozvědět i nějaké zajímavé podrobnosti vztahující se k tématu. Vše, co najdete v této pasáži, je nepovinné, tudíž zcela dobrovolné. Zmíněné informace po vás nebudou vyžadovány u zkoušky.

Úkol

Jeho prostřednictvím budete vybídnuti k tomu, abyste na základě studia určité tématiky něco vytvořili, zpracovali, konkrétně uvedli za předpokladu, že už máte jisté znalosti. Má převážně aplikační charakter. Správné (možné) řešení najdete k některým úkolům (dle obsahu, zaměření) v klíči.

Doporučení

Dobrá rada, doporučení, něco, co studentům „usnadní" práci, dovede je rychleji k cíli, pomůže vyhnout se chybám apod.

Upozornění

Slouží pro upozornění na nějakou chybu, které se studenti často (a úplně zbytečně) zejména pro nepozornost dopouštějí.

Odkazy na on-line zdroje

Slouží jako místo pro odkazy na další zdroje, které lze nalézt na internetu.

Shrnutí kapitoly

Tato pasáž postihuje ve stručné podobě to nejdůležitější, o čem konkrétní kapitola pojednává. Má význam pro opakování, aby se vám informace a klíčové body probírané látky lépe vybavily. Pokud zjistíte, že některému úseku nerozumíte, nebo jste jej dostatečně neprostudovali, vraťte se k příslušné pasáži v textu.

Pojmy k zapamatování

Na konci každé kapitoly najdete klíčové pojmy, které byste měli být schopni vysvětlit. Jde o důležitý terminologický aparát a jména, jež je nezbytné znát. Po prvním prostudování kapitoly si je zkuste sami pro sebe objasnit, vracejte se k nim i při dalším čtení a opakování dokud si je dostatečně nezafixujete v paměti.

Kontrolní otázky

Prověřují, do jaké míry jste učivo pochopili, zapamatovali si podstatné informace a zda je umíte aplikovat. Najdete je na konci každé kapitoly. Jejich prostřednictvím zjistíte, jestli jste splnili formulované cíle. Jsou velmi důležité, věnujte jim proto náležitou pozornost. Odpovědi na ně můžete najít ve více či méně skryté formě přímo v textu.

Úlohy k procvičení

Tyto pasáže mají za úkol učivo procvičit, zopakovat, upevnit. Pomáhají vám fixovat poznatky.

Klíč

Obsahuje patřičné odpovědi a možná řešení k úkolům. Můžete si zkontrolovat správnost své odpovědi na konkrétní (ale ne na každý) úkol.

Literatura

V této části najdete přehled všech zdrojů a literatury, ze které jsem čerpala při zpracovávání textu. Tento seznam slouží také jako zdroj informací pro zájemce o další podrobnější studium a doplnění poznatků.

Kapitola 1

Základní pojmy projektivní geometrie

Projektivní geometrie se zabývá pojmy, které se promítáním (rovnoběžným, středovým) nemění.

Nezbytnou součástí studia deskriptivní geometrie je znalost projektivní geometrie. Seznámíme se se základními pojmy projektivní geometrie tak, abychom je mohli použít při studiu deskriptivní geometrie. Základní pojmy si osvojíme tak, abychom je mohli používat při projektivním zavedení kuželoseček a aplikovat je při řešení úloh o kuželosečkách.

Nezbytnou součástí studia deskriptivní geometrie je znalost projektivní geometrie. Seznámíme se se základními pojmy projektivní geometrie tak, abychom je mohli použít při studiu deskriptivní geometrie. Základní pojmy si osvojíme tak, abychom je mohli používat při projektivním zavedení kuželoseček a aplikovat je při řešení úloh o kuželosečkách.

1.1 Incidence

Věta 1.1.1 *Jsou-li dva útvary navzájem incidentní, pak také jejich průměty jsou incidentní. Stručně: incidence se promítáním zachovává.*

1.2 Afinní roviny

Definice 1.2.1 *Afinní rovina* je uspořádaná dvojice množin $(\mathcal{B}, \mathcal{P})$, kde $\mathcal{B}$ je neprázdná množina prvků, $\mathcal{P}$ je systém jistých podmnožin množiny $\mathcal{B}$ a jsou splněny axiomy A1, A2, A3.

A1 $\forall X, Y \in \mathcal{B}, X \neq Y, \exists! p \in \mathcal{P} : X, Y \in p$

A2 $\forall X \in \mathcal{B}, \forall p \in \mathcal{P}, \exists! q \in \mathcal{P} : X \in q \wedge q \| p$

A3 Existují tři nekolineární body.

Prvky z množiny $\mathcal{B}$ nazýváme body. Prvky z množiny $\mathcal{P}$ nazýváme přímkami. Afinní rovinu budeme značit $\alpha = (\mathcal{B}, \mathcal{P})$. Dvě přímky p, q, které nemají žádný společný bod nebo splývají, nazýváme rovnoběžkami a značíme $p \| q$. Dvě přímky, které mají právě jeden společný bod, budeme nazývat různoběžkami.

Uveďte příklady afinních rovin.

i) Eukleidovská rovina.

ii) Nechť množina $\mathcal{B}$ obsahuje čtyři prvky a $\mathcal{P}$ obsahuje všechny dvouprvkové podmnožiny množiny $\mathcal{B}$. Potom $\alpha = (\mathcal{B}, \mathcal{P})$ je čtyřbodová afinní rovina. Pokuste se ji znázornit.

iii) Nechť množina $\mathcal{B}$ obsahuje devět prvků a $\mathcal{P}$ jsou tříprvkové podmnožiny množiny $\mathcal{B}$. Potom $\alpha = (\mathcal{B}, \mathcal{P})$ je devítibodová afinní rovina. Pokuste se ji znázornit.

Z této definice je možné odvodit řadu vlastností afinní roviny. Například že rovnoběžnost přímek v afinní rovině je relace ekvivalence nebo že každé dvě různé přímky mají nejvýše jeden společný bod.

Věta 1.2.1 *Každá přímka v afinní rovině obsahuje alespoň dva různé body.*

Jelikož je z axiomů zajištěna jak existence alespoň jednoho páru různoběžek, tak i jednoho páru rovnoběžek, mohou mít dvě různé přímky v afinní rovině právě jeden nebo žádný společný bod. Tato vlastnost bude důležitá zejména při porovnávání afinní a projektivní roviny. Při studiu vzájemných vztahů afinní a projektivní roviny využijeme také následujících pojmů.

Definice 1.2.2 *Svazek rovnoběžek* v afinní rovině je množina všech přímek rovnoběžných s danou přímkou p afinní roviny. Značíme $[\, p \,]$.

Definice 1.2.3 *Svazek přímek* v afinní rovině je množina všech přímek procházejících daným bodem P afinní roviny. Bod P nazýváme *středem svazku* a svazek značíme $[\, P \,]$.

Věta 1.2.2 *V každé afinní rovině existují alespoň tři různé svazky rovnoběžek a tři různé svazky přímek.*

Z definice afinní roviny lze dále odvodit, že každá afinní rovina obsahuje alespoň čtyři body, které jsou po třech nekolineární. Navíc lze ukázat, že existuje afinní rovina, která obsahuje právě čtyři body. Vedle konečných afinních rovin, kterými se dále nebudeme zabývat, existují také nekonečné afinní roviny. Příkladem nekonečné afinní roviny je eukleidovská rovina, jelikož splňuje všechny axiomy afinní roviny. Při hlubším studiu zjišťujeme, že afinní geometrie pracuje s vlastnostmi, které se zachovávají při rovnoběžném promítání.

1.3 Projektivní roviny

Oproti tomu projektivní geometrie studuje vlastnosti, které se zachovávají středovým promítáním, a celá teorie je vybudována na předpokladu, že každé dvě různé přímky v téže rovině mají společný právě jeden bod. Při studiu projektivní geometrie opět vyjdeme z axiomů a základních pojmů.

Definice 1.3.1 *Projektivní rovina* je uspořádaná dvojice množin $(\mathcal{B}, \mathcal{P})$, kde $\mathcal{B}$ je neprázdná množina prvků, $\mathcal{P}$ je systém jistých podmnožin množiny $\mathcal{B}$ a jsou splněny axiomy P1, P2, P3.

P1 $\forall X, Y \in \mathcal{B}, X \neq Y, \exists! p \in \mathcal{P} : X, Y \in p$

P1 $\forall p, q \in \mathcal{P}, p \neq q, \exists! X \in \mathcal{B} : X \in p \wedge X \in q$

P1 Existují čtyři body po třech nekolineární.

Prvky z množiny $\mathcal{B}$ opět nazýváme body a prvky z množiny $\mathcal{P}$ přímkami. Projektivní rovinu budeme značit $\pi = (\mathcal{B}, \mathcal{P})$.

Uveďte příklady projektivních rovin.

i) Nechť $\mathcal{B}$ obsahuje sedm prvků a $\mathcal{P}$ obsahuje všechny tříprvkové podmnožiny množiny $\mathcal{B}$. Potom $\pi = (\mathcal{B}, \mathcal{P})$ je sedmibodová projektivní rovina. Pokuste se ji znázornit. (Tuto projektivní rovinu lze získat také tzv. projektivním rozšířením afinní roviny, viz kapitola 1.4)

ii) V trojrozměrném euklidovském prostoru E_3 je dán pevný bod 0. Množiny $\mathcal{B}, \mathcal{P}$ zvolme takto: $\mathcal{B}$ je množina všech přímek v E_3, které procházejí bodem O, přičemž každou rovinu chápeme jako množinu přímek, které v ní leží a procházejí bodem O. Dvojice $\pi = (\mathcal{B}, \mathcal{P})$ splňuje všechny axiomy projektivní roviny, je tedy modelem projektivní roviny.

iii) Rozšířená euklidovská rovina je rovněž příkladem projektivní roviny.

Axiom P2 vylučuje existenci přímek, které by neměly žádný společný bod. V projektivní rovině tedy obecně nezavádíme pojmy rovnoběžnost a svazek rovnoběžek. Oproti tomu pojem svazek přímek lze zavést analogicky jako v případě afinní roviny.

Definice 1.3.2 *Svazek přímek* o středu P v projektivní rovině π je množina všech přímek $p \subset \pi$ procházejících daným bodem P. Značíme $P\,(a, b, c, \dots)$ nebo $[\,P\,]$.

V následujících větách uvedeme některé vlastnosti projektivních rovin.

Věta 1.3.1 *Každá přímka v projektivní rovině obsahuje alespoň tři různé body.*

Věta 1.3.2 *V projektivní rovině existují alespoň čtyři přímky, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem.*

Věta 1.3.3 *V projektivní rovině ke každým dvěma různým přímkám p, q existuje bod R, který neleží na žádné z nich.*

Stejně jako v případě afinní roviny existují konečné i nekonečné projektivní roviny. Nejmenší konečná projektivní rovina obsahuje právě sedm bodů. Dále se opět zaměříme pouze na nekonečné projektivní roviny.

1.4 Vztahy mezi afinními a projektivními rovinami

Mezi afinní a projektivní rovinou lze nalézt vzájemný vztah, kdy každou afinní rovinu můžeme rozšířit na rovinu projektivní a naopak z každé projektivní roviny vytvořit rovinu afinní. K tomu účelu definujeme nevlastní prvky[1] afinní roviny a následně uvedeme věty, které tento vzájemný vztah popisují.

Definice 1.4.1 Nechť α je afinní rovina a p je libovolná přímka z této roviny. Svazek rovnoběžek $[\,p\,]$ budeme nazývat *nevlastním bodem* přímky p. Značíme $P_\infty = [\,p\,]$. Množinu všech nevlastních bodů roviny α budeme nazývat *nevlastní přímkou* afinní roviny α a označíme ji n_∞. Ostatní body a přímky nazýváme *vlastními.*

Věta 1.4.1 *Nechť $\alpha = (\mathcal{B}, \mathcal{P})$ je afinní rovina. Nechť $\overline{\mathcal{B}}$ je množina obsahující všechny vlastní i nevlastní body roviny α. A nechť $\overline{\mathcal{P}}$ obsahuje nevlastní přímku roviny α a všechny přímky z množiny $\mathcal{P}$ doplněné o příslušné nevlastní body. Potom $\overline{\alpha} = \left(\overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{P}}\right)$ je projektivní rovina, která se nazývá projektivním rozšířením afinní roviny α.*

Věta 1.4.2 *Nechť $\pi = (\mathcal{B}, \mathcal{P})$ je projektivní rovina a $n \subset \pi$ je libovolná pevně zvolená přímka. Položme $\overline{\mathcal{B}}_n = \mathcal{B} \setminus \{n\}$, $\overline{\mathcal{P}}_n = \{\overline{p} = p \setminus \{p \cap n\}, p \in \mathcal{P}, p \neq n\}$. Potom $\overline{\pi} = \left(\overline{\mathcal{B}}_n, \overline{\mathcal{P}}_n\right)$ je afinní rovina, která byla vytvořena restrikcí projektivní roviny π.*

Eukleidovská rovina je afinní rovinou, lze ji tedy také projektivně rozšířit. Dostaneme tzv. *rozšířenou eukleidovskou rovinu* $\overline{E_2}$. Směry v této rovině považujeme za nevlastní body a množinu všech nevlastní bodů za nevlastní přímku. Tím dostáváme projektivní rovinu, ve které je navíc pro vlastní prvky definována metrika.

1.5 Dělicí poměr a dvojpoměr

K zavedení dalšího pojmu, se kterým pracujeme v projektivní geometrii, musíme mít definovánu vzdálenost bodů. Budeme tedy pracovat v rozšířené eukleidovské rovině. Jelikož jsme však každou přímku eukleidovské roviny rozšířili o nevlastní bod, musíme rozšířit také množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ o jeden prvek $\{\infty\}$ a definovat pro tento prvek početní operace. Označme $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \infty : a + \infty = \infty\,;\ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : a \cdot \infty = \infty,\ a : \infty = 0,\ a : 0 = \infty$$

! Nedefinujeme: $\infty \pm \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{\infty}{0}, \frac{0}{\infty}, \ldots$

[1]Nevlastní body a nevlastní přímku zavedl francouzský matematik Girard Desargues roku 1639.

Definice 1.5.1 Vzdálenost bodů A, B přímky p měřená od bodu A k bodu B se nazývá *orientovaná vzdálenost* a značíme ji $|\overrightarrow{AB}|$. Je-li $A = B$, pak $|\overrightarrow{AB}| = 0$. Je-li právě jeden z bodů A, B nevlastní, pak $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = \infty$.

! Tato orientovaná délka úsečky je zřejmě číslo a toto číslo zvolíme kladné nebo záporné podle tohoto předpisu.

Je-li smysl od bodu A k bodu B kladný, je $|\overrightarrow{AB}| > 0$.

Je-li smysl od bodu A k bodu B záporný, je $|\overrightarrow{AB}| < 0$.

Jestliže $A = B$, potom je $|\overrightarrow{AB}| = 0$.

Zřejmě platí $|\overrightarrow{AB}| = -|\overrightarrow{BA}|$.

! Každou přímku p může bod A probíhat ve dvou vzájemně opačných smyslech, jeden z nich nazveme kladným a druhý záporným.

Podobně, jsou-li A, B, C tři libovolné body na přímce, platí $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}| = 0$. Nechť D je čtvrtý bod na zvolené přímce a vynásobíme-li předchozí vztah vztah číslem $|\overrightarrow{AD}|$ dostaneme $|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{AD}| = 0$. Za $|\overrightarrow{AD}|$ dosadíme $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CD}|$, tak dostaneme

$$|\overrightarrow{AB}| \cdot \left(|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CD}|\right) + |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| - |\overrightarrow{AC}| \cdot \left(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BD}|\right) = 0$$

odkud po úpravě vychází $|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{BD}| + |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}| = 0$.

Definice 1.5.2 Nechť A, B jsou dva různé vlastní body přímky p a bod C je libovolný bod téže přímky p. Je-li bod C vlastní, potom označme $\lambda_C = |\overrightarrow{AC}| : |\overrightarrow{BC}|$. Je-li C bod nevlastní, je $\lambda_C = 1$. Číslo $\lambda_C \in \overline{\mathbb{R}}$ potom nazýváme *dělicí poměr* bodu C vzhledem k bodům A, B. Značíme $\lambda_C = (ABC)$.

Σ Máme-li na přímce p pevně dány dva různé vlastní body A, B, pak každému bodu C přímky p je jednoznačně přiřazena jediná hodnota dělicího poměru λ_C. A obráceně každé hodnotě $\lambda_C \in \overline{\mathbb{R}}$ je jednoznačně přiřazen právě jeden bod C tak, že $\lambda_C = (ABC)$. Pro $A = C$, resp. $B = C$, dostáváme $\lambda_C = 0$, resp. $\lambda_C = \infty$. Je-li bod C středem úsečky AB, pak $\lambda_C = -1$.

1. $(ABC) = \lambda$
2. $(BAC) = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{\lambda}$
3. $(ACB) == \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{CB}|}{-|\overrightarrow{BC}|} = 1 - \lambda$
4. $(CAB) == \frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{1-\lambda}$
5. $(BCA) == \frac{|\overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{CA}|} = 1 - (BAC) = \frac{\lambda-1}{\lambda}$
6. $(CBA) == \frac{1}{(BCA)} = \frac{\lambda}{\lambda-1}$

Orientovaná vzdálenost ani dělicí poměr se při středovém promítání nezachovávají a tudíž nejsou předmětem studia projektivní geometrie. Dělicí poměr se však zachovává rovnoběžným promítáním a je tedy pojmem afinní geometrie.

Definice 1.5.3 Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body přímky p, přičemž body A, B jsou vlastní. Potom poměr $\mu = \lambda_C : \lambda_D$, kde λ_C a λ_D jsou dělicí poměry bodů C, D vzhledem k bodům A, B, se nazývá *dvojpoměr* bodů A, B, C, D v tomto pořadí a značí se $\mu = (ABCD)$.

Pro nevlastní bod C_∞, resp. D_∞, dostáváme užitím definice orientované vzdálenosti a definice dělicího poměru následující rovnosti.

$$\mu = (ABC_\infty D) = (ABC_\infty) : (ABD) = 1 : \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BD}|} = \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AD}|} = (BAD)$$

$$\mu = (ABCD_\infty) = (ABC) : (ABD_\infty) = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} : 1 = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = (ABC)$$

Následující věta uvádí některé další vlastnosti dvojpoměru, které lze odvodit přímo z jeho definice, z definice dělicího poměru a vlastností orientované vzdálenosti.

Věta 1.5.1 *Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé vlastní body přímky p, pak platí $(ABCD) = (CDAB)$, $(ABCD) = (BADC)$, $(ABCD) = 1 : (ABDC)$, $1 - (ABCD) = (ACBD)$.*

Důkaz:

$$(ABCD) = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} : \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BD}|} = \frac{-|\overrightarrow{CA}|}{-|\overrightarrow{CB}|} : \frac{-|\overrightarrow{DA}|}{-|\overrightarrow{DB}|} = \frac{|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{DA}|} : \frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{DB}|} = (CDAB)$$

$$(ABCD) = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} : \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BD}|} = \left[\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}|}\right]^{-1} \cdot \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AD}|} : \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}|} = (BADC)$$

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \left[\frac{(ABD)}{(ABC)}\right]^{-1} = 1 : \frac{(ABD)}{(ABC)} = 1 : (ABDC)$$

$$1 - (ABCD) = 1 - \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} : \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BD}|} = \frac{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| - |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} =$$

$$= \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CB}|} : \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{CD}|} = (ACBD)$$

$\square$

Tato věta platí pouze pro body vlastní, jelikož v definici dvojpoměru vyžadujeme, aby body A a B byly vlastní. Definici dvojpoměru však můžeme rozšířit i pro body nevlastní a tím rozšířit i danou větu pro body nevlastní.

Definice 1.5.4 Nechť A, B, C, D jsou navzájem různé body vlastní přímky p. Jestliže některý z bodů A, B je nevlastní, pak dvojpoměr těchto bodů definujeme vztahem
$(ABCD) = (CDAB)$.

Máme tedy definován dvojpoměr pro každou čtveřici navzájem různých bodů ležících na vlastní přímce. Pro každou takovouto čtveřici bodů existuje maximálně šest různých hodnot dvojpoměrů, kterých mohou nabývat v závislosti na jejich uspořádání. Přičemž dvojpoměr čtyř různých bodů může nabývat všech reálných hodnot kromě 0 a 1.

1. $(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA) = \mu$
2. $(ABDC) = (DCAB) = (BACD) = (CDBA) = \dfrac{1}{\mu}$
3. $(ACBD) = (BDAC) = (CADB) = (DBCA) = 1 - \mu$
4. $(ADBC) = (BCAD) = (DACB) = (CBDA) = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$
5. $(ACDB) = (DBAC) = (CABD) = (BDCA) = \dfrac{1}{1 - \mu}$
6. $(ADCB) = (CBAD) = (DABC) = (BCDA) = \dfrac{\mu}{\mu - 1}$

Definici dvojpoměru lze rozšířit, aby zahrnovala i případ, kdy dva vlastní body z daných čtyř bodů splynou. Jsou-li body A, B, C tři navzájem různé vlastní body, můžeme definovat $(ABCD) = \infty$ pro $A = D$, $(ABCD) = 0$ pro $B = D$ a $(ABCD) = 1$ pro $C = D$. Pro takto definovaný dvojpoměr a pro pevně zvolené různé vlastní body A, B, C přímky p je každému bodu přímky p přiřazena jediná hodnota dvojpoměru $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$. A obráceně ke každé hodnotě $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ lze sestrojit jediný bod D přímky p takový, že $\mu = (ABCD)$.

Podle znaménka dvojpoměru můžeme rozlišovat vzájemnou polohu čtyř různých bodů na přímce. Je-li hodnota dvojpoměru $(ABCD)$ záporná, říkáme, že se dvojice bodů A, B a C, D oddělují. Je-li $(ABCD) > 0$, říkáme, že se neoddělují[2].

V projektivní rovině je přímka uzavřená křivka.

V případě, kdy dvojpoměr nabývá některé z hodnot $\{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ dostáváme místo šesti různých hodnot dvojpoměrů hodnoty pouze tři. Dvojpoměr $\mu = -1$ má zvláštní význam v teorii kuželoseček, a proto si uvedeme některé jeho vlastnosti, které plynou z vlastností dvojpoměru.

Definice 1.5.5 Je-li $(ABCD) = -1$ říkáme, že body A, B, C, D tvoří *harmonickou čtveřici* nebo že body C, D jsou *harmonicky sdruženy* s body A, B nebo že bod D je *harmonicky sdružen* s bodem C vzhledem k bodům A, B nebo že bod D je *čtvrtý harmonický* k bodům A, B, C.

Věta 1.5.2 *Jsou-li body C, D harmonicky sdruženy vzhledem k bodům A, B, pak jsou také body A, B harmonicky sdruženy vzhledem k bodům C, D.*

Věta 1.5.3 *Jsou-li body C, D harmonicky sdruženy vzhledem k bodům A, B, pak jsou také body D, C harmonicky sdruženy vzhledem k bodům A, B i k B, A.*

Zatím nemáme definován dvojpoměr pro čtveřici nevlastních bodů. K tomu potřebujeme následující větu, která navíc říká, že dvojpoměr je pojmem projektivní geometrie.

Dělicí poměr, dvojpoměr, nevlastní bod, nevlastní přímka, harmonická čtveřice.

[2] Dvojice bodů A, B a C, D na přímce se oddělují, jestliže mezi body A, B leží právě jeden z bodů C, D.

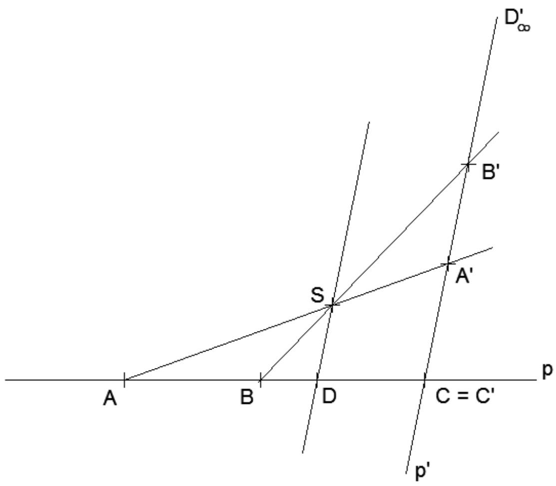
1.6 Pappova věta a její důsledky

Nejdůležitější vlastnost dvojpoměru znal už Pappos z Alexandrie.

Věta 1.6.1 ***(Pappova)*** *Dvojpoměr se středovým promítáním nemění.*

Uvedené věty využíváme ke konstrukci:

Konstrukce 1.6.1 Na přímce p jsou dány tři různé body A, B, C. Sestrojte bod D tak, aby $(ABCD) = \mu$, kde μ je dané reálné číslo.



Obr. 1.6.1

Postup (Obr.1.6.1): Bodem C vedeme přímku $p', (p' \neq p)$. Položíme $C = C'$ a na přímce p' najdeme body A', B' tak, aby $(A'B'C') = \mu, S = AA' \cap BB'$. Průsečík přímky, která je rovnoběžná s přímkou p' a prochází bodem S, s přímkou p je hledaný bod D. Jestliže $C = C'$ a nevlastní bod přímky p' označíme jako D'_∞, pak podle Věty 1.5.1 platí $(ABCD) = (A'B'C'D'_\infty)$.

Cvičení:
Na přímce p jsou dány tři různé body A, B, C. Sestrojte bod D tak, aby $(ABCD) = -1$

Pappova věta umožňuje zavést dvojpoměr čtyř přímek procházejících jedním bodem. Pomocí dvojpoměru přímek poté definujeme dvojpoměr čtyř nevlastních bodů.

Definice 1.6.1 Nechť a, b, c, d jsou čtyři navzájem různé přímky projektivní roviny, které procházejí bodem S. Dvojpoměr přímek $(abcd)$ definujeme jako dvojpoměr čtyř bodů A, B, C, D, které jsou průsečíky libovolné vlastní přímky p neprocházející bodem S s přímkami a, b, c, d.

Definice 1.6.2 Je-li $(abcd) = -1$ říkáme, že přímky a, b, c, d tvoří *harmonickou čtveřici* nebo že c, d jsou *harmonicky sdruženy* s přímkami a, b nebo že přímka d je *harmonicky sdružena* s přímkou c vzhledem k přímkám a, b nebo že přímka d je *čtvrtá harmonická* k přímkám a, b, c.

Definice 1.6.3 Nechť A_∞, B_∞, C_∞, D_∞ jsou čtyři navzájem různé nevlastní body projektivní roviny. Dvojpoměr $(A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty)$ těchto bodů definujeme jako dvojpoměr přímek $(abcd)$, kde $a = SA_\infty$, $b = SB_\infty$, $c = SC_\infty$, $d = SD_\infty$ a bod S je libovolný vlastní bod projektivní roviny.

? V čem spočívá význam Pappovy věty?

1.7 Princip duality

Při podrobnějším studiu projektivní geometrie lze mezi určitými páry vět této teorie nalézt vzájemný vztah, tzv. *princip duality*[3].

Následující věta tento vztah popisuje.

Věta 1.7.1 *Z každé věty V plynoucí v projektivní rovinné geometrii z axiomů P1, P2, P3 dostaneme novou platnou větu V^*, tzv. duální větu, zaměníme-li pojmy bod a přímka, prochází bodem a leží na přímce, protneme a spojíme, kolineární a procházející jedním bodem.*

Obsahuje-li nějaká věta projektivní geometrie pouze pojmy, ke kterým lze vytvořit pojmy duální, je možné k této větě vyslovit větu duální, kterou již není třeba dokazovat. Případný důkaz by probíhal duálně k důkazu věty původní.

Platnost principu duality v projektivní rovinné geometrii lze zdůvodnit volbou axiomů této teorie. Aplikujeme-li princip duality na axiomy P1, P2 a P3, dostaneme duální axiomy P1*, P2* a P3*.

[3]Princip duality objevil francouzský matematik Jean-Victor Poncelet v roce 1822.

P1* $\forall p, q \in \mathcal{P}, p \neq q, \exists! X \in \mathcal{B} : X \in p \wedge X \in q$

P2* $\forall X, Y \in \mathcal{B}, X \neq Y, \exists! p \in \mathcal{P} : X, Y \in p$

P3* Existují čtyři přímky, z nichž žádné tři neprochází týmž bodem.

Z těchto duálních axiomů lze vybudovat tutéž teorii projektivní rovinné geometrie, která se bude lišit jen formálně. Konkrétně axiom P3 bude v této teorii větou a naopak axiom P3* je větou v naší teorii. Při porovnání obou systémů axiomů je vidět, že axiom P1 je totožný s axiomem P2* a axiom P2 je totožný s axiomem P1*. Tato vlastnost axiomů nám dovoluje zavést princip duality.

V afinní rovinné geometrii princip duality neplatí, jelikož k axiomu A1 neexistuje axiom duální. V teorii afinní rovinné geometrie bychom museli nalézt větu, která by říkala, že každé dvě přímky mají společný právě jeden bod, což je v rozporu v axiomem A2. Dále také nelze dualizovat metrické pojmy afinní geometrie.

Každá věta dokazatelná z jednoho systému axiomů je v duálním znění dokazatelná z duálního systému axiomů.

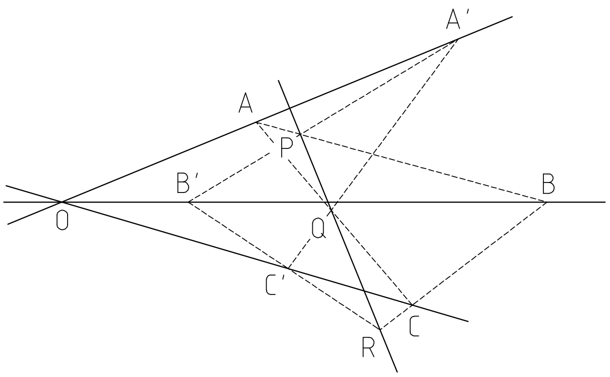
Dualizujte věty, které platí pro projektivní roviny.

1.8 Roviny desarguesovské, pappovské a fanovské

K axiomům z definice projektivní roviny je možné přidat další axiomy a definovat tak projektivní roviny s různými vlastnostmi.

P4 Jsou-li $A, B, C \in \pi$, $A', B', C' \in \pi$ dvě trojice navzájem různých bodů projektivní roviny takové, že $O = AA' \cap BB' \cap CC'$, pak body $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ a $R = BC \cap B'C'$ jsou kolineární (Obr. 1.8.1).

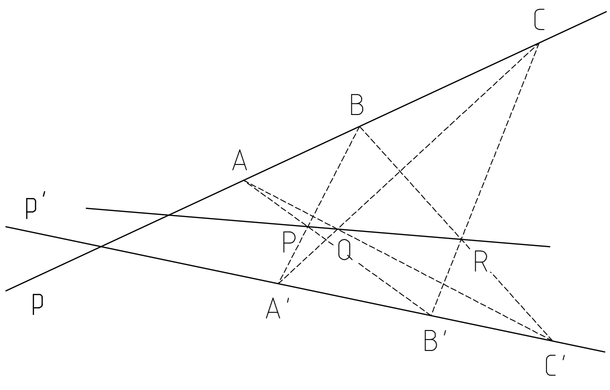
Definice 1.8.1 Projektivní rovina, pro kterou platí Desarguesův axiom P4, se nazývá *desarguesovská*.



Obr. 1.8.1

V projektivní rovině je nutné tuto vlastnost zajistit axiomaticky. V projektivním prostoru ji však lze dokázat ze základních axiomů, jelikož k jejímu důkazu je třeba využít prostorových vlastností, které v projektivní rovině nejsou k dispozici.

P5 Jsou-li $p, p' \subset \pi$ dvě navzájem různé přímky projektivní roviny, $A, B, C \in p$ a $A', B', C' \in p'$ jsou navzájem různé body a různé od průsečíku $p \cap p'$, pak body $P = AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C$ a $R = BC' \cap B'C$ jsou kolineární (Obr. 1.8.2).

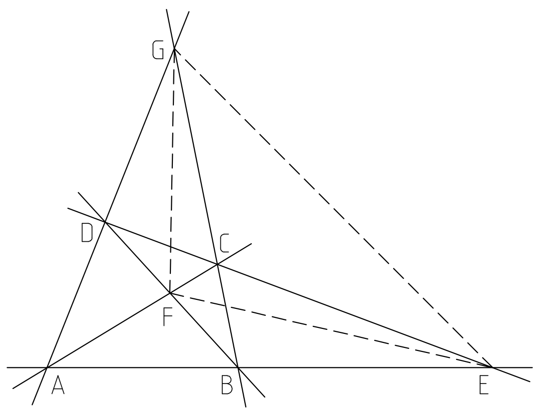


Obr. 1.8.2

Definice 1.8.2 Projektivní rovina, pro kterou platí Pappův axiom P5, se nazývá *pappovská.*

! Mezi rovinami desarguesovskými a pappovskými existuje vzájemný vztah. Každá rovina pappovská je také rovinou desarguesovskou. Existují však roviny, které jsou desarguesovské, ale nejsou pappovské. Před vyslovením dalšího axiomu a axiomu k němu duálního uvedeme definice dvou navzájem duálních pojmů, kterých se tyto axiomy týkají a se kterými budeme nadále pracovat.

Definice 1.8.3 Množina $\{A, B, C, D\} \subset \pi$ čtyř bodů projektivní roviny, z nichž žádné tři nejsou kolineární, se nazývá *úplný čtyřroh.* Body A, B, C, D se nazývají *vrcholy úplného čtyřrohu*, přímky spojující vrcholy se nazývají *strany úplného čtyřrohu.* Dvojice přímek AB a CD, AC a BD, AD a BC se nazývají *protější strany úplného čtyřrohu.* Body $E = AB \cap CD$, $F = AC \cap BD$ a $G = AD \cap BC$ se nazývají *diagonální body úplného čtyřrohu* a tvoří tzv. *diagonální trojúhelník* (Obr. 1.8.3).



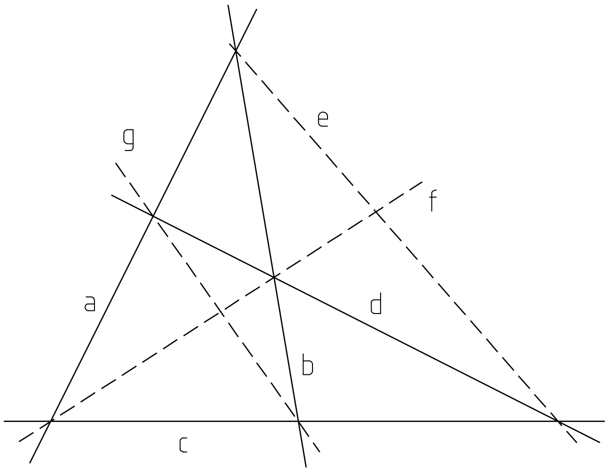
Obr. 1.8.3

Definice 1.8.3* Množina $\{a, b, c, d\} \subset \pi$ čtyř přímek projektivní roviny, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem, se nazývá *úplný čtyřstran.* Přímky a, b, c, d se nazývají *strany úplného čtyřstranu*, průsečíky dvou stran se nazývají *vrcholy úplného čtyřstranu.* Body $a \cap b$ a $c \cap d$, $a \cap c$ a $b \cap d$, $a \cap d$ a $b \cap c$ se nazývají *protější vrcholy úplného čtyřstranu*, přímky e, f, g spojující protější vrcholy se nazývají *diagonální přímky* a tvoří tzv. *diagonální trojúhelník* (Obr. 1.8.4).

P6 Diagonální body E, F, G žádného úplného čtyřrohu obsaženého v projektivní rovině π nejsou kolineární.

P6* Diagonální přímky e, f, g žádného úplného čtyřstranu obsaženého v projektivní rovině π neprocházejí týmž bodem.

Definice 1.8.4 Projektivní rovina, která nesplňuje Fanův axiom P6, se nazývá *fanovská*. V opačném případě se nazývá *antifanovská*.



Obr. 1.8.4

K Desarguesovu a Pappovu axiom je také možné vyslovit axiomy duální. Přičemž splňuje-li projektivní rovina axiom Desarguesův, resp. Pappův, resp. Fanův, pak v ní platí i axiom duální.

Již dříve jsme ukázali, že rozšířená eukleidovská rovina je projektivní rovinou. Zajímá nás tedy, zda splňuje i některý z právě uvedených axiomů. Lze dokázat, že rozšířená eukleidovská rovina je pappovská a antifanovská projektivní rovina. Splňuje tedy všechny uvedené axiomy.

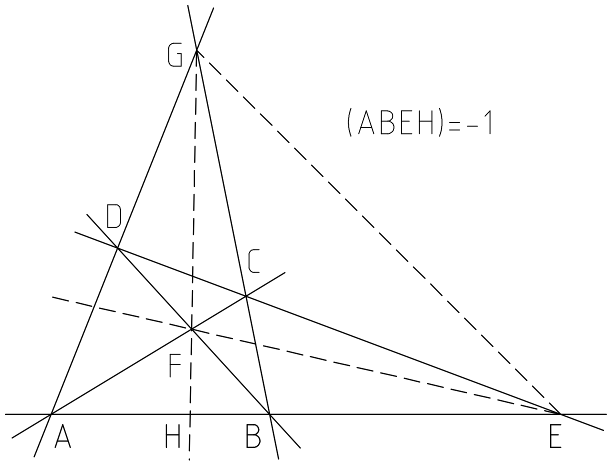
Úplný čtyřroh, úplný čtyřstran.

1.9 Harmonické vlastnosti úplného čtyřrohu a čtyřstranu

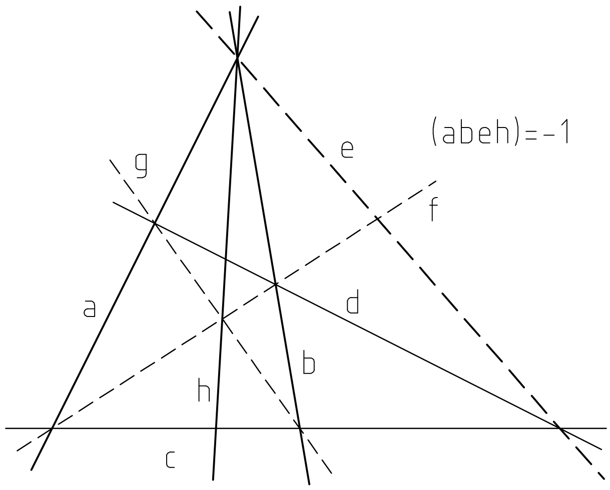
V projektivní geometrii často řešíme úlohu, kdy ke třem prvkům, bodům či přímkám, máme nalézt čtvrtý harmonický prvek. Existuje několik různých konstrukcí, jak čtvrtý harmonický prvek sestrojit. Některé z těchto konstrukcí jsou založeny na metrice a jiné jsou čistě projektivní. Dříve než ukážeme, jak danou úlohu řešit projektivními prostředky, uvedeme několik vlastností úplného čtyřrohu a úplného čtyřstranu, které při řešení využijeme.

Věta 1.9.1 *Na každé straně úplného čtyřrohu tvoří dva vrcholy, diagonální bod a průsečík jeho protější diagonály se stranou harmonickou čtveřici bodů (Obr. 1.9.1).*

Věta 1.9.1* *V každém vrcholu úplného čtyřstranu tvoří dvě strany, diagonální přímka a spojnice jejího protějšího diagonálního bodu s vrcholem harmonickou čtveřici přímek (Obr.1.9.2).*



Obr. 1.9.1



Obr. 1.9.2

Věta 1.9.2 *Dvojice protilehlých stran úplného čtyřrohu dělí harmonicky dvojici diagonál procházejících průsečíkem těchto stran.*

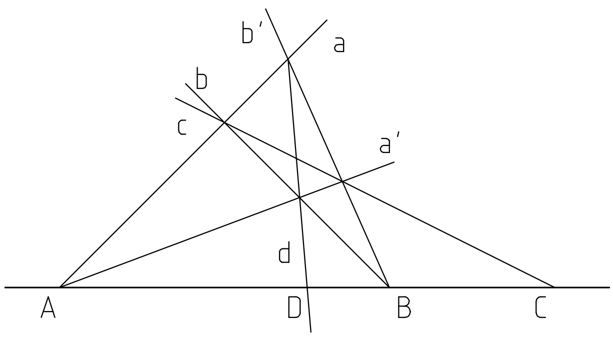
Věta 1.9.2* *Dvojice protějších vrcholů úplného čtyřstranu dělí harmonicky dvojici diagonálních bodů ležících na spojnici těchto vrcholů.*

Věta 1.9.3 *Na diagonále úplného čtyřrohu tvoří harmonickou čtveřici dva diagonální body a dva průsečíky této diagonály s dvojicí protějších stran procházejících třetím diagonálním bodem.*

Věta 1.9.3* *V diagonálním bodě úplného čtyřstranu tvoří harmonickou čtveřici dvě diagonální přímky a dvě spojnice tohoto diagonálního bodu s protějšími vrcholy ležícími na třetí diagonální přímce.*

Těchto uvedených vlastností lze využít k ryze projektivní konstrukci čtvrtého harmonického bodu.

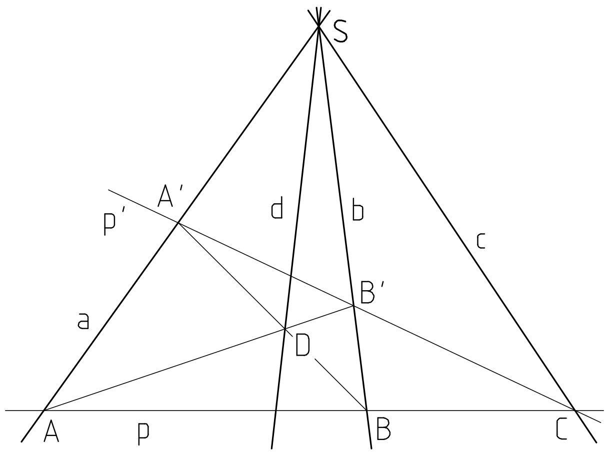
Konstrukce 1.9.1 Jsou dány tři kolineární vlastní body A, B, C. Sestrojte bod D tak, aby $(ABCD) = -1$.



Obr. 1.9.3

Postup (Obr. 1.9.3): Bodem C vedeme přímku c, bodem A přímky a, a' a bodem B přímky b, b' tak, aby $a \cap b \in c$ a $a' \cap b' \in c$. Body $a \cap b'$ a $a' \cap b$ určují přímku d, na které leží hledaný bod D (věta 1.9.1). Neboť jsme tak sestrojili úplný čtyřroh, ve kterém jsou body A, B jeho vrcholy, bod C je diagonálním bodem na straně AB a bod D je průsečíkem diagonály se stranou AB.

Konstrukce 1.9.1* Jsou dány tři vlastní přímky a, b, c, které procházejí bodem S. Sestrojte přímku d tak, aby $(abcd) = -1$.

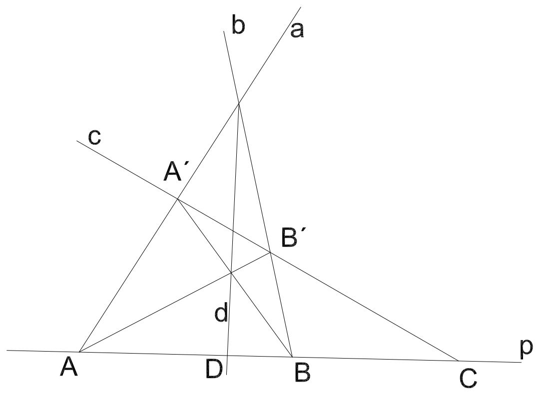


Obr. 1.9.4

Postup (Obr. 1.9.4): Na přímce a zvolíme dva body A, A' a na přímce c zvolíme bod C. Přímky AC a $A'C$ protnou přímku b v bodech B, B'. Hledaná přímka d je určena bodem S a bodem D, kde $D = AB' \cap A'B$.

Konstrukce 1.9.2 Jsou dány tři kolineární vlastní body A, B, C. Sestrojte bod D tak, aby $(ABCD) = -1$.

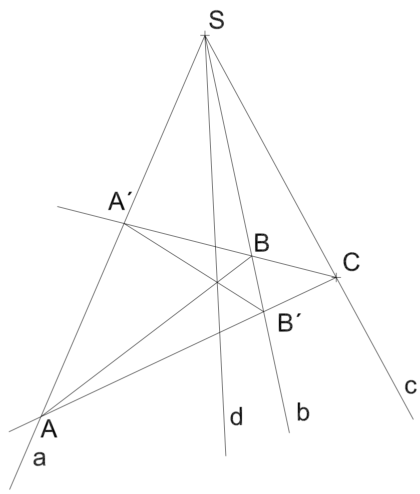
Postup (Obr. 1.9.5): Body A, B, C vedeme přímky a, b, c. Přímka c protne přímky a, b v bodech A', B'. Bod D je průsečíkem přímek $p \cap d$, kde přímka d je určena jako spojnice bodů $(a \cap b)$ a $(AB' \cap A'B)$.



Obr. 1.9.5

Konstrukce 1.9.2* Jsou dány tři vlastní přímky a, b, c, které procházejí bodem S. Sestrojte přímku d tak, aby $(abcd) = -1$.

Postup (Obr. 1.9.6): Na přímkách a, b, c zvolíme body A, B, C. Spojnice AC protne přímku b v bodě B', spojnice BC protne přímku a v bodě A'. Přímka d prochází bodem S a průsečíkem $(AB' \cap A'B)$.



Obr. 1.9.6

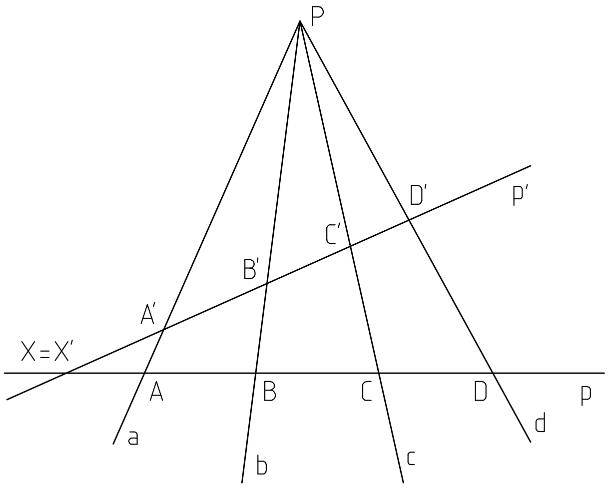
1.10 Perspektivní a projektivní zobrazení

Jedním ze základních útvarů v projektivní geometrii je svazek přímek. K tomuto útvaru lze zavést pojem duální a studovat vzájemné vztahy těchto útvarů.

Definice 1.10.1 Množina všech bodů dané přímky p se nazývá *přímá řada bodová*. Přímka p se nazývá *nositelka řady* a řadu značíme $p\,(A, B, C, \ldots)$ nebo $[\,p\,]$.

Definice 1.10.2 Buď $[\,p\,]$ přímá řada bodová, $[\,P\,]$ svazek přímek a předpokládejme, že střed svazku neleží na nositelce řady. Zobrazení $\phi : [\,P\,] \to [\,p\,]$, resp. $\phi^{-1} : [\,p\,] \to [\,P\,]$ definované vztahem $a \to A = a \cap p$, resp. $A \to a = AP$, se nazývá *perspektivním zobrazením (perspektivitou)* svazku $[\,P\,]$ na řadu $[\,p\,]$. Značíme $\phi : [\,p\,] \,\overline{\overline{\wedge}}\, [\,P\,]$.

! V tomto případě přímou řadu bodovou nazýváme řezem tohoto svazku, a obráceně svazek přímek nazýváme průmětem této řady.

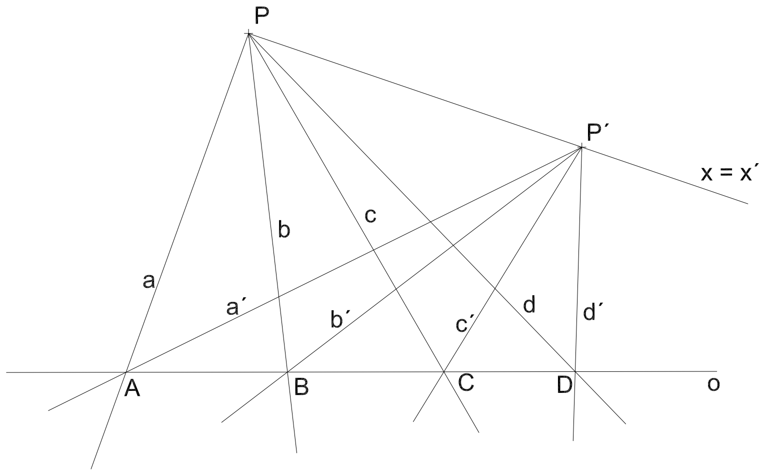


Obr. 1.10.1

! Jelikož má přímá řada bodová i svazek přímek stejně prvků a perspektivní zobrazení je prosté, je perspektivita bijekcí. Nebudeme tedy rozlišovat mezi perspektivitou ϕ a ϕ^{-1}. Perspektivitu je možné definovat i pro dvě řady bodové či dva svazky přímek.

Definice 1.10.3 Nechť $[\,p\,]$, $[\,q\,]$ jsou dvě přímé řady bodové, zobrazení $\rho : [\,p\,] \to [\,q\,]$ nazýváme *perspektivitou* řad $[\,p\,]$, $[\,q\,]$, jestliže existuje takový svazek $[\,O\,]$, jehož střed neleží na žádné z daných řad, že zobrazení ρ je složením perspektivit svazku $[\,O\,]$ po řadě na přímé řady bodové $[\,p\,]$, $[\,q\,]$. Střed tohoto svazku nazveme *středem perspektivity* přímých řad bodových $[\,p\,]$, $[\,q\,]$. Značíme $\rho : [\,p\,] \overset{O}{\overline{\overline{\wedge}}} [\,q\,]$.

Definice 1.10.3* Nechť $[\,P\,]$, $[\,P'\,]$ jsou dva svazky přímek, zobrazení $\rho : [\,P\,] \to [\,P'\,]$ nazýváme *perspektivitou* svazků $[\,P\,]$, $[\,P'\,]$, jestliže existuje přímá řada bodová $[\,o\,]$ neprocházející středy daných svazků tak, že zobrazení ρ je složením perspektivit řady $[\,o\,]$ po řadě na svazky $[\,P\,]$, $[\,P'\,]$. Přímou řadu bodovou $[\,o\,]$ nazveme *osou perspektivity* svazků $[\,P\,]$, $[\,P'\,]$. Značíme $\rho : [\,P\,] \overset{o}{\overline{\overline{\wedge}}} [\,P'\,]$ (Obr. 1.10.2).



Obr. 1.10.2

Z definice perspektivity plyne, že dvě přímé řady bodové jsou perspektivní, jestliže jsou řezem téhož svazku. A duálně, dva svazky přímek jsou perspektivní, jestliže jsou průmětem téže řady.

Definice 1.10.4 Prvek, který je v nějaké geometrické příbuznosti přiřazen sám sobě, se nazývá *samodružný*. Příbuznost, v níž je každý prvek samodružný, se nazývá *identita*.

Věta 1.10.1 *V perspektivnosti dvou přímých řad bodových je průsečík jejich nositelek samodružný bod.*

Věta 1.10.1* V perspektivnosti dvou svazků přímek je spojnice jejich středů samodružná přímka.

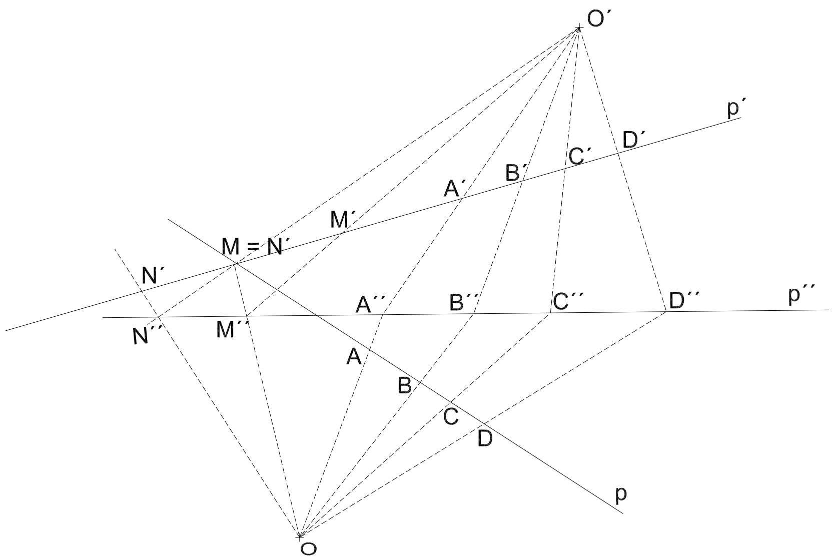
O určenosti perspektivity hovoří následující navzájem duální věty.

Věta 1.10.2 *Nechť* $[\,p\,]$, $[\,q\,]$ *jsou dvě různé přímé řady bodové, nechť jsou dány navzájem různé body* $A_1, A_2 \in [\,p\,]$, $B_1, B_2 \in [\,q\,]$, *které jsou zároveň různé od průsečíku přímek* p, q. *Pak existuje jediná perspektivita řady* $[\,p\,]$ *na řadu* $[\,q\,]$, *v níž* $A_1 \to B_1$ *a* $A_2 \to B_2$.

Věta 1.10.2* Nechť $[\,P\,]$, $[\,Q\,]$ jsou dva různé svazky přímek, nechť jsou dány navzájem různé přímky $a_1, a_2 \in [\,P\,]$, $b_1, b_2 \in [\,Q\,]$, které jsou různé od spojnice bodů P, Q. Pak existuje jediná perspektivita svazku $[\,P\,]$ na svazek $[\,Q\,]$, v níž $a_1 \to b_1$ a $a_2 \to b_2$.

! Je-li v perspektivitě řad, resp. svazků, $p = q$, resp. $P = Q$, pak je zřejmě daná perspektivita identitou. Obecně lze tedy říci, že perspektivita, která není identitou, je určena dvěma páry odpovídajících si prvků. Dále je možné ukázat, že perspektivní zobrazení zachovává dvojpoměr. Jelikož složení dvou perspektivit není obecně perspektivitou, zavádíme tzv. *projektivní zobrazení*, které je obecnější.

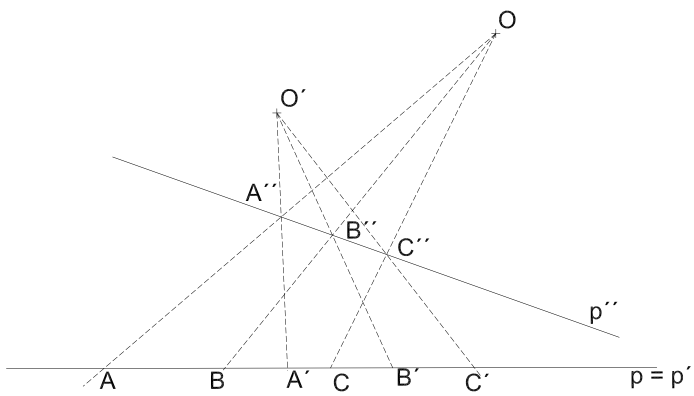
Definice 1.10.5 Nechť p, p' jsou dvě ne nutně různé přímky. Zobrazení řady $p\,(A, B, C, \ldots)$ na řadu $p'\,(A', B', C', \ldots)$, které může být vyjádřeno složením konečného počtu perspektiv, se nazývá *projektivní zobrazení*. Stručně projektivitou řad. Značí se $p\,(A, B, C, \ldots) \,\overline{\wedge}\, p'\,(A', B', C', \ldots)$ (Obr. 1.10.3, 1.10.4).



Obr. 1.10.3

Z definice projektivního zobrazení plyne, že zachovává dvojpoměr, a oproti perspektivitě navíc platí, že složení konečného počtu projektivit dává opět projektivitu. Větu o určenosti (tzv. Fundamentální teorém) vyslovíme pouze pro projektivní zobrazení dvou řad, pro ostatní případy zní analogicky.

V případě projektivního zobrazení může nastat situace, kdy přímky p a p' splynou, viz Obr. 1.10.4:



Obr. 1.10.4

Věta 1.10.3 *(Fundamentální teorém) Nechť p, q jsou dvě přímky projektivní roviny. A, B, C jsou tři navzájem různé body přímky p a A', B', C' jsou tři navzájem různé body přímky q, všechny různé od průsečíku přímek p a q. Pak existuje jediná projektivita $\rho : [\, p\,] \to [\, q\,]$, která zobrazí $A \to A'$, $B \to B'$ a $C \to C'$.*

V rozšířené eukleidovské rovině je fundamentální teorém ekvivalentní Pappovu axiomu a projektivita je v ní tedy určena třemi páry odpovídajících si bodů.

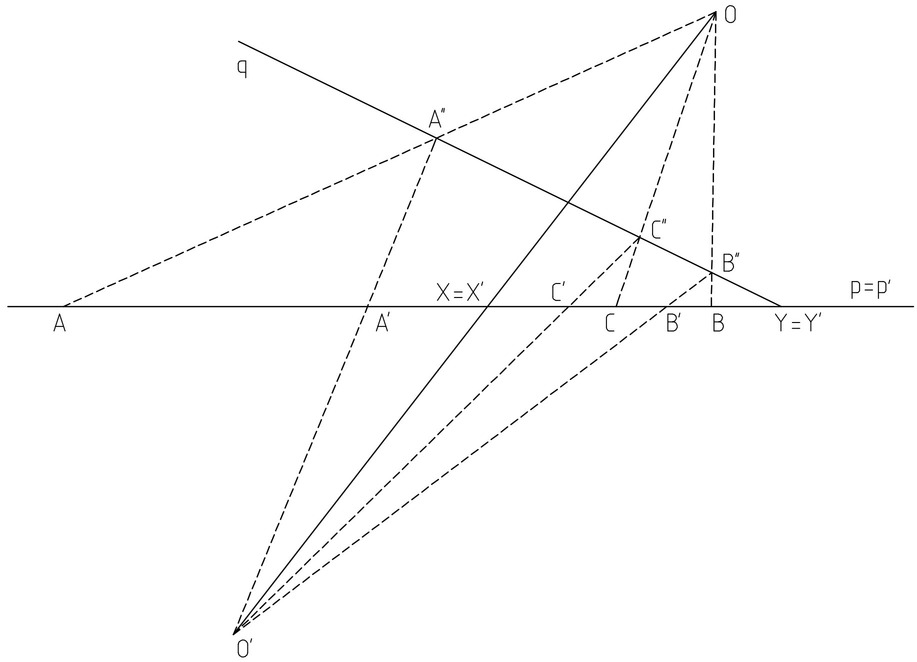
Věta 1.10.4 *Projektivnost dvou nesoumístných přímých řad bodových lze vytvořit složením nejvýše dvou perspektiv.*

Definice 1.10.6 Dvě přímé řady bodové $[\, p\,]$, $[\, q\,]$ nazveme *soumístnými*, jestliže $p = q$.
V opačném případě je nazýváme *nesoumístnými*.

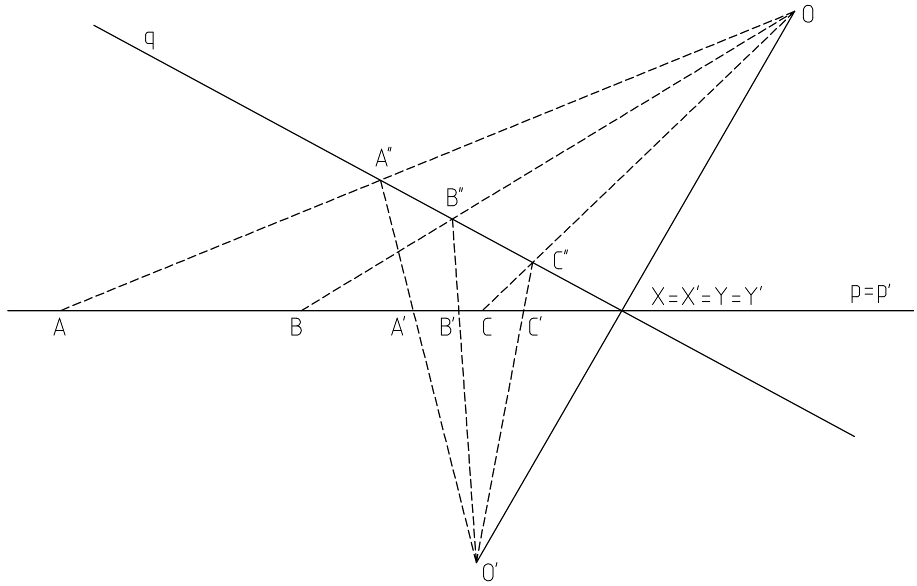
Definice 1.10.6* Dva svazky přímek $[\, P\,]$, $[\, Q\,]$ nazveme *soumístnými*, jestliže $P = Q$.
V opačném případě je nazýváme *nesoumístnými*.

Projektivity dvou soumístných řad, resp. svazků, dále dělíme podle počtu samodružných prvků. Jestliže v projektivitě soumístných útvarů existují tři různé samodružné prvky, pak z fundamentálního teorému vyplývá, že je tato projektivita identitou. Soumístná projektivita, která není identitou, může tedy mít nejvýše dva různé samodružné prvky.

Věta 1.10.5 *Každá neidentická projektivnost dvou soumístných řad bodových (svazků přímek) má vždycky právě dva samodružné body (přímky), které jsou buď reálné různé, nebo splývající, nebo imaginárně sdružené (Obr. 1.10.5, 1.10.6).*



Obr. 1.10.5



Obr. 1.10.6

Definice 1.10.7 Projektivita dvou soumístných útvarů se dvěma různými samodružnými prvky se nazývá *hyperbolická*. S jedním samodružným prvkem se nazývá *parabolická*. Projektivita bez samodružných prvků se nazývá *eliptická*[4].

Pro hyperbolické projektivity lze dokázat následující duální věty, kterých využíváme při doplňování těchto projektivit.

Věta 1.10.6 *Nechť X, Y jsou dva různé samodružné body soumístné projektivity řad. Potom dvojpoměr $(XYAA') = k$, kde A, A' jsou libovolné body různé od X, Y odpovídající si v této projektivitě. Číslo k se nazývá charakteristika projektivity řad.*

Věta 1.10.6* *Nechť x, y jsou dvě různé samodružné přímky soumístné projektivity svazků. Potom dvojpoměr $(xyaa') = k$, kde a, a' jsou libovolné přímky různé od x, y odpovídající si v této projektivitě. Číslo k se nazývá charakteristika projektivity svazků.*

Z definice projektivity je zřejmé, že každá perspektivita je současně projektivitou. Pro nesoumístné projektivní útvary můžeme vyslovit kritérium, kdy je daná projektivita perspektivitou.

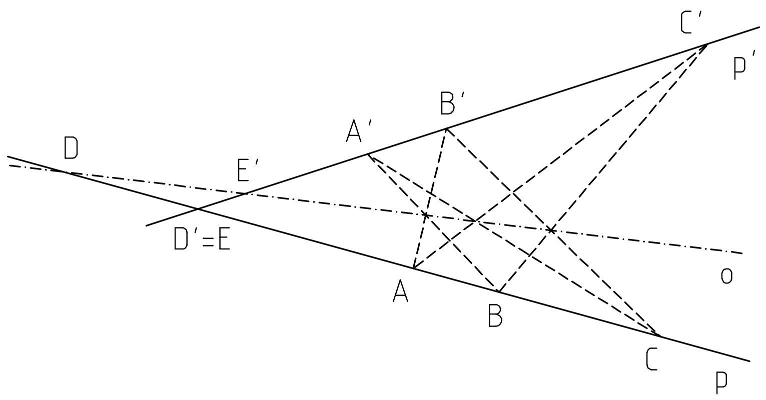
Věta 1.10.7 *Dvě nesoumístné projektivní řady jsou perspektivní právě tehdy, když je jejich průsečík samodružný bod.*

Věta 1.10.7* *Dva nesoumístné projektivní svazky jsou perspektivní právě tehdy, když je spojnice jejich středů samodružná přímka.*

K doplňování nesoumístných projektivit využíváme následujících vlastností.

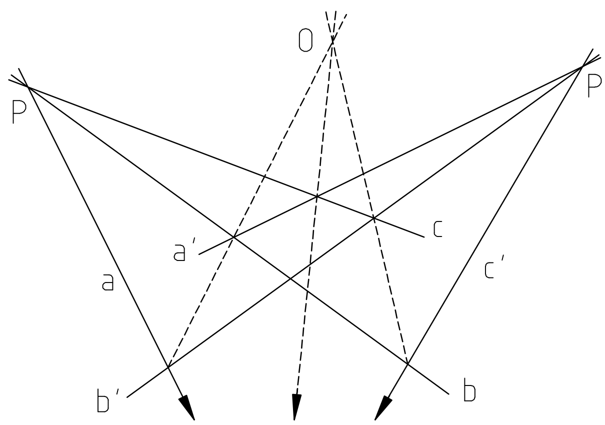
Věta 1.10.8 *Jsou-li dány dvě nesoumístné projektivní řady bodové, potom průsečíky $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$ a $BC' \cap B'C$ leží na přímce, tzv. direkční ose daných řad. Direkční osa protíná nositelky v bodech, které odpovídají průsečíku obou nositelek (Obr. 1.10.7).*

[4]Pokud v projektivní geometrii pracujeme s komplexními prvky, dostáváme pro samodružné prvky tyto možnosti: dva různé reálné samodružné prvky, jeden dvojnásobný reálný samodružný prvek, dva imaginárně sdružené samodružné prvky.



Obr. 1.10.7

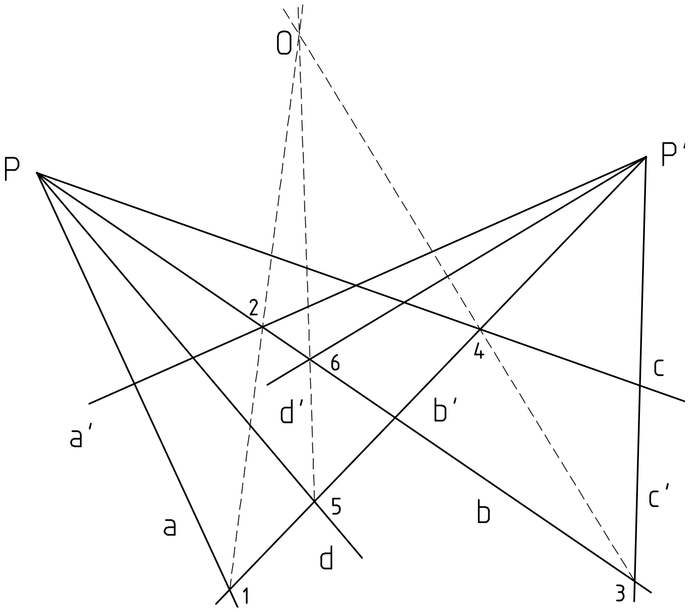
Věta 1.10.8* *Jsou-li dány dva nesoumístné projektivní svazky přímek, potom následující přímky $(a \cap b')(a' \cap b)$, $(a \cap c')(a' \cap c)$ a $(b \cap c')(b' \cap c)$ procházejí týmž bodem, tzv. direkčním středem daných svazků. Spojnice direkčního středu se středy daných svazků jsou přímky, které v dané projektivitě odpovídají spojnici středů daných svazků (Obr. 1.10.8).*



Obr. 1.10.8

Perspektivita, projektivita, soumístné projektivní řady bodové, soumístné projektivní svazky přímek.

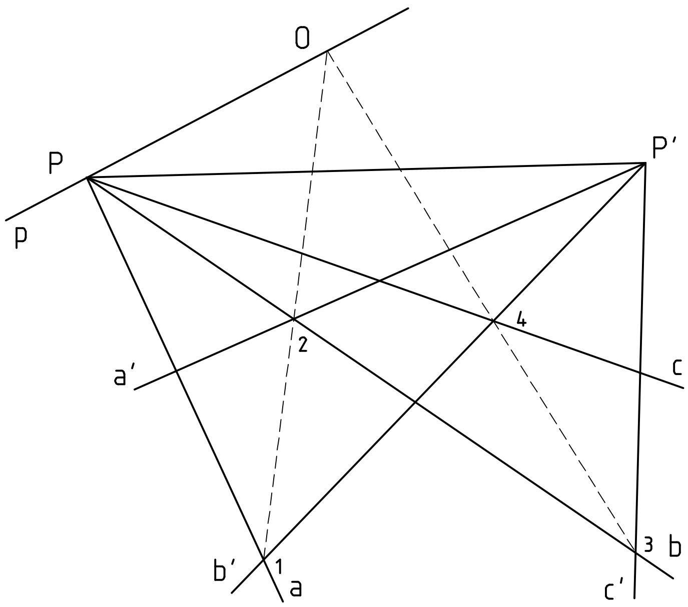
Konstrukce 1.10.1 Projektivita dvou nesoumístných svazků $[\,P\,], [\,P'\,]$ je určena třemi páry odpovídajících si přímek a, b, c, a', b', c'. K dané přímce d svazku $[\,P\,]$ sestrojte odpovídající přímku d' svazku $[\,P'\,]$.



Obr. 1.10.9

Postup (Obr.1.10.9): Označíme $a \cap b' = 1$, $a' \cap b = 2$, $b \cap c' = 3$, $b' \cap c = 4$, $d \cap b' = 5$. Direkční střed O projektivních svazků [P], [P'] sestrojíme jako průsečík přímek 12 a 34. Přímka $O5$ protíná přímku b v bodě 6, kterým prochází hledaná přímka d'.

Konstrukce 1.10.2 Projektivita dvou nesoumístných svazků [P] a [P'] je určena třemi páry odpovídajících si přímek a, b, c, a', b', c'. K přímce PP' svazku [P'] sestrojte odpovídající přímku p svazku [P].

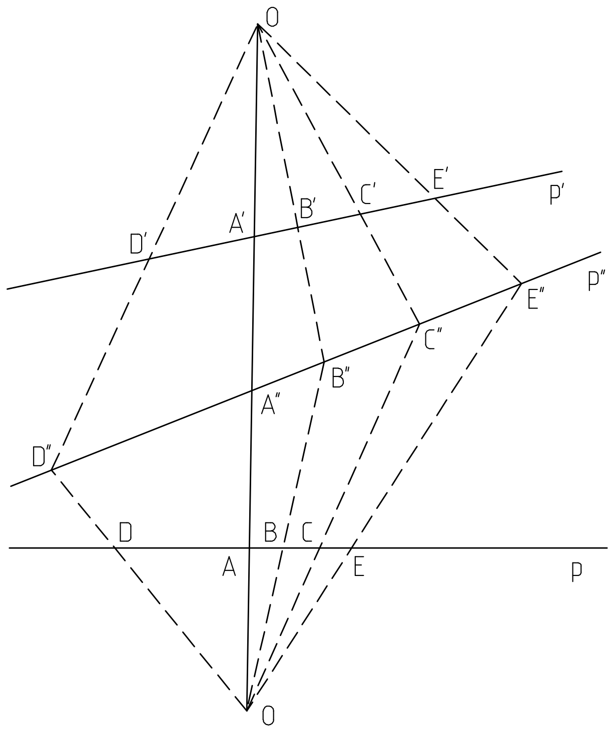


Obr. 1.10.10

Postup (Obr. 1.10.10): Podle věty 1.10.8* prochází přímka p direkčním středem projektivních svazků [P], [P']. Direkční střed sestrojíme stejně jako v konstrukci 1.10.1 Hledaná přímka p je tedy určena body P, O.

Úloha 1.10.1 Jsou dány dvě přímky nesoumístné projektivní řady bodové p, p' určené páry odpovídajících si bodů AA', BB', CC'. K danému bodu $D \in p$ sestrojte $D' \in p'$ a k danému bodu $E' \in p'$ sestrojte $E \in p$.

Řešení (Obr. 1.10.11): Na přímce AA' zvolíme body O, O'. Z bodu O promítneme body B, C a z bodu O' promítneme body B', C'. Označíme $B'' = OB \cap O'B'$ a $C'' = OC \cap O'C'$, $p'' = B''C''$, $AA' \cap p'' = A''$. K bodu D najdeme bod D' tak, že určíme bod D'' jakožto průsečík spojnice OD s přímkou p'' a bod D' dostaneme jako průsečík přímky p' se spojnicí $O'D''$. Z Obr. 1.10.11 je dále patrná i konstrukce bodu $E \in p$.



Obr. 1.10.11

Úloha 1.10.2 Doplňte dvě soumístné projektivní řady $p = p'$, je-li dán jeden pár odpovídajících si bodů AA' a dva samodružné body $X = X'$, $Y = Y'$.

Řešení: Zvolíme body O, O' tak, aby jejich spojnice procházela bodem Y. Z bodu O promítneme bod A a z bodu O' promítneme bod A'. Označíme $A'' = OA \cap O'A'$ a $p'' = A''X$. K bodu B najdeme bod B' tak, že určíme bod B'' jakožto průsečík spojnice OB s přímkou p'' a bod B' dostaneme jako průsečík přímky p se spojnicí $O'B''$.

1.11 Involuce

U soumístných útvarů lze studovat speciální druh projektivního zobrazení, které složeno samo se sebou dává identitu. Takovéto zobrazení nazýváme *involutorním (involucí).*

Definice 1.11.1 *Involutorním párem* bodů (přímek) rozumíme takový pár, pro který platí, jestliže $f : A \to A'$, pak $(A = B') \Rightarrow (A' = B)$. Tedy $A \leftrightarrow B$.

Věta 1.11.1 *Jestliže v projektivnosti dvou soumístných útvarů existuje kromě samodružných prvků alespoň jeden involutorní pár, potom jsou všechny páry involutorní a daná projektivnost je involutorní.*

Tato věta je kritérium, kdy je daná projektivita involucí.

! V involuci nerozlišujeme vzor a obraz.

Věta 1.11.2 *Involuce je určena dvěma páry odpovídajících si prvků.*

Příkladem involuce je středová souměrnost na přímce.

Dále je možné ukázat, že každá involuce má buď dva různé samodružné prvky nebo nemá žádný samodružný prvek.

! Pokud bereme v úvahu involuci jako středovou souměrnost na přímce, tak tato involuce nemá žádné reálné samodružné prvky. Středu středové souměrnosti v involuci odpovídá nevlastní bod dané přímky.

Věta 1.11.3 *Involuce, jejíž samodružné prvky jsou reálné, se nazývá hyperbolická involuce, involuce, jejíž samodružné prvky jsou imaginárně sdružené, se nazývá eliptická.*

Věta 1.11.4 *Jestliže se páry odpovídajících si prvků v dané involuci oddělují, je daná involuce eliptická. Neoddělují-li se, je hyperbolická.*

U hyperbolické involuce můžeme hovořit o její charakteristice. Lze dokázat, že libovolný pár odpovídajících si prvků odděluje harmonicky dvojici samodružných prvků. Charakteristika hyperbolické involuce je tedy rovna -1.

Věta 1.11.5 *Projektivnost je involucí právě tehdy, když je její charakteristika rovna* -1.

Každé involuci přímých řad bodových lze jednoznačně přiřadit číselnou hodnotu tzv. *mocnost involuce*. Mocnost již není, oproti charakteristice hyperbolické involuce, pro všechny involuce stejná.

Definice 1.11.2 *Středem involuce* přímých řad bodových se nazývá takový vlastní bod přímky, který odpovídá nevlastnímu bodu.

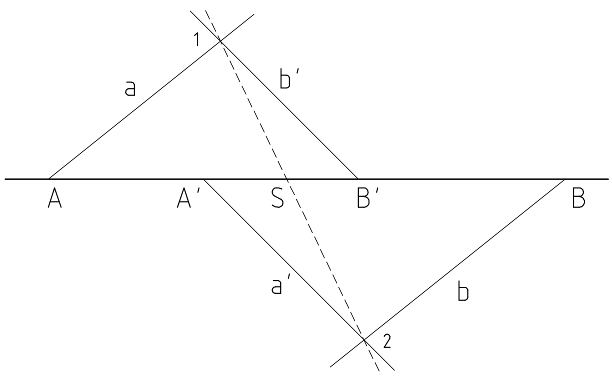
! Pokud nevlastnímu bodu odpovídá opět nevlastní bod, střed involuce neexistuje. K pojmu střed involuce neexistuje duální pojem. Pro určení involuce stačí zadat střed involuce a pár odpovídajícíh si bodů.

Věta 1.11.6 *Součin orientovaných vzdáleností odpovídajících si vlastních bodů v involuci od středu involuce je konstantní a nazývá se mocnost involuce.*

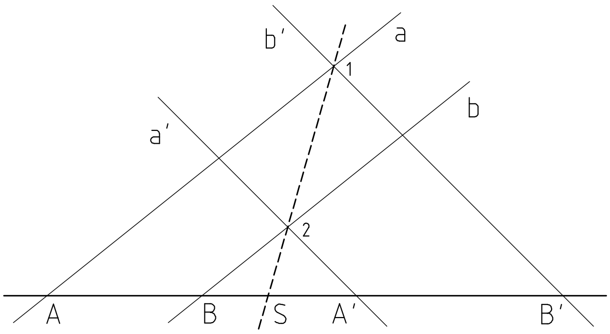
Jelikož se odpovídající si body hyperbolické involuce neoddělují, je její mocnost kladná. Pro eliptickou involuci naopak záporná. K pojmu střed involuce neexistuje pojem duální a tedy u involuce svazků nezavádíme její mocnost.

Sestrojení středu involuce, samodružných prvků a involutorních párů je možné provádět čistě projektivně s využitím vlastností projektivních útvarů. Při konstrukcích v rozšířené eukleidovské rovině lze také využít vlastností mocnosti involuce řad.

Konstrukce 1.11.1 Involuce je dána dvěma páry odpovídajících si bodů $A \to A'$, $B \to B'$. Určete střed S této involuce.



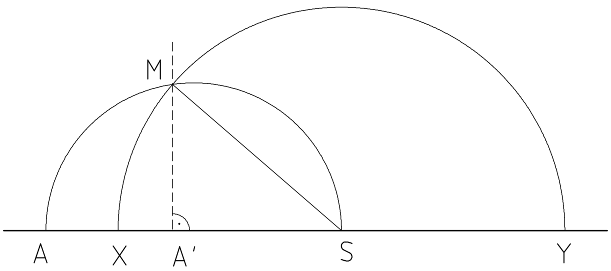
Obr. 1.11.1



Obr. 1.11.2

Postup (Obr. 1.11.1, 1.11.2): Body A, B, resp. A', B', vedeme navzájem rovnoběžné přímky a, b, resp. a', b'. Označíme průsečíky $a \cap b' = 1$, $a' \cap b = 2$. Přímka 12 protíná nositelku projektivních řad v hledaném středu involuce S.[5]

Konstrukce 1.11.2 Hyperbolická involuce je dána středem S a párem odpovídajících si bodů $A \rightarrow A'$. Určete její samodružné body X, Y.



Obr. 1.11.3

Postup (Obr. 1.11.3): Pro mocnost involuce platí $|SA| \cdot |SA'| = |SX|^2 = |SY|^2$. Pomocí Eukleidovy věty o odvěsně tedy určíme velikost úsečky SX, $|SX| = |SM|$. Hledané samodružné body X, Y leží na kružnici se středem ve středu involuce S a poloměrem délky $|SM|$.

Doplňování involuce svazků lze řešit převedením na konstrukce v involuci přímých řad bodových. Dále lze k doplňování involuce svazků či řad využít poznatků z teorie projektivní geometrie kuželoseček. Tyto konstrukce uvedeme v následující kapitole. Pro involuci svazků však vyslovíme větu, která nám v projektivní geometrii kuželoseček dovolí zavést pojem os kuželosečky.

Definice 1.11.3 Involuce svazků, ve které jsou všechny odpovídající si přímky navzájem kolmé, se nazývá *pravoúhlá involuce.*

[5]Zdůvodnění konstrukce lze nalézt například v učebnici [1], kde je uvedena i konstrukce pomocí chordál.

Věta 1.11.7 *V involuci svazků, která není pravoúhlá ani identická, existuje právě jeden pravoúhlý pár odpovídajících si přímek.*

Kapitola 2

Projektivní geometrie kuželoseček

V této kapitole budeme předpokládat, že projektivní rovina π je pappovská a antifanovská projektivní rovina. Při řešení úloh budeme navíc požadovat, aby tato projektivní rovina byla rozšířená eukleidovská rovina.

2.1 Definice a základní vlastnosti kuželoseček

Definice 2.1.1 Nechť jsou v projektivní rovině π dány dva nesoumístné projektivní svazky $A(x, y, z, \ldots)$, $B(x', y', z', \ldots)$. Množina všech průsečíků odpovídajících si přímek v projektivitě φ se nazývá *kuželosečka* v rovině π. Značíme $\mathcal{K}(A, B, \varphi)$.

Dva nesoumístné projektivní svazky lze určit pomocí tří párů odpovídajících si přímek, tedy pěti různými body[1], z nichž žádné čtyři neleží na téže přímce. Můžeme se však ptát obecněji, zda ke každé pětici bodů existuje projektivita nesoumístných svazků (kuželosečka), která tyto body obsahuje jako průsečíky odpovídajících si přímek.

Věta 2.1.1 *Nechť A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 je pět různých bodů projektivní roviny π, potom existuje taková kuželosečka $\mathcal{K}(A, B, \varphi)$, že $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\} \subset \mathcal{K}(A, B, \varphi)$.*

Důkaz: Budeme se snažit nalézt projektivitu svazků, která bude určena pomocí daných bodů. Podle polohy bodů rozdělíme důkaz na čtyři části.

(1) Nechť body A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 leží na přímce p. Zvolíme libovolné body P, P' neležící na přímce p a z těchto bodů promítneme přímkami danou pětici bodů. Dostaneme

[1] Dva středy svazků a tři průsečíky odpovídajících si přímek.

tak dva projektivní svazky přímek $[\,P\,], [\,P'\,]$, které jsou navíc perspektivní. Spojnice bodů P, P' je tedy samodružná přímka této perspektivity. Kuželosečka obsahující body A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 je potom tvořena přímkami p a PP'.

(2) Nechť $A_1, A_2, A_3, A_4 \in p$ a $A_5 \notin p$. Zvolíme libovolný bod P neležící na přímce p a různý od bodu A_5. Podobně jako v případě (1) dostaneme dva perspektivní svazky $[\,A_5\,], [\,P\,]$. Kuželosečka obsahující body A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 je tedy tvořena přímkami p a PA_5.

(3) Nechť $A_1, A_2, A_3 \in p$ a $A_4, A_5 \notin p$. Z bodů A_4, A_5 promítneme přímkami zbylé body A_1, A_2, A_3 a dostaneme opět dva perspektivní svazky $[\,A_4\,], [\,A_5\,]$. Kuželosečka je tedy tvořena přímkami p, A_4A_5.

(4) Nechť žádné tři body neleží na přímce. Z bodů A_4, A_5 promítneme přímkami body A_1, A_2, A_3. Dostaneme dva nesoumístné projektivní svazky přímek určující kuželosečku, která obsahuje body A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

□

! Každými pěti různými body tedy prochází kuželosečka, která však obecně nemusí být jediná. Je-li například těchto pět bodů kolineárních, pak existuje nekonečně mnoho takových kuželoseček. K tomu, abychom mohli hovořit o jednoznačné určenosti kuželosečky pěti body, je třeba se omezit na jistý typ kuželoseček.

Definice 2.1.2 Kuželosečka $\mathcal{K}(A, B, \varphi)$ v projektivní rovině π se nazývá *singulární*, existuje-li přímka p taková, že $[\,p\,] \subset \mathcal{K}(A, B, \varphi)$. V opačném případě se kuželosečka nazývá *regulární*.

V částech (1),(2) a (3) důkazu věty 2.1.1 je kuželosečka procházející danými body vždy singulární. Následující věta popisuje důležité vlastnosti kuželosečky z části (4).

Věta 2.1.2 *Nechť A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 je pět různých bodů projektivní roviny π, z nichž žádné tři neleží na téže přímce. Pak existuje právě jedna kuželosečka, která tyto body obsahuje. Tato kuželosečka je vždy regulární.*

Na rozdíl od singulárních kuželoseček jsou tedy regulární kuželosečky určeny jednoznačně pěti svými libovolnými různými body. Žádná singulární kuželosečka tedy neobsahuje pět po třech nekolineárních bodů. A naopak žádná regulární kuželosečka neobsahuje tři kolineární body. Z důkazu věty 2.1.1 lze snadno odvodit následující věty.

Věta 2.1.3 *Jsou-li* $P(a, b, c, \ldots)$, $P'(a', b', c', \ldots)$ *dva nesoumístné projektivní svazky přímek, pak průsečíky* $A = a \cap a', B = b \cap b', C = c \cap c', \ldots$ *odpovídajících si přímek jsou body nějaké kuželosečky. Jsou-li svazky perspektivní, je kuželosečka singulární, v opačném případě je regulární.*

Věta 2.1.4 *Body regulární kuželosečky se promítají z libovolných dvou svých bodů* P, P' *projektivními svazky. Jejich direkčním středem procházejí tečny*[2] *dané kuželosečky sestrojené v bodech* P, P'.

Důkaz: Dokážeme pouze druhou část této věty, protože první část je zřejmá. Každá přímka svazku $[\,P\,]$ obsahuje nejvýše dva body kuželosečky, střed P svazku a průsečík s odpovídající přímkou. Protože na přímce svazku $[\,P\,]$, která odpovídá spojnici středů P, P', je tímto průsečíkem bod P, je tento bod P dvojnásobným bodem a daná přímka tedy tečnou kuželosečky.

□

Při určování projektivity svazků lze vzít za jeden (či dva) odpovídající si pár přímek takový pár, ve kterém si odpovídá spojnice středů svazků a přímka procházející direkčním středem. Dostáváme tak další způsoby určení regulární kuželosečky.

Věta 2.1.5 *Kuželosečka je určena tečnou s bodem dotyku a dalšími třemi body.*

Věta 2.1.6 *Kuželosečka je určena dvěma tečnami s body dotyku a dalším bodem.*

Princip duality zaručuje platnost následujících vět. Věta 2.1.3* popisuje duální způsob, jak lze kuželosečky zavést.

Věta 2.1.2* *Nechť* a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 *je pět různých přímek projektivní roviny* π, *z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem. Pak existuje právě jedna kuželosečka, která se jich dotýká. Tato kuželošečka je vždy regulární.*

Věta 2.1.3* *Jsou-li* $p(A, B, C, \ldots)$, $p'(A', B', C', \ldots)$ *dvě nesoumístné projektivní řady bodové, pak spojnice* $a = AA', b = BB', c = CC', \ldots$ *odpovídajících si bodů jsou tečny nějaké kuželosečky. Jsou-li řady perspektivní, je kuželosečka singulární. V opačném případě je regulární.*

[2] Tečnou nazýváme přímku, která má s kuželosečkou právě jeden společný bod.

Věta 2.1.4* *Tečny kuželosečky protínají dvě její libovolné tečny p, p' v projektivních řadách bodových. Jejich direkční osa protíná kuželosečku v bodech, v nichž se jí dotýkají tečny p, p'.*

Věta 2.1.5* *Kuželosečka je určena tečnou s bodem dotyku a dalšími třemi tečnami.*

Věta 2.1.6* *Kuželosečka je určena dvěma tečnami s body dotyku a další tečnou.*

Z věty 2.1.4 a vlastností projektivních svazků přímek plyne následující věta, díky které je možné zavést dvojpoměr čtyř bodů na kuželosečce a poté také dvojpoměr čtyř tečen kuželosečky.

Věta 2.1.7 *Čtyři dané body kuželosečky se promítají ze všech jejích bodů čtveřicemi přímek konstantního dvojpoměru. Množina všech bodů, z nichž se daná čtveřice bodů promítá čtveřicemi přímek konstantního dvojpoměru, je kuželosečka, která těmito body prochází. Přímka, která z bodu kuželosečky promítá tentýž bod, je tečna kuželosečky v tomto bodě.*

Věta 2.1.7* *Čtyři dané tečny kuželosečky vytínají na všech jejich tečnách čtveřici bodů konstantního dvojpoměru. Všechny přímky, které dané čtyři přímky protínají ve čtveřici bodů konstantního dvojpoměru, jsou tečny kuželosečky, která se těchto přímek dotýká. Průsečík tečny kuželosečky s touž její tečnou je jejím bodem dotyku.*

Definice 2.1.3 Dvojpoměrem čtyř bodů A, B, C, D kuželosečky rozumíme dvojpoměr $(abcd)$ přímek, jimiž se tyto body promítají z libovolného bodu této kuželosečky.

Definice 2.1.3* Dvojpoměrem čtyř tečen a, b, c, d kuželosečky rozumíme dvojpoměr $(ABCD)$ čtyř bodů, které tyto tečny vytínají na libovolné tečně této kuželosečky.

Máme-li dány tři různé body kuželosečky, pak každému dalšímu bodu kuželosečky je přiřazen právě jeden dvojpoměr a naopak každému dvojpoměru různému od 0 a 1 právě jeden bod různý od třech daných bodů.

Definice 2.1.4 *Kvadratická soustava bodů* je množina všech bodů kuželosečky. Kuželosečka se nazývá *nositelka soustavy*. Značíme $\mathcal{K}(A, B, C, \ldots)$.

Definice 2.1.4* *Kvadratická soustava přímek* je množina všech tečen kuželosečky. Značíme $\mathcal{K}(a, b, c, \ldots)$.

Definice dvojpoměru čtyř bodů, resp. tečen, kuželosečky nám dovoluje zavést projektivnost dvou kvadratických soustav bodů, resp. přímek.

Definice 2.1.5 Nechť se kvadratická soustava bodů $\mathcal{K}(A, B, C, \ldots)$, resp. $\mathcal{K}'(A', B', C', \ldots)$, promítá z libovolného bodu X kuželosečky $\mathcal{K}$, resp. X' kuželosečky $\mathcal{K}'$, svazkem přímek $[\,X\,]$, resp. $[\,X'\,]$. Jsou-li svazky $[\,X\,]$ a $[\,X'\,]$ navzájem projektivní, nazývají se kvadratické soustavy $\mathcal{K}(A, B, C, \ldots)$ a $\mathcal{K}'(A', B', C', \ldots)$ také *projektivní.*

Definice 2.1.5* Nechť kvadratická soustava přímek $\mathcal{K}(a, b, c, \ldots)$, resp. $\mathcal{K}'(a', b', c', \ldots)$, vytíná na libovolné tečně x kuželosečky $\mathcal{K}$, resp. x' kuželosečky $\mathcal{K}'$, řadu bodovou $[\,x\,]$, resp. $[\,x'\,]$. Jsou-li přímé řady bodové $[\,x\,]$ a $[\,x'\,]$ navzájem projektivní, nazývají se kvadratické soustavy $\mathcal{K}(a, b, c, \ldots)$ a $\mathcal{K}'(a', b', c', \ldots)$ také *projektivní.*

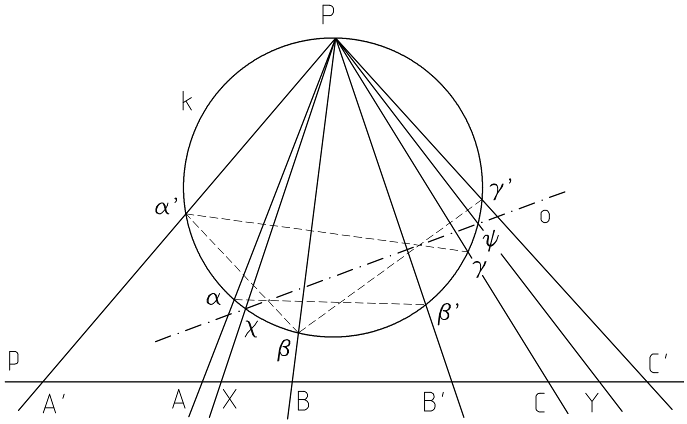
Stejně jako u přímých řad bodových rozlišujeme soumístné a nesoumístné kvadratické soustavy. Dále budeme hovořit pouze o soumístných kvadratických soustavách. Projektivnost kvadratických soustav je, stejně jako projektivnost lineárních útvarů, určena třemi páry odpovídajících si prvků. Analogicky jako u projektivnosti lineárních útvarů lze také zavést direkční osu a direkční střed projektivních kvadratických soustav.

Věta 2.1.8 *Jsou-li $\mathcal{K}(A, B, C, \ldots), \mathcal{K}(A', B', C', \ldots)$ dvě různé projektivní kvadratické soustavy bodů na téže kuželosečce $\mathcal{K}$, pak průsečíky $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$ a $BC' \cap B'C$ leží na téže přímce o, tzv. direkční ose obou daných soustav, která protíná kuželosečku $\mathcal{K}$ v samodružných bodech obou soustav. Přitom spojnice dvou splývajících bodů kuželosečky $\mathcal{K}$ je zastoupena její tečnou v tomto bodě.*

Věta 2.1.8* *Jsou-li $\mathcal{K}(a, b, c, \ldots), \mathcal{K}(a', b', c', \ldots)$ dvě různé projektivní kvadratické soustavy tečen téže kuželosečky $\mathcal{K}$, pak přímky $(a \cap b')(a' \cap b)$, $(a \cap c')(a' \cap c)$ a $(b \cap c')(b' \cap c)$ procházejí týmž bodem O, tzv. direkčním středem, obou daných soustav. Tečny kuželosečky $\mathcal{K}$ jdoucí bodem O jsou samodružné přímky obou soustav. Přitom průsečík dvou splývajících tečen kuželosečky $\mathcal{K}$ je zastoupen bodem dotyku.*

Pomocí věty 2.1.8 sestrojujeme samodružné body projektivních kvadratických soustav i projektivních řad bodových.

Konstrukce 2.1.1 Projektivita soumístných řad bodových je dána třemi páry odpovídajících si bodů $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$. Sestrojte její samodružné body X, Y.



Obr. 2.1.1

Postup (Obr. 2.1.1): Z libovolného bodu $P \notin p$ libovolné kružnice k promítneme body A, B, C a A', B', C' projektivními svazky přímek. Tyto svazky vytínají na kružnici projektivní kvadratické soustavy bodů $k\left(\alpha, \beta, \gamma, \ldots\right), k\left(\alpha', \beta', \gamma', \ldots\right)$. Sestrojíme direkční osu o této projektivity, která protíná kuželosečku v samodružných bodech χ, ψ. Tyto body určují spolu s bodem P samodružné přímky projektivity svazků, které protínají přímku p v hledaných samodružných bodech X, Y.

Místo kružnice lze v této konstrukci použít libovolnou jinou regulární kuželosečku. Vzhledem k náročnosti konstrukce těchto kuželoseček však volíme právě kružnici, tzv. *Steinerovu*.[3]

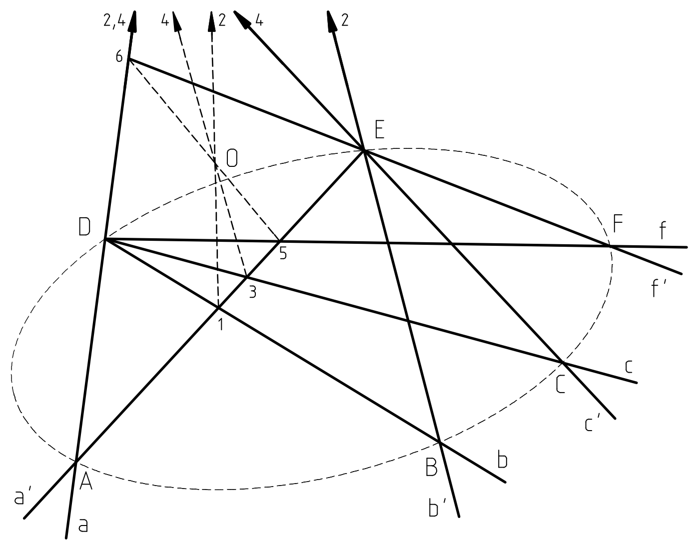
V následujících úlohách ukážeme, jak nalézt další bod a tečnu regulární kuželosečky, máme-li tuto kuželosečku určenu některým z uvedených způsobů. Ve zbytku této kapitoly již budeme studovat pouze vlastnosti regulárních kuželoseček. Dále tedy kuželosečkou myslíme regulární kuželosečku. Řešení všech úloh uvedených v této kapitole bude vycházet přímo z definic a vět zde uvedených.

Úloha 2.1.1 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. Sestrojte její další bod.

Řešení (Obr. 2.1.2): Z bodů D, E promítneme přímkami a, b, c a a', b', c' body A, B, C. Tím dostáváme dva nesoumístné projektivní svazky $[\ D\ ], [\ E\ ]$. Určíme direkční střed O těchto projektivních svazků a zvolíme přímku f, procházející bodem D a neprocházející direkčním středem O. K přímce f svazku $[\ D\ ]$ určíme od-

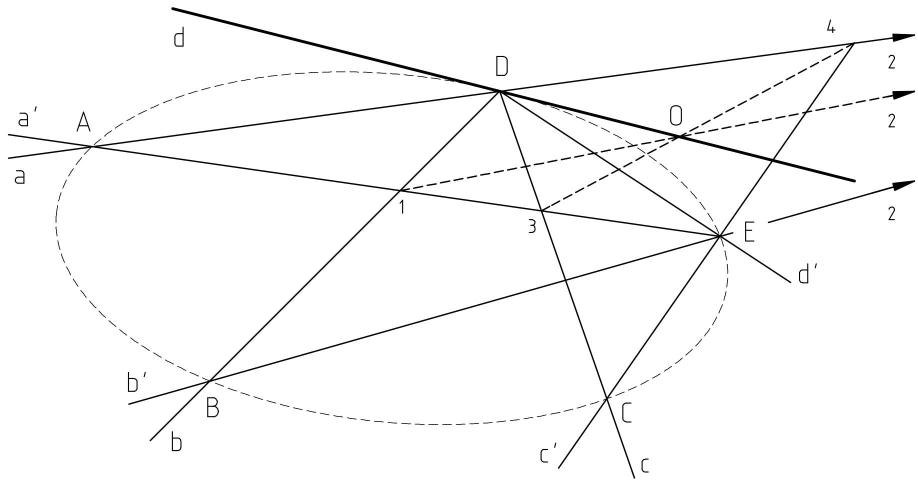
[3] Pojmenovaná podle švýcarského matematika Jakoba Steinera (1796–1863).

povídající přímku f' svazku [E] (konstrukce 1.10.1). Hledaný bod F je průsečíkem odpovídajících si přímek f, f'.



Obr. 2.1.2

Úloha 2.1.2 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. V jednom z daných bodů sestrojte tečnu.

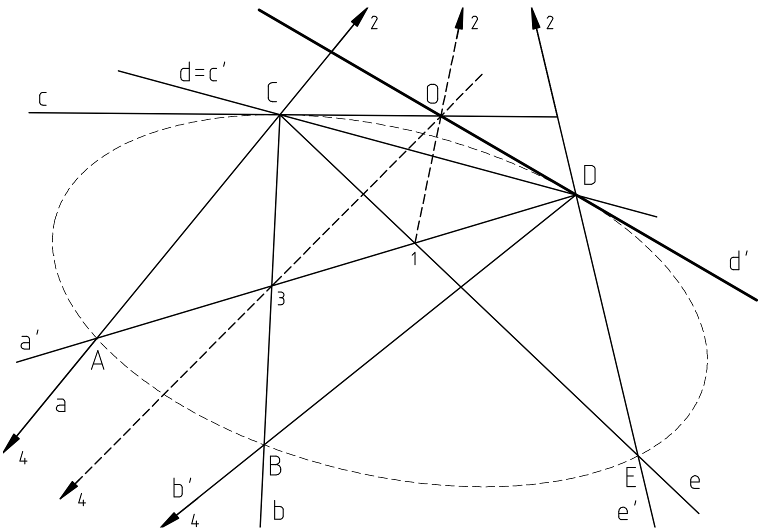


Obr. 2.1.3

Řešení (Obr. 2.1.3): Z daných bodů D, E promítneme body A, B, C projektivními svazky $D\,(a, b, c, \ldots)$, $E\,(a', b', c', \ldots)$. Určíme direkční střed O těchto projektivních svazků a přímku d svazku [D] odpovídající spojnici d' středů svazků [D] , [E]. Přímka d prochází direkčním středem O a je tečnou kuželosečky v bodě D (věta 2.1.4).

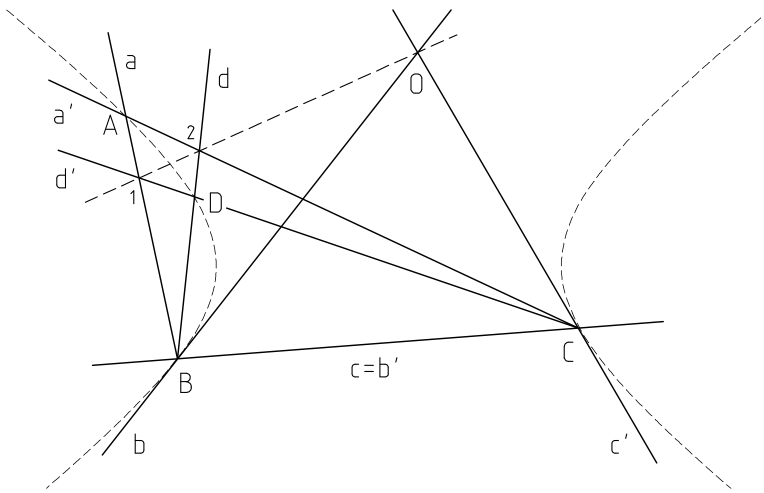
Úloha 2.1.3 Kuželosečka je dána čtyřmi vlastními body A, B, C, D a tečnou c v bodě C. Sestrojte další bod a tečnu kuželosečky.

Řešení (Obr. 2.1.4): Z bodu C promítneme přímkami a, b body A, B a z bodu D promítneme přímkami a', b', c' body A, B, C. Tyto přímky určují spolu s tečnou c projektivitu svazků $[\,C\,], [\,D\,]$. Určíme direkční střed O těchto projektivních svazků, který leží na tečně c. K určení dalšího bodu kuželosečky zvolíme přímku e svazku $[\,C\,]$ různou od přímek a, b, c, c' a sestrojíme k ní odpovídající přímku e' svazku $[\,D\,]$. Průsečík E těchto přímek je bodem kuželosečky. Tečnu d' v bodě D sestrojíme jako přímku odpovídající v projektivitě přímce $d = CD$. Tečna d' je tedy určena body D, O.



Obr. 2.1.4

Úloha 2.1.4 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a tečnami b, c' v bodech B, C. Sestrojte její další bod.

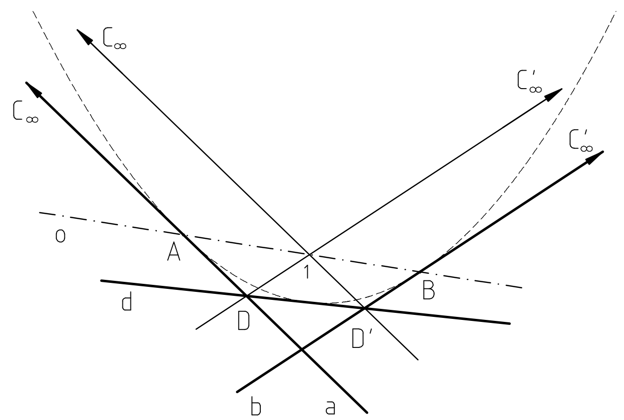


Obr. 2.1.5

Řešení (Obr. 2.1.5): Z bodu B promítneme přímkami a, c body A, C a z bodu C promítneme přímkami a', b' body A, B. Přímky $a, a', b, b' = c, c'$ určují projektivitu svazků o středech B, C. Průsečík O přímek b, c' je direkčním středem této projektivity. Další bod kuželosečky sestrojíme jako průsečík odpovídajících si přímek v této projektivitě.

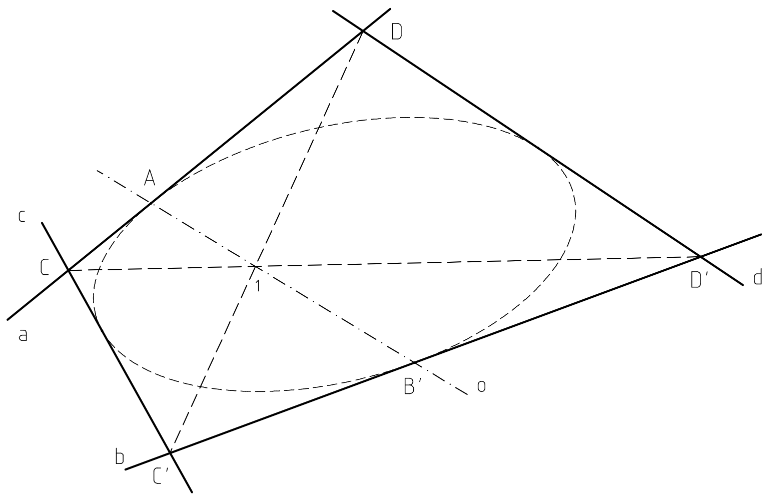
Úloha 2.1.5 Kuželosečka je dána dvěma vlastními tečnami a, b s vlastními body dotyku A, B a nevlastní tečnou c_∞. Sestrojte další tečnu kuželosečky.

Řešení (Obr. 2.1.6): Označíme $C_\infty = a \cap c_\infty$, $C'_\infty = b \cap c_\infty$. Body $A, B, C_\infty, C'_\infty$ určují projektivitu přímých řad bodových $[\,a\,], [\,b\,]$, kde body A, B odpovídají průsečíku přímek a, b. Direkční osa o projektivity řad prochází body A, B. Na přímce a zvolíme bod D různý od bodů $A, a \cap b, C_\infty$ a pomocí direkční osy určíme jemu odpovídající bod D' ležící na přímce b. Body D, D' určují hledanou tečnu d.



Obr. 2.1.6

Úloha 2.1.6 Kuželosečka je určena čtyřmi vlastními tečnami a, b, c, d a bodem dotyku A na tečně a. Sestrojte další bod kuželosečky.

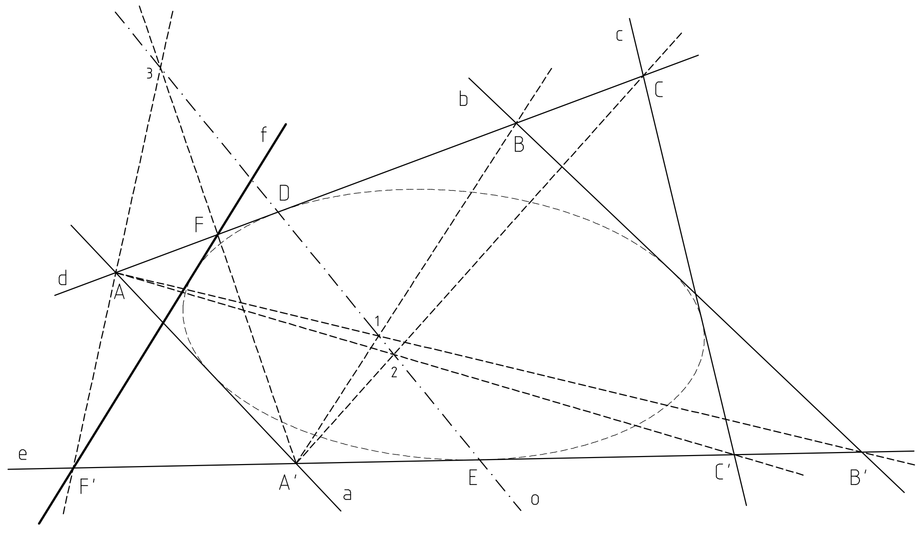


Obr. 2.1.7

Řešení (Obr. 2.1.7): Označíme $C = a \cap c, C' = b \cap c, D = a \cap d, D' = b \cap d$. Body A, C, C', D, D' určují projektivitu řad $[\,a\,], [\,b\,]$, ve které bod A odpovídá průsečíku přímek a, b. Direkční osa o je určena body A a $1 = CD' \cap C'D$ a protíná přímku b v bodě B', který je hledaným bodem dotyku.

Úloha 2.1.7 Kuželosečka je dána pěti vlastními tečnami a, b, c, d, e. Sestrojte další tečnu a některý bod dotyku.

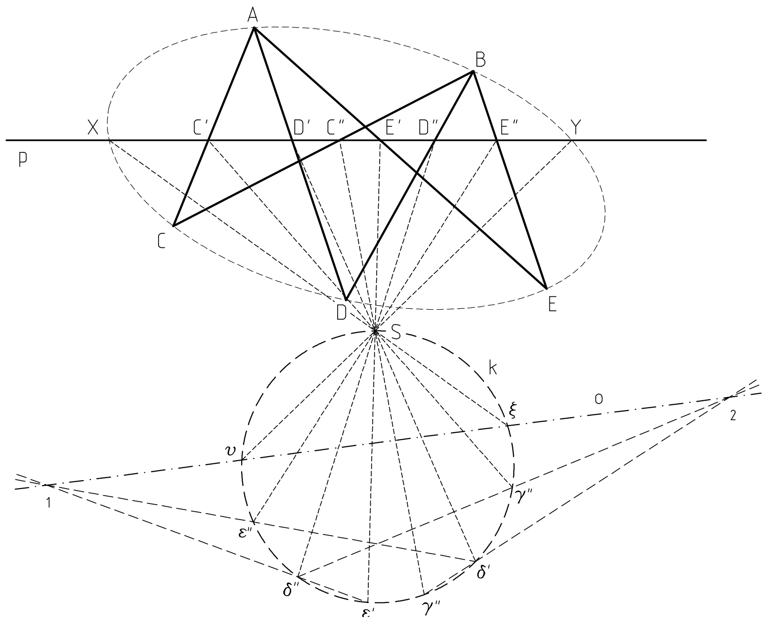
Řešení (Obr. 2.1.8): Označíme $A = a \cap d, A' = a \cap e, B = b \cap d, B' = b \cap e, C = c \cap d, C' = c \cap e$. Body A, B, C, A', B', C' určují projektivitu přímých řada bodových $[\,d\,], [\,e\,]$. Sestrojíme direkční osu o této projektivity na přímkách e, d. Direkční osa o protíná tečny d, e v bodech D, E, které jsou body dotyku dané kuželosečky (věta 2.1.8). Další tečnu kuželosečky určíme jako spojnici odpovídajících si bodů projektivních řad $[\,d\,], [\,e\,]$. Na přímce d zvolíme bod F různý od bodů A, B, C, D a pomocí direkční osy určíme jemu odpovídající bod F' řady $[\,e\,]$. Hledaná tečna f je určena body F, F'.



Obr. 2.1.8

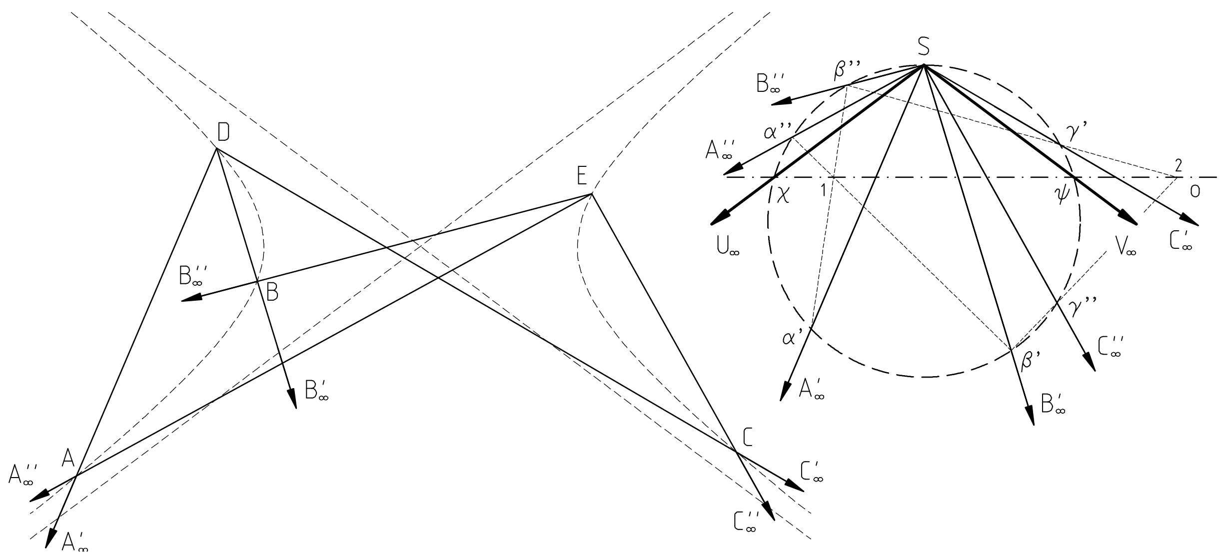
Úloha 2.1.8 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. Sestrojte průsečíky kuželosečky s danou přímkou p.

Řešení (Obr. 2.1.9): Z bodů A, B promítneme na přímku p body C, D, E. Na přímce p tak dostaneme projektivitu soumístných řad, ve které $C' \to C''$, $D' \to D''$, $E' \to E''$. Hledané průsečíky X, Y přímky p s kuželosečkou jsou samodružné body této projektivity. Tyto body sestrojíme pomocí Steinerovy kružnice (konstrukce 2.1.1). Na libovolné kružnici k zvolíme libovolný bod S, který neleží na přímce p, a z tohoto bodu promítneme body C', D', E' a C'', D'', E'' projektivními svazky přímek. Tyto svazky vytínají na kružnici k projektivní kvadratické soustavy bodů $k(\gamma', \delta', \varepsilon', \ldots)$, $k(\gamma'', \delta'', \varepsilon'', \ldots)$. Sestrojíme direkční osu o této projektivity, která protíná kružnici k v samodružných bodech ξ, υ. Tyto body určují spolu s bodem S samodružné přímky projektivity svazků, které protínají přímku p v hledaných samodružných bodech X, Y, tedy hledaných průsečících přímky p s kuželosečkou.



Obr. 2.1.9

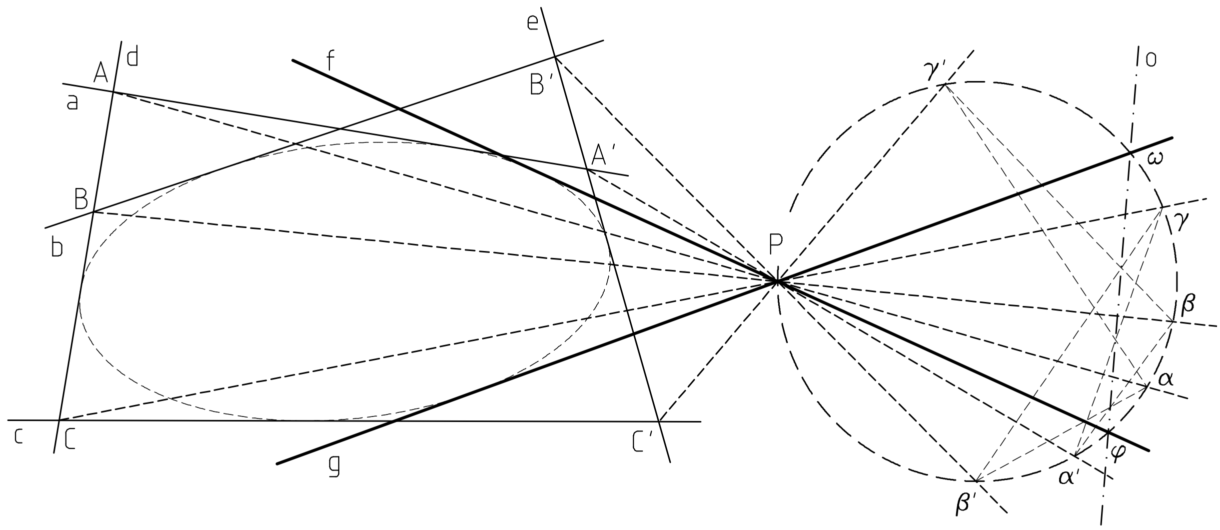
Úloha 2.1.9 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. Sestrojte průsečíky s nevlastní přímkou.



Obr. 2.1.10

Řešení (Obr. 2.1.10): Z bodů D, E promítneme na nevlastní přímku body A, B, C. Na nevlastní přímce tak dostaneme projektivitu soumístných řad, ve které $A'_\infty \rightarrow A''_\infty$, $B'_\infty \rightarrow B''_\infty$, $C'_\infty \rightarrow C''_\infty$. Hledané průsečíky U_∞, V_∞ nevlastní přímky s kuželosečkou jsou samodružné body této projektivity. Tyto body sestrojíme pomocí Steinerovy kružnice.

Úloha 2.1.10 Kuželosečka je dána pěti vlastními tečnami a, b, c, d, e. Sestrojte tečny kuželosečky z daného bodu P, který neleží na žádné z daných tečen.



Obr. 2.1.11

Řešení (Obr. 2.1.11): Označíme $A = a \cap d, A' = a \cap e, B = b \cap d, B' = b \cap e, C = c \cap d, C' = c \cap e$. Body A, A', B, B', C, C' určují projektivitu přímých řada bodových $[\ d\ ], [\ e\ ]$. Z bodu P promítneme projektivní řady bodové $[\ d\ ], [\ e\ ]$ a dostaneme tak projektivitu soumístných svazků o středu P. Samodružné přímky f, g této projektivity jsou hledané tečny kuželosečky. Tečny f, g sestrojíme pomocí Steinerovy kružnice.

2.2 Pascalova věta

Jelikož pět bodů určuje kuželosečku, je šest bodů této kuželosečky vázáno jistou podmínkou. V předchozí části jsme ukázali, jak sestrojit další bod kuželosečky určené pěti body pomocí projektivních svazků. Nyní vyslovíme větu, tzv. *Pascalovu větu*[4], která

[4]Pojmenovaná podle francouzského matematika Blaise Pascala (1623–1662), který ji v roce 1640 objevil.

uvádí další vztah šesti bodů na kuželosečce a díky které bude konstrukce další bodů kuželosečky jednodušší.

Definice 2.2.1 Uspořádaná množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ šesti bodů ležících na kuželosečce $\mathcal{K}$ se nazývá *šestiúhelník kuželosečce vepsaný*. Body $1, 2, 3, 4, 5, 6$ nazýváme *vrcholy* šestiúhelníku, přímky $12, 23, 34, 45, 56, 61$ nazýváme *strany* šestiúhelníku, dvojici vrcholů ležící na téže straně nazýváme *sousední vrcholy*, dvojice stran $12, 45$; $23, 56$; $34, 61$ nazýváme *protější strany* šestiúhelníku.

Věta 2.2.1 *(Pascalova) Průsečíky protějších stran šestiúhelníku kuželosečce $\mathcal{K}$ vepsaného leží na jedné přímce, tzv. Pascalově přímce a obráceně, leží-li průsečíky protějších stran šestiúhelníku na jedné přímce, pak je tento šestiúhelník vepsán jisté kuželosečce.*

Důkaz:

(1) Dokážeme, že průsečíky protějších stran šestiúhelníku kuželosečce vepsaného leží na jedné přímce. Nechť $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ je daný šestiúhelník. Označíme-li $1 = A, 2 = C', 3 = B, 4 = A', 5 = C, 6 = B'$, pak tyto body určují projektivnost kvadratických soustav bodů $\mathcal{K}(A, B, C, \ldots), \mathcal{K}(A', B', C', \ldots)$. Body $AB' \cap A'B, AC' \cap A'C, BC' \cap B'C$, které jsou zároveň průsečíky protějších stran šestiúhelníku, leží na jedné přímce, direkční ose.

(2) Dokážeme druhou část věty. Nechť je dán šestiúhelník s vrcholy $1, 2, 3, 4, 5, 6$, pro které platí, že body $X = 12 \cap 45$, $Y = 23 \cap 56$, $Z = 34 \cap 61$ leží na přímce p. Body $1, 2, 3, 4, 5$ určují kuželosečku a dokážeme, že bod 6 na této kuželosečce také leží. Přímka 16 protíná tuto kuželosečku v bodech 1 a $6'$. K šestiúhelníku $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ můžeme sestrojit Pascalovu přímku, která je totožná s přímkou p a tedy $6 = 6'$.

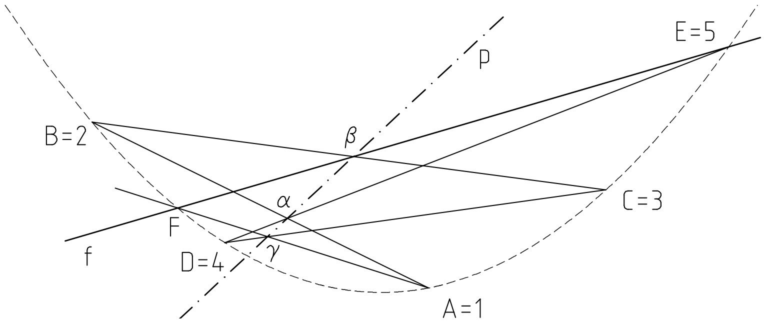
$\square$

V případě, že dva sousední vrcholy šestiúhelníku kuželosečce vepsaného splynou, nahrazujeme jejich spojnici tečnou kuželosečky v tomto bodě. Pro případ, kdy šest vrcholů splyne (po dvou) do třech vrcholů, dostáváme speciální případ Pascalovy věty pro trojúhelník kuželosečce vepsaný.

Věta 2.2.2 *Průsečíky stran trojúhelníku kuželosečce vepsaného s jejími tečnami sestrojenými v protějších vrcholech leží na jedné přímce.*

Úloha 2.2.1 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. Sestrojte další bod kuželosečky.

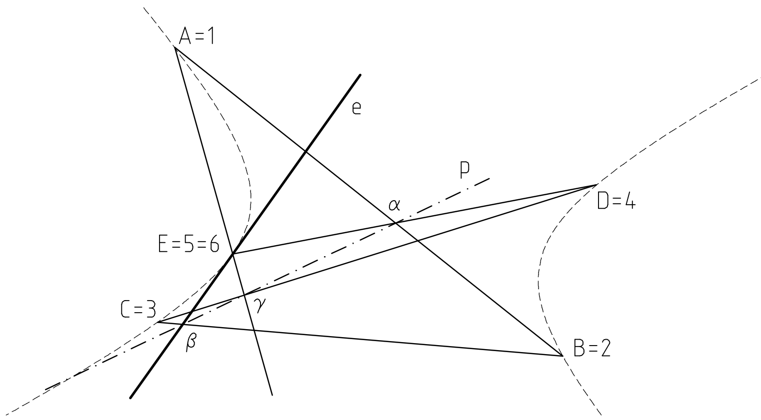
Řešení(Obr. 2.2.1): Označíme $A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, E = 5$ a sestrojíme libovolnou přímku f procházející bodem E a neprocházející body A, B, C, D. Sestrojíme Pascalovu přímku p šestiúhelníku $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, pro který je spojnice vrcholů 5 a 6 dána přímkou f. Přímka p je určena body $\alpha = 12 \cap 45$ a $\beta = 23 \cap f$. Hledaný bod $F = 6$ určíme jako průsečík přímky f s přímkou $\gamma 1$, kde $\gamma = 34 \cap p$.



Obr. 2.2.1

Úloha 2.2.2 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. Sestrojte tečnu kuželosečky v některém z daných bodů.

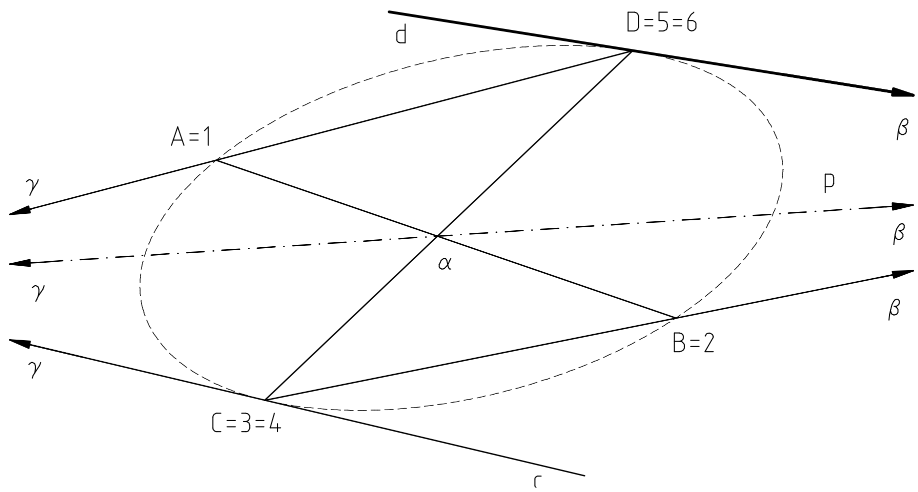
Řešení(Obr. 2.2.2): Označíme $A = 1, B = 2, C = 3, D = 4, E = 5 = 6$ a sestrojíme Pascalovu přímku p šestiúhelníku $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Jelikož jsme zvolili $E = 5 = 6$, je spojnice vrcholů 5 a 6 nahrazena tečnou e kuželosečky v bodě E. Tato hledaná tečna je určena bodem E a bodem $\beta = 23 \cap p$.



Obr. 2.2.2

Úloha 2.2.3 Kuželosečka je dána čtyřmi vlastními body A, B, C, D a tečnou d v bodě D. Sestrojte další tečnu kuželosečky.

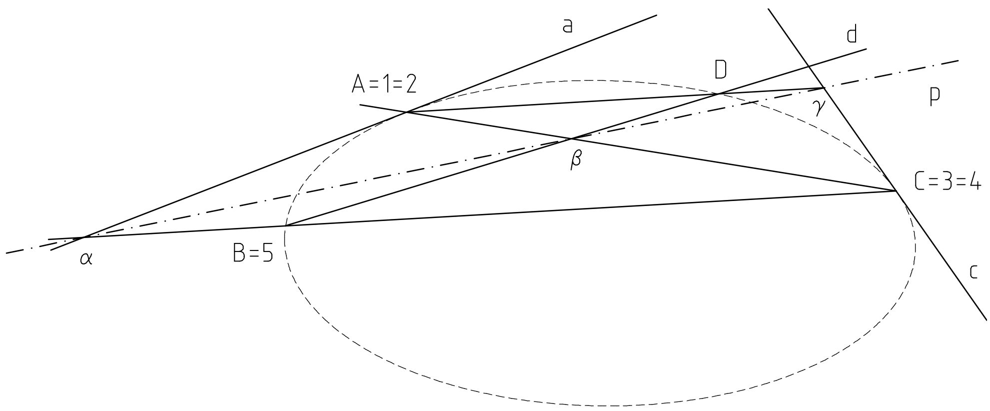
Řešení(Obr. 2.2.3): Označíme $A = 1, B = 2, C = 3 = 4, D = 5 = 6$ a sestrojíme Pascalovu přímku p šestiúhelníku $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Spojnici vrcholů 3 a 4, resp. 5 a 6, nahradíme tečnou c kuželosečky v bodě C, resp. hledanou tečnou d v bodě D. Tečna d je určena bodem D a bodem $\beta = 23 \cap p$.



Obr. 2.2.3

Úloha 2.2.4 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a tečnami a, c v bodech A, C. Sestrojte další bod kuželosečky.

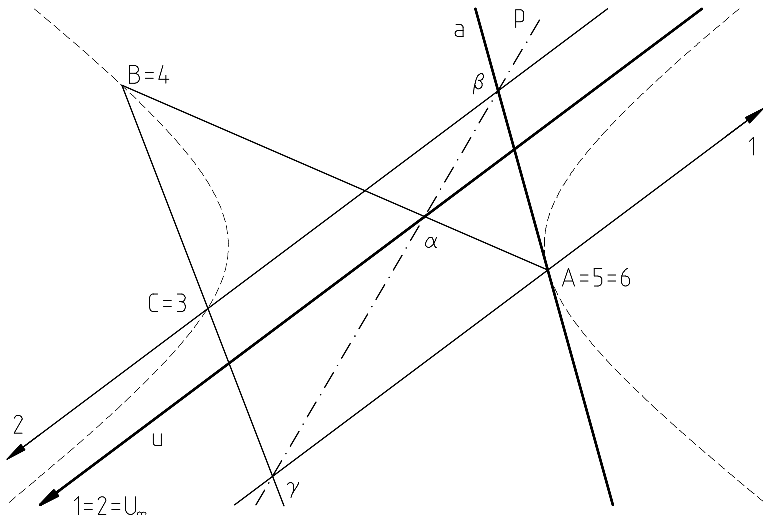
Řešení(Obr. 2.2.4): Označíme $A = 1 = 2, B = 5, C = 3 = 4$ a zvolíme libovolnou přímku d procházející bodem B a neprocházející body A, C, na které leží hledaný bod D. Pascalova přímka p šestiúhelníku $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ je určena body $\alpha = a \cap 45$ a $\beta = 23 \cap d$. Dále určíme bod $\gamma = c \cap p$ a protože má platit $\gamma = c \cap 16$, sestrojíme hledaný bod D jako průsečík přímek d a $\gamma 1$.



Obr. 2.2.4

Úloha 2.2.5 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a vlastní tečnou u s nevlastním bodem dotyku U_∞. Sestrojte další tečnu kuželosečky.

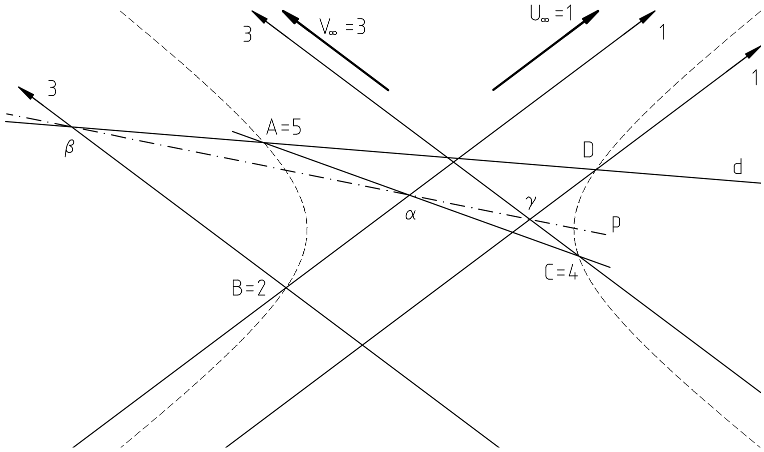
Řešení(Obr. 2.2.5): Označíme $A = 5 = 6, B = 4, C = 3, U_\infty = 2 = 1$ a sestrojíme Pascalovu přímku šestiúhelníku $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Spojnici vrcholů 5 a 6, resp. 1 a 2, nahradíme hledanou tečnou a kuželosečky v bodě A, resp. tečnou u v bodě U_∞. Pascalova přímka p je určena body $\alpha = u \cap 45$ a $\gamma = 34 \cap 61$. Tečna a je určena body A a $\beta = 23 \cap p$.



Obr. 2.2.5

Úloha 2.2.6 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a dvěma nevlastními body U_∞, V_∞. Sestrojte další bod kuželosečky.

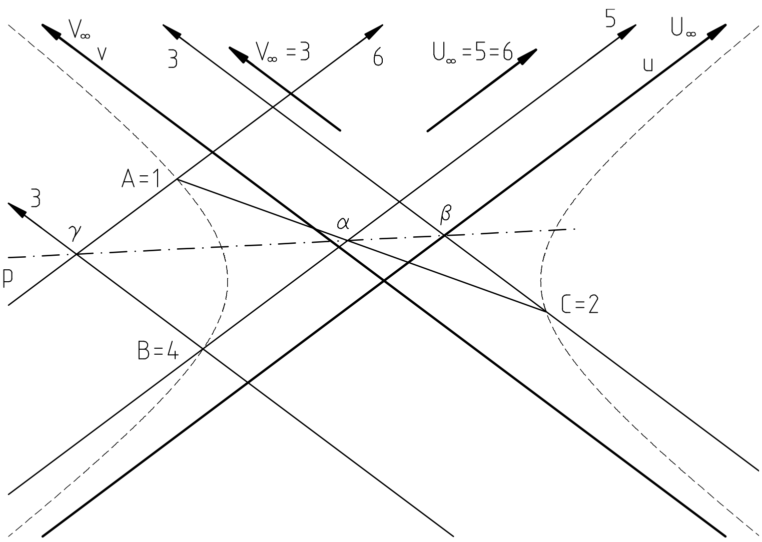
Řešení(Obr. 2.2.6): Označíme $A = 5, B = 2, C = 4, U_\infty = 1, V_\infty = 3$ a zvolíme libovolnou přímku d procházející bodem A a neprocházející body B, C, U_∞, V_∞. Dále sestrojíme Pascalovu přímku p šestiúhelníku $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, pro který je spojnice vrcholů $5, 6$ dána přímkou d. Přímka p je určena body $\alpha = 12 \cap 45$ a $\beta = 23 \cap 56$. Hledaný bod D kuželosečky určíme jako průsečík přímky d s přímkou $\gamma 1$, kde $\gamma = 34 \cap p$.



Obr. 2.2.6

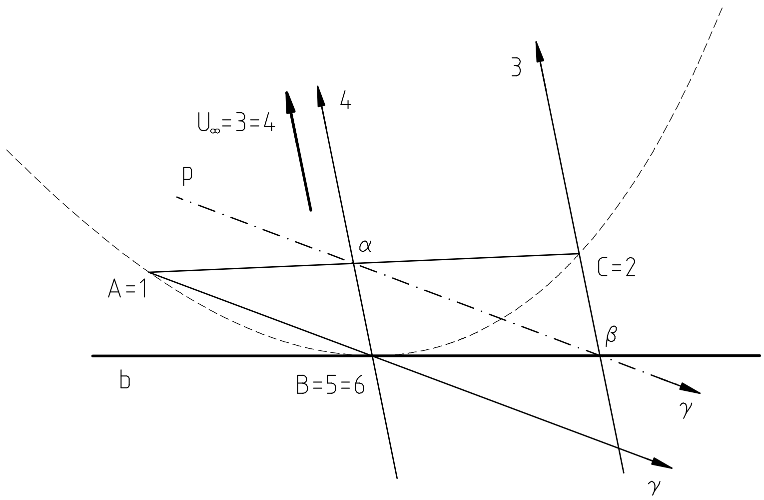
Úloha 2.2.7 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a dvěma nevlastními body U_∞, V_∞. Sestrojte tečny kuželosečky v nevlastních bodech.

Řešení(Obr. 2.2.7): Označíme $A = 1, B = 4, C = 2, U_\infty = 5 = 6, V_\infty = 3$ a sestrojíme Pascalovu přímku p šestiúhelníku $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Přímka p je určena body $\alpha = 12 \cap 45$ a $\gamma = 34 \cap 61$. Hledaná tečna u v bodě U_∞, která nahrazuje spojnici vrcholů $5, 6$ šestiúhelníku, prochází bodem $\beta = 23 \cap p$. Tečnu v v bodě V_∞ sestrojíme analogicky.



Obr. 2.2.7

Úloha 2.2.8 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a jedním nevlastním bodem U_∞ s nevlastní tečnou. Sestrojte tečnu kuželosečky v některém z daných vlastních bodů.



Obr. 2.2.8

Řešení(Obr. 2.2.8): Označíme $A = 1, B = 5 = 6, C = 2, U_\infty = 3 = 4$ a sestrojíme Pascalovu přímku p šestiúhelníku $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Spojnici splývajících vrcholů 3 a 4 nahradíme tečnou v bodě U_∞, tedy nevlastní přímkou n_∞. Přímka p je určena vlastním bodem $\alpha = 12 \cap 45$ a nevlastním bodem $\gamma = 61 \cap n_\infty$. Hledaná tečna b nahrazuje spojnici vrcholů 5 a 6 šestiúhelníku $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, a prochází tedy bodem $\beta = 23 \cap p$.

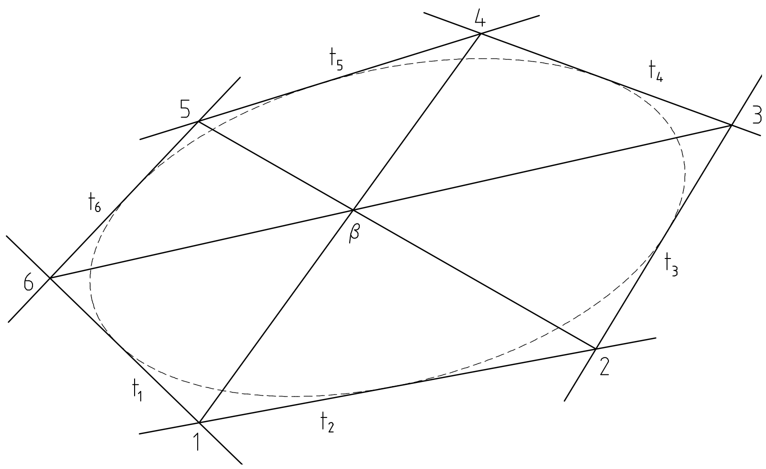
2.3 Brianchonova věta

K Pascalově větě lze vyslovit větu duální, tzv. *Brianchonovu*[5]. Tato věta byla objevena 166 let po větě Pascalově, jelikož v té době nebyl znám princip duality.

Definice 2.3.1 Uspořádaná množina $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$ šesti tečen kuželosečky $\mathcal{K}$ se nazývá *šestiúhelník kuželosečce opsaný*. Přímky $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ nazýváme *strany* šestiúhelníku, body $t_1 \cap t_2 = 1, t_2 \cap t_3 = 2, t_3 \cap t_4 = 3, t_4 \cap t_5 = 4, t_5 \cap t_6 = 5, t_6 \cap t_1 = 6$ nazýváme *vrcholy* šestiúhelníku, dvojice vrcholů 1,4; 2,5; 3,6 nazýváme *protější vrcholy* šestiúhelníku.

Věta 2.3.1 *(Brianchonova) Spojnice protějších vrcholů šestiúhelníku kuželosečce opsaného procházejí jedním bodem, tzv. Brianchonovým bodem, a opačně procházejí-li spojnice protějších vrcholů šestiúhelníku jedním bodem, pak tento šestiúhelník je opsán jisté kuželosečce.*

[5]Objevena francouzským matematikem Charlesem Julienem Brianchonem (1783–1864) roku 1806.



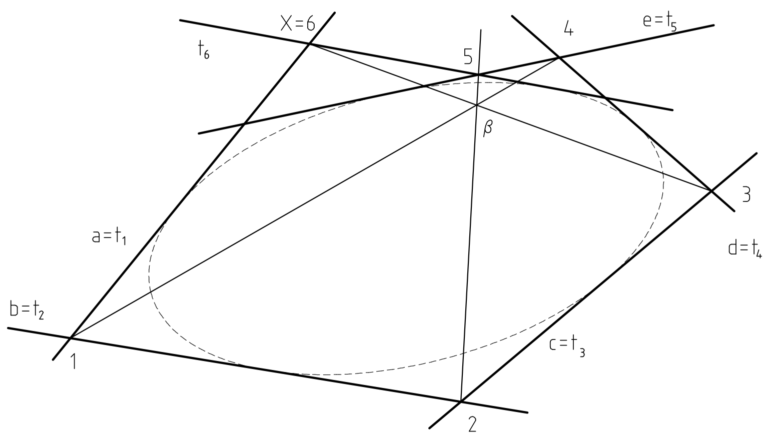
Obr. 2.3.1

Splynou-li dvě sousední strany šestiúhelníku kuželosečce opsaného, nahrazujeme jejich průsečík bodem dotyku dané kuželosečky na této přímce. Pro případ, kdy šest stran šestiúhelníku splyne (po dvou) do třech, dostáváme duální větu k větě o trojúhelníku kuželosečce vepsaném.

Věta 2.3.2 *Spojnice vrcholů trojúhelníku kuželosečce opsaného s body dotyku jeho protějších stran procházejí jedním bodem.*

Brianchonovu větu užíváme zejména ke konstrukci dalších tečen kuželosečky, kterou máme zadánu pomocí pěti tečen či dvěma tečnami s body dotyku a další tečnou.

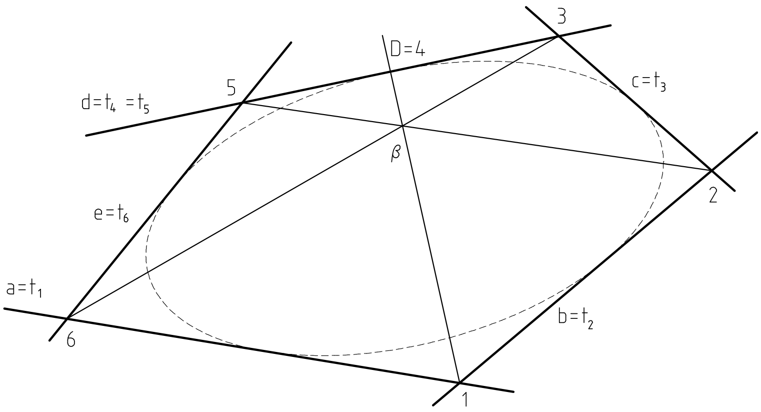
Úloha 2.3.1 Kuželosečka je dána pěti vlastními tečnami a, b, c, d, e. Sestrojte další tečnu kuželosečky.



Obr. 2.3.2

Řešení (Obr. 2.3.2): Označíme $a = t_1, b = t_2, c = t_3, d = t_4, e = t_5$ a na přímce t_1 zvolíme libovolný bod $X = 6$ neležící na žádné z přímek t_2, t_3, t_4, t_5. Sestrojíme Brianchonův bod β šestiúhelníku $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$ kuželosečce opsaného jako průsečík přímek 14 a 36, kde $1 = t_1 \cap t_2$, $4 = t_4 \cap t_5$ a $3 = t_3 \cap t_4$. Dále určíme bod 5 jako průsečík přímek $\beta 2$ a t_5. Tímto bodem a bodem 6 prochází hledaná tečna t_6 kuželosečky.

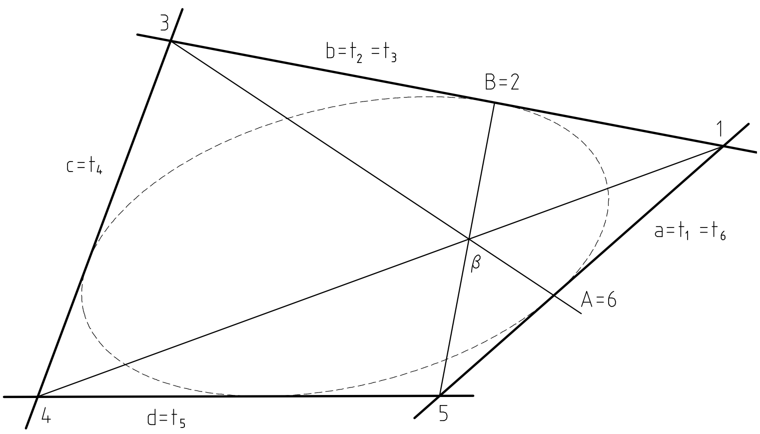
Úloha 2.3.2 Kuželosečka je dána pěti vlastními tečnami a, b, c, d, e. Sestrojte bod dotyku na jedné z nich.



Obr. 2.3.3

Řešení (Obr. 2.3.3): Označíme $a = t_1, b = t_2, c = t_3, d = t_4 = t_5, e = t_6$ a sestrojíme Brianchonův bod β šestiúhelníku $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$. Průsečík splývajících stran t_4, t_5 šestiúhelníku nahrazujeme hledaným bodem dotyku tečny d. Brianchonův bod je průsečík přímek 25 a 36, kde $2 = t_2 \cap t_3$, $5 = t_5 \cap t_6$, $3 = t_3 \cap t_4$ a $6 = t_6 \cap t_1$. Bod dotyku $D = 4$ na tečně d určíme jako průsečík přímky d s přímkou $\beta 1$.

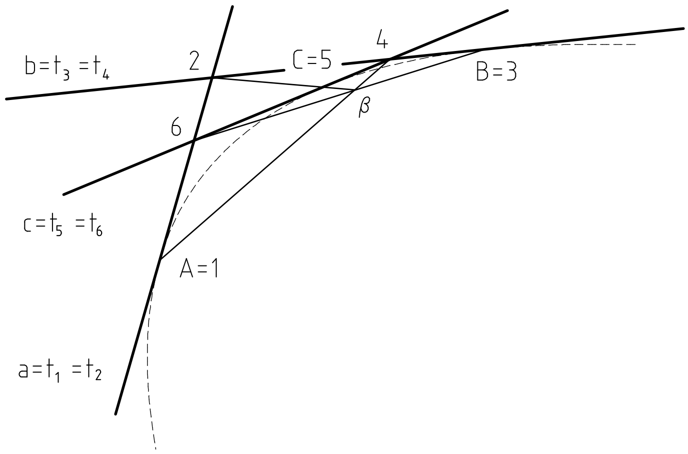
Úloha 2.3.3 Kuželosečka je dána čtyřmi vlastními tečnami a, b, c, d a bodem dotyku B na tečně b. Sestrojte další bod dotyku.



Obr. 2.3.4

Řešení (Obr. 2.3.4): Označíme $a = t_1 = t_6, b = t_2 = t_3, c = t_4, d = t_5$ a sestrojíme Brianchonův bod β šestiúhelníku $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$. Jelikož strany t_2 a t_3 šestiúhelníku splývají, nahradíme jejich průsečík bodem $B = 2$. Vrcholy $1, 3, 4, 5$ šestiúhelníku určíme jako průsečíky odpovídajících stran tohoto šestiúhelníku. Hledaný bod dotyku na tečně a určíme jako vrchol 6 šestiúhelníku $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$. Bod $A = 6$ je tedy průsečík přímek a a $\beta 3$.

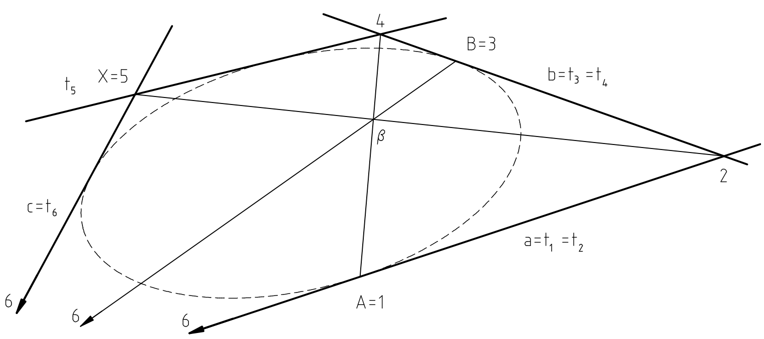
Úloha 2.3.4 Kuželosečka je dána třemi vlastními tečnami a, b, c a body dotyku A, B na tečnách a, b. Sestrojte zbývající bod dotyku.



Obr. 2.3.5

Řešení (Obr. 2.3.5): Označíme $a = t_1 = t_2, b = t_3 = t_4, c = t_5 = t_6$ a $A = 1, B = 3, 2 = t_2 \cap t_3, 4 = t_4 \cap t_5, 6 = t_6 \cap t_1$. Sestrojíme Brianchonův bod β jako průsečík přímek 14 a 36. Hledaný bod dotyku $C = 5$ na tečně c je průsečík této tečny s přímkou $\beta 2$.

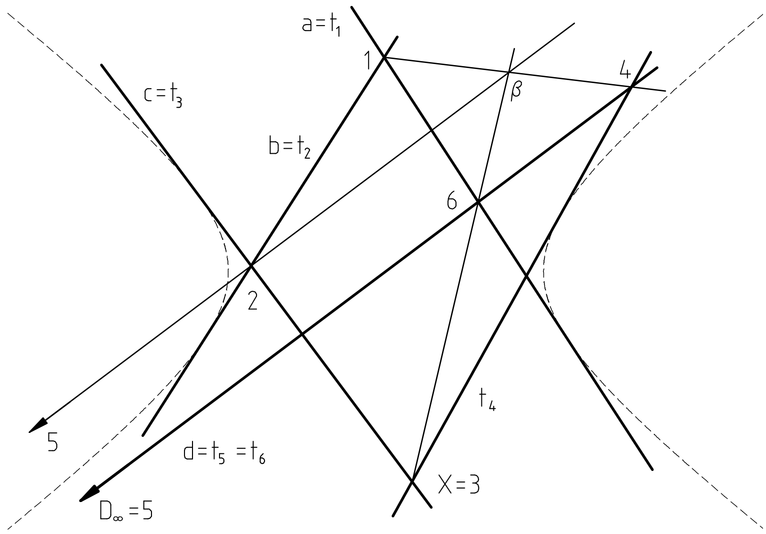
Úloha 2.3.5 Kuželosečka je dána třemi vlastními tečnami a, b, c a body dotyku A, B na tečnách a, b. Sestrojte další tečnu.



Obr. 2.3.6

Řešení (Obr. 2.3.6): Označíme $a = t_1 = t_2, b = t_3 = t_4, c = t_6$ a na tečně t_6 zvolíme libovolný bod $X = 5$ neležící na žádné z tečen t_1, t_2, t_3, t_4. Bod $X = 5$ je vrcholem šestiúhelníku $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$, kde tečna t_5 je hledaná tečna kuželosečky. Určíme Brianchonův bod β tohoto šestiúhelníku, $\beta = 25 \cap 36$, kde $2 = t_2 \cap t_3$, $B = 3$ a $6 = t_6 \cap t_1$, a pomocí tohoto bodu sestrojíme vrchol 4. Hledaná tečna t_5 je určena body $X = 5$ a 4.

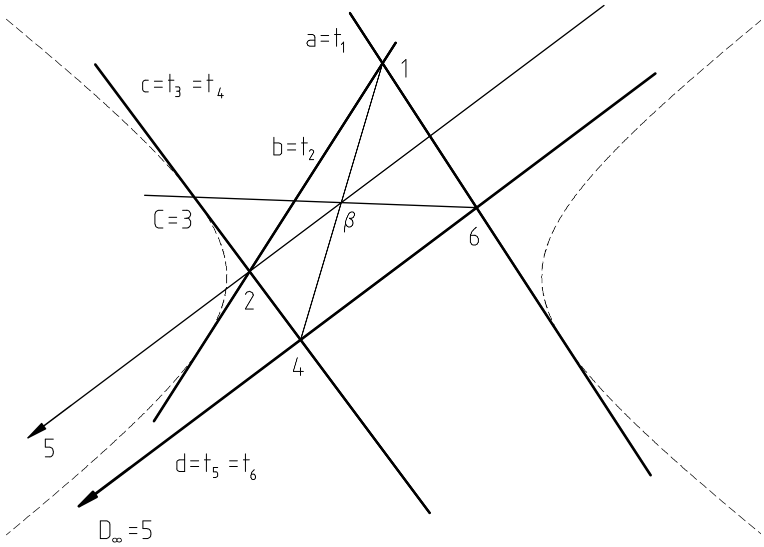
Úloha 2.3.6 Kuželosečka je dána čtyřmi vlastními tečnami a, b, c, d a nevlastním bodem dotyku D_∞ na tečně d. Sestrojte další tečnu kuželosečky.



Obr. 2.3.7

Řešení (Obr. 2.3.7): Označíme $a = t_1, b = t_2, c = t_3, d = t_5 = t_6$ a na tečně t_3 zvolíme libovolný bod $X = 3$ neležící na žádné z tečen t_1, t_2, t_4, t_6. Nevlastní bod dotyku D_∞ nahrazuje průsečík stran t_5, t_6 šestiúhelníku $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$, označíme tedy $D_\infty = 5$. Sestrojíme Brianchonův bod β tohoto šestiúhelníku, ve kterém je strana t_4 hledanou tečnou kuželosečky. Pomocí bodu β určíme vrchol 4 šestiúhelníku, který spolu s bodem $X = 3$ určuje hledanou tečnu t_4.

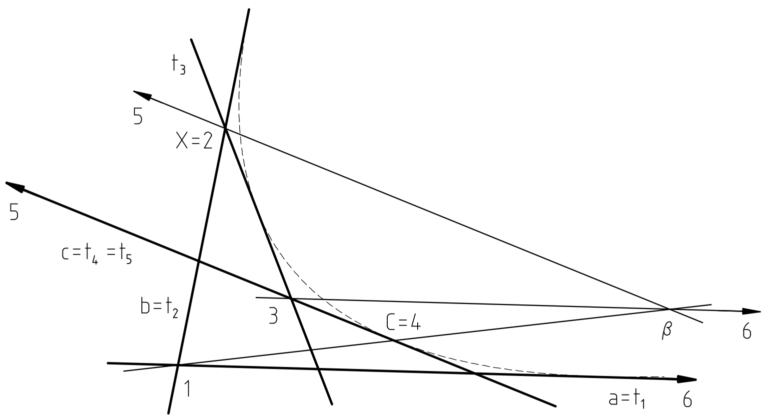
Úloha 2.3.7 Kuželosečka je dána čtyřmi vlastními tečnami a, b, c, d a nevlastním bodem dotyku D_∞ na tečně d. Sestrojte další bod kuželosečky.



Obr. 2.3.8

Řešení (Obr. 2.3.8): Označíme $a = t_1, b = t_2, c = t_3 = t_4, d = t_5 = t_6$ a $1 = t_1 \cap t_2, 2 = t_2 \cap t_3, 4 = t_4 \cap t_5, D_\infty = 5, 6 = t_6 \cap t_1$. Sestrojíme Brianchonův bod β, pro který platí $\beta = 14 \cap 25$. Hledaný bod dotyku C tečny c určíme jako vrchol 3 šestiúhelníku $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$, tedy $C = 3 = c \cap \beta 6$.

Úloha 2.3.8 Kuželosečka je dána třemi vlastními tečnami a, b, c, nevlastní tečnou n_∞ a bodem dotyku C na tečně c. Sestrojte další tečnu kuželosečky.

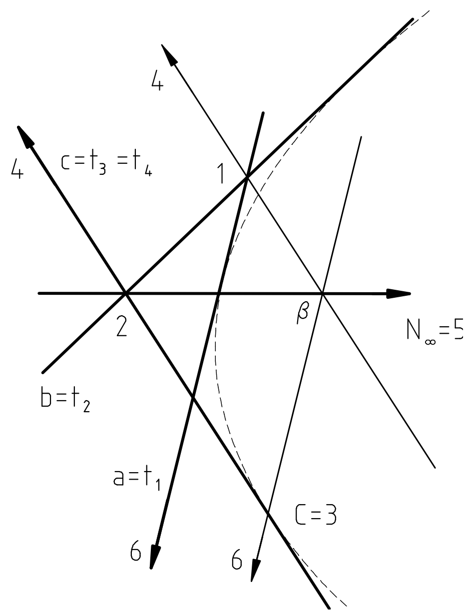


Obr. 2.3.9

Řešení (Obr. 2.3.9): Označíme $a = t_1, b = t_2, c = t_4 = t_5, n_\infty = t_6$ a na tečně t_2 zvolíme libovolný bod $X = 2$ neležící na žádné z tečen t_1, t_4, t_6. Sestrojíme Brianchonův bod β šestiúhelníku $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$ a poté vrchol 3 tohoto šestiúhelníku jako průsečík strany t_4 s přímkou $\beta 6$. Hledaná tečna t_3 je určena body $X = 2$ a 3.

Úloha 2.3.9 Kuželosečka je dána třemi vlastními tečnami a, b, c a vlastním bodem dotyku C na tečně c. Sestrojte bod dotyku na nevlastní přímce n_∞.

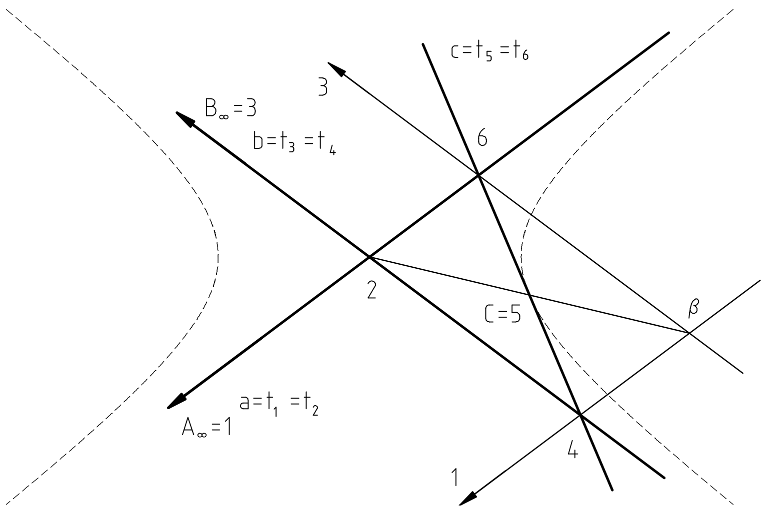
Řešení (Obr. 2.3.10): Označíme $a = t_1, b = t_2, c = t_3 = t_4, n_\infty = t_5 = t_6$ a $1 = t_1 \cap t_2, 2 = t_2 \cap t_3, C = 3, 4 = t_4 \cap t_5, 6 = t_6 \cap t_1$. Hledaný body dotyku N_∞ nevlastní tečny n_∞ je poté vrchol 5 šestiúhelníka $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$ kuželosečce opsaného. Sestrojíme-li Brianchonův bod $\beta = 14 \cap 36$, je nevlastní bod $N_\infty = 5$ určen směrem přímky $\beta 2$.



Obr. 2.3.10

Úloha 2.3.10 Kuželosečka je dána třemi vlastními tečnami a, b, c a dvěma nevlastními body dotyku A_∞, B_∞ na tečnách a, b. Sestrojte bod dotyku C tečny c.

Řešení: (Obr. 2.3.11) Označíme $a = t_1 = t_2, b = t_3 = t_4, c = t_5 = t_6$ a $A_\infty = 1, 2 = t_2 \cap t_3, B_\infty = 3, 4 = t_4 \cap t_5, 6 = t_6 \cap t_1$. Hledaný bod C splyne s vrcholem 5 šestiúhelníku $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$, sestrojíme jej tedy pomocí Brianchonova bodu β, který získáme jako průsečík přímek 36 a 14. Bod $5 = c \cap 2\beta$.



Obr. 2.3.11

2.4 Involuce na kuželosečce

Definice 2.4.1 Kvadratické soustavy bodů $\mathcal{K}\,(A, B, C, \ldots)$, $\mathcal{K}\,(A', B', C', \ldots)$ tvoří *involuci bodů*, promítají-li se z libovolného bodu kuželosečky involutorními svazky.

Definice 2.4.1*Kvadratické soustavy tečen $\mathcal{K}\,(a, b, c, \ldots)$, $\mathcal{K}\,(a', b', c', \ldots)$ tvoří *involuci tečen*, vytínají-li na libovolné tečně kuželosečky involutorní řady bodové.

Pro involuci kvadratických soustav bodů či tečen platí analogické věty jako pro involuci lineárních útvarů.

Věta 2.4.1 *Jestliže v projektivnosti kvadratických soustav bodů, resp. tečen, existuje kromě samodružných prvků alespoň jeden involutorní pár prvků, pak všechny páry odpovídajících si prvků jsou involutorní a daná projektivnost je involuce.*

Věta 2.4.2 *Involuce kvadratických soustav bodů, resp. tečen, je určena dvěma různými páry odpovídajících si prvků.*

Věta 2.4.3 *Involuce na kuželosečce má buď dva různé samodružné prvky nebo nemá žádný samodružný prvek.*

Definice 2.4.2 Involuce na kuželosečce se dvěma samodružnými prvky se nazývá *hyperbolická*. Involuce bez samodružných bodů se nazývá *eliptická*.

Věta 2.4.4 *Kterékoli dva páry odpovídajících si prvků eliptické involuce se navzájem oddělují, zatímco kterékoli dva páry odpovídajících si prvků hyperbolické involuce se navzájem neoddělují.*

Při studiu involuce na kuželosečce můžeme také, oproti involuci lineárních útvarů, využít direkční osu, resp. direkční střed, dané involutorní projektivity. Následující věty popisují některé vlastnosti direkční osy, resp. direkčního středu, které využíváme při řešení úloh o kuželosečkách.

Definice 2.4.3 Direkční osa involutorní projektivity bodů na kuželosečce se nazývá *osa involuce bodů.*

Definice 2.4.3* Direkční střed involutorní projektivity tečen kuželosečky se nazývá *střed involuce tečen.*

Věta 2.4.5 *Osa hyperbolické involuce bodů na kuželosečce protíná tuto kuželosečku v samodružných bodech této involuce.*

Věta 2.4.5* *Tečny vedené ze středu hyperbolické involuce tečen kuželosečky jsou samodružné přímky této involuce.*

Věta 2.4.6 *Involuce bodů na kuželosečce je určena svou osou.*

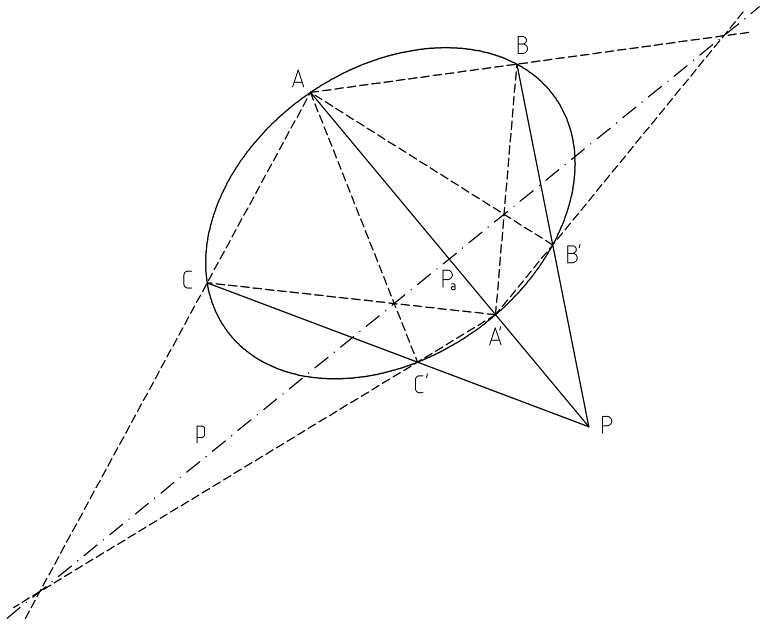
Věta 2.4.6* *Involuce tečen kuželosečky je určena svým středem.*

! K určení direkční osy, resp. direkčního středu, projektivity kvadratických soustav jsou potřeba tři páry odpovídajících si prvků. Jelikož je však involuce určena pouze dvěma páry, uvedeme věty, které dávají návod, jak pomocí těchto bodů sestrojit osu involuce, resp. střed involuce.

Věta 2.4.7 *Jsou-li A, A', B, B' dva různé páry odpovídajících si bodů v involuci na kuželosečce, pak osa této involuce je diagonální stranou úplného čtyřrohu $AA'BB'$, která leží proti tomu diagonálnímu vrcholu, kterým procházejí strany AA' a BB'.*

Důkaz: Nechť $A \to A'$ a $B \to B'$. Položíme-li $C = A'$ a $C' = A$, pak jistě $C \to C'$, jelikož se jedná o involuci. Osa této involuce prochází bodem $AB' \cap A'B$, který je zároveň diagonálním vrcholem úplného čtyřrohu $AA'BB'$, a bodem $BC' \cap B'C$, který je také diagonálním vrcholem úplného čtyřrohu $AA'BB'$. Osa této involuce je tedy diagonální stranou tohoto čtyřrohu.

□



Obr. 2.4.1

Σ Důležitá vlastnost involuce bodů dané kuželosečce $\mathcal{K}(A, B, \varphi)$ je patrná z Obr. 2.4.1. Jsou-li A, A', resp. B, B', resp. C, C' tři libovolné, vzájemně různé páry odpovídajících si bodů této involuce, osa této involuce je diagonální stranou úplného čtyřrohu $AA'BB'$ a zároveň diagonální stranou úplného čtyřrohu $AA'CC'$. Označme tuto osu involuce p. Průsečík spojnic A, A' a B, B' je diagonální vrchol P úplného čtyřrohu $AA'BB'$, který leží proti diagonální straně p. Průsečík osy p s přímkou A, A' označme P_A. Z harmonických vlastností úplného čtyřrohu víme, že platí $(AA'PP_A) = -1$. Přímka p je zároveň diagonální stranou úplného čtyřrohu $AA'CC'$, takže jeho diagonální vrchol proti ní ležící, což je průsečík přímek A, A' a C, C', je bod, který spolu s bodem P_A odděluje harmonicky dvojici bodů A, A'; to znamená, že průsečík přímek A, A' a C, C' je opět bod P, tedy že přímka C, C' prochází bodem P, který se nazývá středem dané involuce bodů na kuželosečce $\mathcal{K}(A, B, \varphi)$. Pro osu involuce se provede duální úvaha, kterou ponecháme na čtenáři.

Věta 2.4.7* *Jsou-li a, a', b, b' dva různé páry odpovídajících si přímek v involuci tečen kuželosečky, pak střed této involuce je diagonální vrchol úplného čtyřstranu $aa'bb'$, který leží proti té diagonální straně, na které leží vrcholy $a \cap a'$ a $b \cap b'$.*

Osa involuce je tedy diagonální stranou každého úplného čtyřrohu $AA'BB'$, kde A, A', B, B' jsou libovolné různé páry odpovídajících si bodů v této involuci. Duálně platí totéž pro střed involuce. Snadno ukážeme, že podobná vlastnost platí i pro diagonální vrchol úplného čtyřrohu, který leží proti ose involuce.

Věta 2.4.8 *Spojnice odpovídajících si bodů v involuci bodů na kuželosečce procházejí jedním bodem, tzv. středem involuce bodů.*

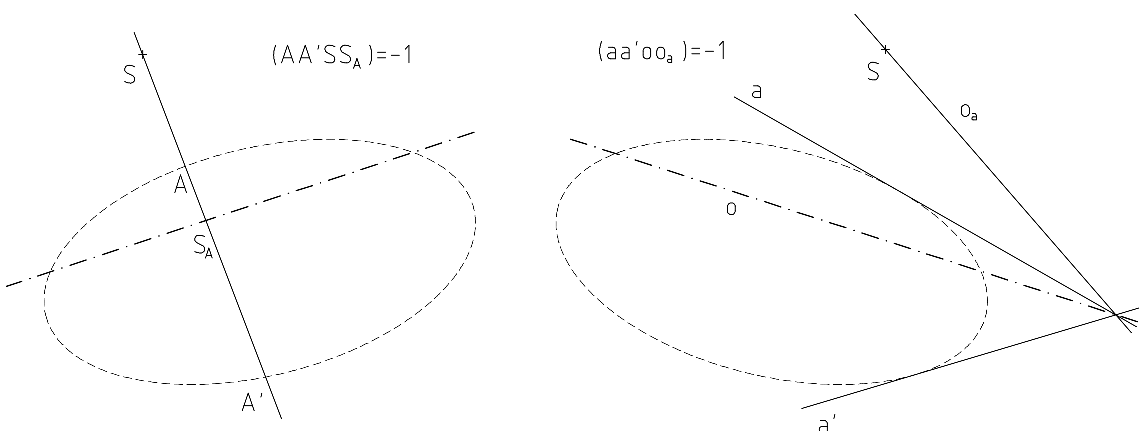
Důkaz: Nechť A, A', B, B', C, C' jsou odpovídající si páry v involuci. Osa této involuce p je diagonální stranou úplného čtyřrohu $AA'BB'$ a současně diagonální stranou úplného čtyřrohu $AA'CC'$. Označíme-li $AA' \cap p = P_A$, $AA' \cap BB' = P$ a $AA' \cap CC' = P'$, pak z harmonických vlastností úplného čtyřrohu plyne, že $(AA'PP_A) = -1$ a zároveň $(AA'P'P_A) = -1$ a tedy $P = P'$.

□

Věta 2.4.8* *Průsečíky odpovídajících si přímek v involuci tečen kuželosečky leží na jedné přímce, tzv. ose involuce tečen.*

Věta 2.4.9 *Dvojice bodů odpovídajících si v involuci na kuželosečce je harmonicky oddělována dvojicí bodů, které na jejich spojnici tvoří průsečík s osou involuce a střed involuce. (Obr. 2.4.1)*

Věta 2.4.9* *Dvojice přímek odpovídajících si v involuci tečen na kuželosečce je harmonicky oddělována dvojicí přímek, které tvoří spojnice jejich průsečíku se středem této involuce a osa této involuce. (Obr. 2.4.2)*



Obr. 2.4.2

Mezi involucí bodů a involucí tečen kuželosečky lze nalézt vzájemný vztah, kdy každou involuci bodů můžeme převést na involuci tečen a opačně. Dále tak budeme hovořit pouze o involuci bodů.

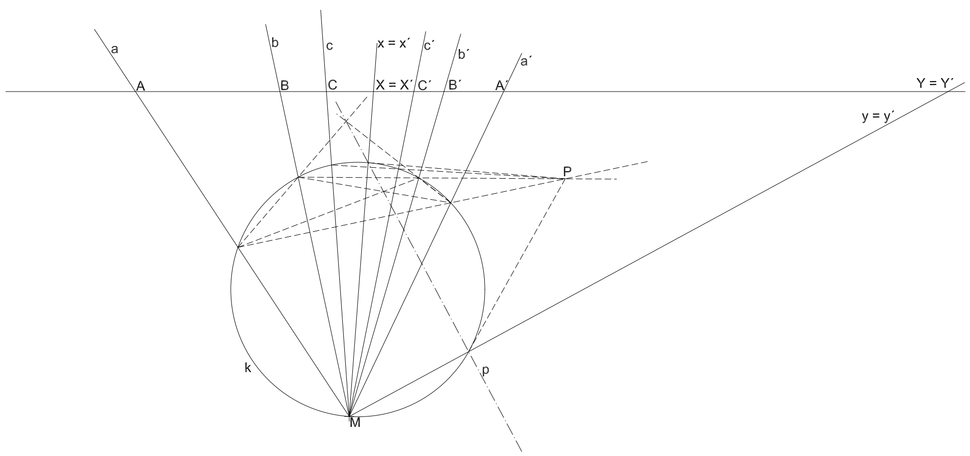
Věta 2.4.10 *Dvojice tečen kuželosečky sestrojené v odpovídajících si bodech involuce bodů tvoří involuci tečen. Obě involuce mají společný střed a osu.*

Pro involuci bodů tedy platí stejné vlastnosti jako pro involuci tečen. Involuce bodů je tedy také určena svým středem, kterým procházejí tečny sestrojené v samodružných bodech této involuce.

Definice 2.4.4 Je-li P střed involuce bodů na kuželosečce, pak říkáme, že bod P tuto involuci na kuželosečce indukuje.

Jelikož diagonální vrchol ležící proti diagonální straně úplného čtyřrohu, není s touto stranou nikdy incidentní, není střed involuce incidentní s osou této involuce. Dále lze ukázat, že střed involuce neleží na kuželosečce a osa involuce není tečnou kuželosečky.

Konstrukce 2.4.1 Doplňte involuci přímek ve svazku o středu M, která je dána dvěma páry odpovídajících si přímek a, a', b, b', a určete její samodružné přímky.



Obr. 2.4.3

Postup (Obr. 2.4.3): Involuce přímek ve svazku se středem M je dána dvěma páry odpovídajících si přímek a, a', b, b'; sestrojme libovolnou kružnici k procházející bodem M. Tato involuce přímek protíná kružnici k v involuci bodů, jejíž střed P sestrojíme jako průsečík spojnic AA' a BB'. Libovolná další přímka incidentní s bodem P protne kružnici k v bodech C, C', jimiž procházejí přímky c, c' daného svazku, jež tvoří další pár dané involuce. Dále určíme osu involuce bodů na kružnici k, která danou kružnici k protíná v samodružných bodech této involuce. Osu můžeme sestrojit dvěma způsoby, buďto jako diagonální stranu úplného čtyřrohu $AA'BB'$ nebo jako spojnici bodů dotyku tečen vedených z bodu P. Průsečíky kružnice k s osou p jsou samodružné body involuce na kružnici k a jimi procházejí hledané samodružné přímky $x = x'$ a $y = y'$ dané involuce.

Konstrukce 2.4.2 Doplňte involuci bodů na přímce m, která je dána dvěma páry odpovídajících si bodů A, A' a B, B' a určete její samodružné body.

Postup: Provedení by bylo možno uskutečnit dualizací předchozího konstrukce. Rychlejší je však převedení dané úlohy na předchozí, a to tak, že involuci bodů na přímce m promítneme z libovolného bodu M, který neleží na přímce m a danou úlohu řešíme pro tuto involuci přímek.

2.5 Polární vlastnosti kuželoseček

Definice 2.5.1 Nechť je dána kuželosečka. Jestliže bod P neleží na kuželosečce, pak osu involuce, kterou na kuželosečce indukuje bod P, nazveme *polárou* bodu P vzhledem k této kuželosečce. Jestliže bod P leží na kuželosečce, nazveme polárou tečnu dané kuželosečky v bodě P. Je-li přímka p polárou bodu P vzhledem k dané kuželosečce, pak bod P nazveme *pólem* přímky p vzhledem k této kuželosečce.

Pro pól neležící na kuželosečce a jeho poláru můžeme vyslovit podobné věty jako pro střed a osu téže involuce.

Věta 2.5.1 *Je-li přímka p polárou bodu P vzhledem ke kuželosečce, pak body dotyku tečen vedených ke kuželosečce z bodu P jsou průsečíky poláry p s kuželosečkou.*

Věta 2.5.1* *Je-li bod P pólem přímky p vzhledem ke kuželosečce, pak tečny sestrojené v průsečících přímky p s kuželosečkou procházejí pólem P.*

Věta 2.5.2 *Nechť P je bod, který neleží na kuželosečce, p je jeho polára, přímka q (která není tečnou kuželosečky) incidentní s bodem P nechť protíná kuželosečku v bodech A, A' a poláru p v bodě P_A. Pak body A, A', P, P_A tvoří harmonickou čtveřici.*

Věta 2.5.2* *Nechť p je přímka, která není tečnou kuželosečky, bod P její pól, bodem Q přímky p (který neleží na kuželosečce) nechť procházejí tečny a, a' kuželosečky a přímka $p_a = PQ$. Pak přímky a, a', p, p_a tvoří harmonickou čtveřici.*

Z vlastností involuce lze odvodit následující duální věty o vztahu pólů a polár téže kuželosečky. Tohoto vztahu využíváme například při konstrukci pólu dané přímky.

Věta 2.5.3 *Leží-li pól Q na poláře p bodu P vzhledem ke kuželosečce $\mathcal{K}$, pak polára q bodu Q vzhledem k téže kuželosečce prochází bodem P.*

Důkaz: Nechť $Q \in p$, kde p je polára bodu P. Pro $P \in \mathcal{K}$ je věta zřejmě platí. Nechť tedy $P, Q \notin \mathcal{K}$. Přímka PQ tedy není tečnou kuželosečky $\mathcal{K}$. Jestliže přímka PQ protíná kuželosečku v bodech A, A', patří tyto body jak involuci indukované bodem P, tak i involuci indukované bodem Q. Zřejmě tedy platí, že body A, A', P, Q tvoří harmonickou čtveřici bodů a polára q bodu Q musí tedy procházet bodem P.
Nechť $Q \in p$, kde p je polára bodu P a nechť přímka PQ kuželosečku $\mathcal{K}$ neprotíná. Tečny kuželosečky vedené z bodu Q tvoří involutorní pár tečen involuce o ose p a středu P. Body dotyku těchto tečen tedy tvoří involutorní pár involuce o téže ose p a středu P. Přímka AA', jenž je polárou q bodu Q, tedy prochází bodem P. □

Věta 2.5.3* *Prochází-li polára q pólem P přímky p vzhledem ke kuželosečce $\mathcal{K}$, pak pól Q přímky q vzhledem k téže kuželosečce leží na přímce p.*

Definice 2.5.2 Dva body, z nichž každý leží na poláře druhého z nich sestrojené vzhledem k téže kuželosečce, se nazývají *sdružené póly* této kuželosečky, nebo říkáme, že každý z nich je vzhledem k dané kuželosečce *polárně sdružený* s druhým z nich.

Definice 2.5.2* *Dvě přímky, z nichž každá prochází pólem druhé z nich sestrojené vzhledem k téže kuželosečce, se nazývají sdružené poláry této kuželosečky, nebo říkáme, že každá z nich je vzhledem k dané kuželosečce polárně sdružena s druhou z nich.*

Máme-li dva sdružené póly P, Q a jejich poláry p, q vzhledem k nějaké kuželosečce, pak zřejmě průsečík R těchto polár je pólem přímky PQ. Pro takovouto trojici pólů, resp. polár, navíc platí další vlastnost plynoucí z harmonických vlastností úplného čtyřrohu, resp. čtyřstranu.

Definice 2.5.3 Trojúhelník, jehož každá strana je polárou jeho protilehlého vrcholu vzhledem ke kuželosečce, se nazývá *polární trojúhelník* kuželosečky.

Věta 2.5.4 *Je-li úplný čtyřroh kuželosečce vepsán, pak jeho diagonální trojúhelník je polárním trojúhelníkem této kuželosečky.*

Věta 2.5.4* *Je-li úplný čtyřstran kuželosečce opsán, pak jeho diagonální trojúhelník je polárním trojúhelníkem této kuželosečky.*

Zřejmě platí, že poláry všech bodů přímky p vzhledem k téže kuželosečce procházejí jedním bodem, pólem P přímky p. A opačně, že póly všech přímek procházejících bodem P leží na přímce p. Máme tedy dáno jednoznačné zobrazení bodů přímky p na přímky svazku $[\,P\,]$ a ptáme se jaké má vlastnosti.

Věta 2.5.5 *Probíhá-li bod přímou řadu bodovou, vytvoří jeho poláry svazek přímek, který je s danou přímou řadou bodovou projektivní.*

Věta 2.5.5* *Probíhá-li přímka svazek přímek, vytvoří její póly přímou řadu bodovou, která je s daným svazkem přímek projektivní.*

Uvažujme přímku q, která není tečnou kuželosečky. K přímé řadě bodové $[\,q\,]$ lze podle věty 2.5.5 sestrojit projektivní svazek přímek. K tomuto svazku lze podle věty 2.5.5* sestrojit projektivní řadu bodovou. Složením těchto dvou projektivit dostáváme soumístnou projektivitu řad. Z této konstrukce je zřejmé, že páry odpovídajících si bodů v této projektivitě tvoří páry sdružených pólů vzhledem k dané kuželosečce, a tedy tato projektivita je involuce. Odvodili jsme tak následující tvrzení.

Věta 2.5.6 *Není-li přímka q tečnou kuželosečky, tvoří páry sdružených pólů kuželosečky na přímce q involuci bodů.*

Věta 2.5.6* *Neleží-li bod Q na kuželosečce, tvoří páry sdružených polár v bodě Q involuci přímek.*

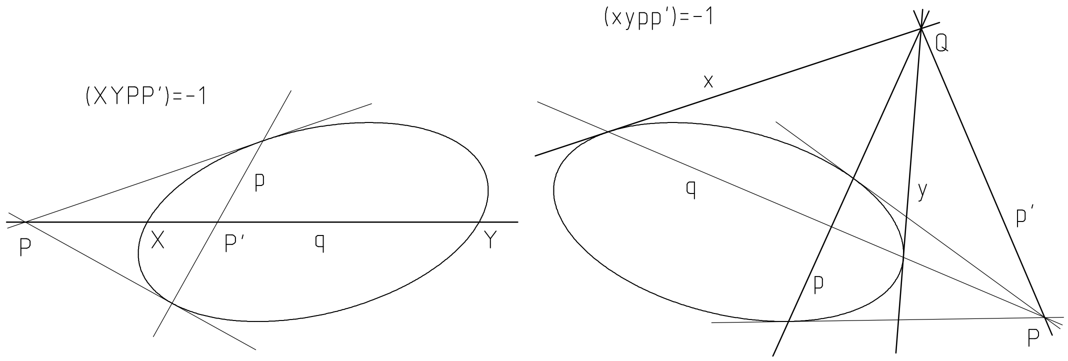
Definice 2.5.4 Involuce sdružených pólů kuželosečky na přímce q se nazývá *involuce indukovaná kuželosečkou* na přímce q. Involuce sdružených polár kuželosečky v bodě Q se nazývá *involuce indukovaná kuželosečkou* v bodě Q.

Involuce indukovaná kuželosečkou má opět buď právě dva různé samodružné prvky nebo nemá žádný samodružný prvek. Následující věty plynou přímo z předchozí úvahy a z vlastností involuce.

Věta 2.5.7 *Samodružné body involuce sdružených pólů indukované kuželosečkou na přímce q jsou průsečíky přímky q s kuželosečkou.*

Věta 2.5.7* *Samodružné přímky x, y involuce sdružených polár indukované kuželosečkou v bodě Q jsou tečny vedené z bodu Q ke kuželosečce.*

Věta 2.5.8 *Každá dvojice sdružených pólů kuželosečky na přímce q odděluje harmonicky průsečíky X, Y přímky q s kuželosečkou. (Obr. 2.5.1)*

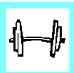


Obr. 2.5.1

Věta 2.5.8* *Každá dvojice sdružených polár kuželosečky v bodě Q odděluje harmonicky tečny x, y vedené z bodu Q ke kuželosečce. (Obr. 2.5.1)*

Věta 2.5.9 *Involuce indukovaná kuželosečkou na přímce q se promítá z pólu Q této přímky involucí přímek, která je indukována kuželosečkou v bodě Q.*

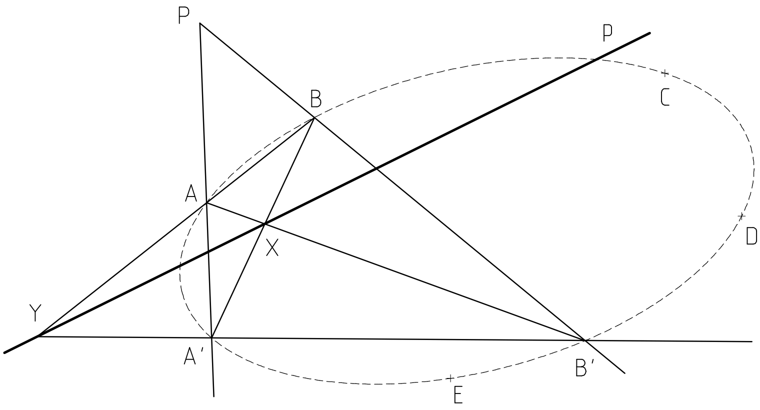
Polárních vlastností kuželoseček využíváme při konstrukci dalších bodů či tečen kuželosečky. Jak uvidíme v následujících úlohách, je možné pólů a polár využít k jednoznačnému zadání kuželosečky.



Úloha 2.5.1 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. K danému bodu P sestrojte jeho poláru p.

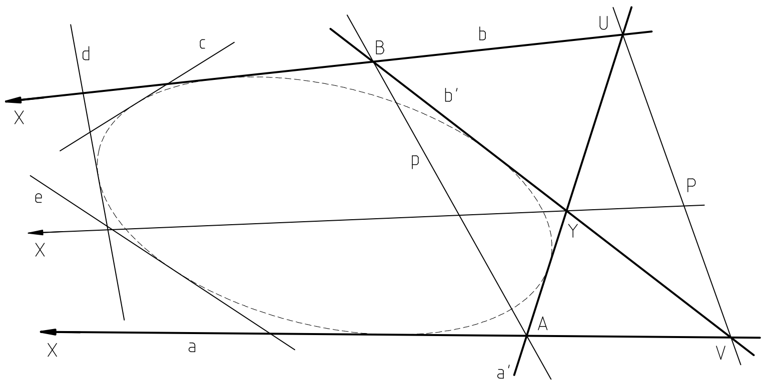
Řešení (Obr. 2.5.2): Pólem P a bodem A, resp. B, proložíme přímku, na které pomocí Pascalovy věty sestrojíme bod A', resp. B', ležící na kuželosečce. Body

A, A', B', B tvoří úplný čtyřroh s diagonálním bodem P. Sestrojíme zbylé diagonální body X a Y, kterými je určena polára p bodu P (věta 2.4.7).



Obr. 2.5.2

Úloha 2.5.2 Kuželosečka je dána pěti vlastními tečnami a, b, c, d, e. K dané přímce p sestrojte její pól P.

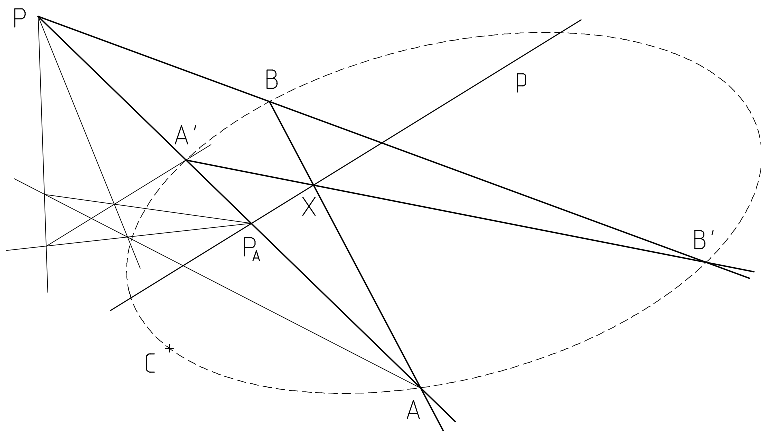


Obr. 2.5.3

Řešení (Obr. 2.5.3): Pomocí Brianchonovy věty sestrojíme tečnu a', resp. b', dané kuželosečky procházející bodem $A = a \cap p$, resp. $B = b \cap p$. Tečny a, a', b, b' tvoří úplný čtyřstran kuželosečce opsaný s diagonální přímkou p. Hledaný pól P je tedy průsečíkem zbylých diagonálních přímek UV a XY, kde $U = a' \cap b, V = a \cap b', X = a \cap b, Y = a' \cap b'$ (věta 2.4.7*).

Úloha 2.5.3 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a pólem P s polárou p. Sestrojte další body kuželosečky.

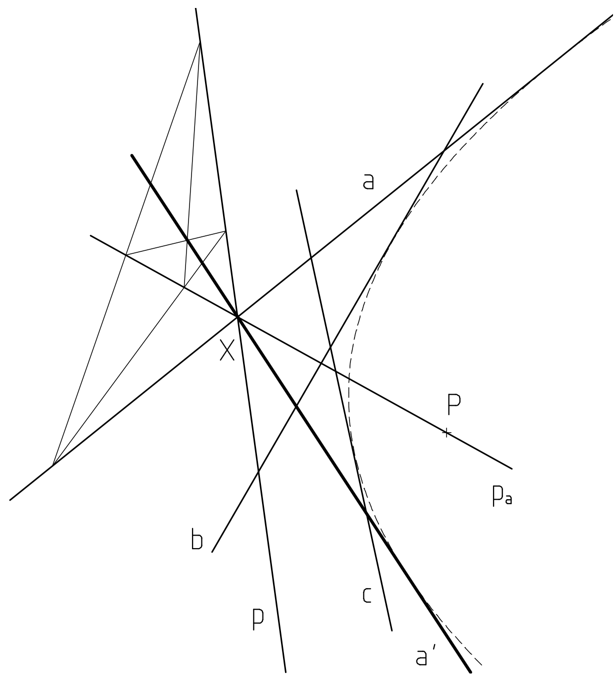
Řešení (Obr. 2.5.4): Pólem P a bodem A proložíme přímku, která protne poláru p v bodě P_A. Pro bod A', ve kterém protíná přímka AP kuželosečku, platí $(AA'PP_A) = -1$ (věta 2.5.2). Sestrojíme jej tedy užitím konstrukce 1.10.1. Dále sestrojíme bod B' kuželosečky ležící na přímce BP. Využijeme k tomu vlastností čtyřrohu A, A', B, B', ve kterém je bod P diagonálním vrcholem a přímka p diagonální stranou. Přímka AB protíná přímku p v diagonálním vrcholu X. Přímka $A'X$ je stranou úplného čtyřrohu, na které leží hledaný vrchol B', tedy $B' = A'X \cap BP$.



Obr. 2.5.4

Úloha 2.5.4 Kuželosečka je dána třemi vlastními tečnami a, b, c a pólem P s polárou p. Sestrojte další tečnu kuželosečky.

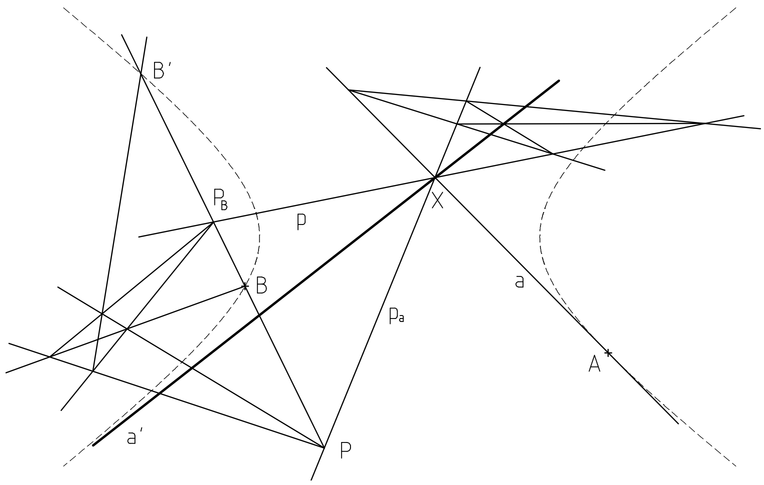
Řešení (Obr. 2.5.5): Označíme $X = a \cap p$ a $PX = p_a$. Pro hledanou tečnu a', která prochází bodem X, platí $(aa'pp_a) = -1$ (věta 2.5.2*). Sestrojíme ji užitím konstrukce 1.10.1*.



Obr. 2.5.5

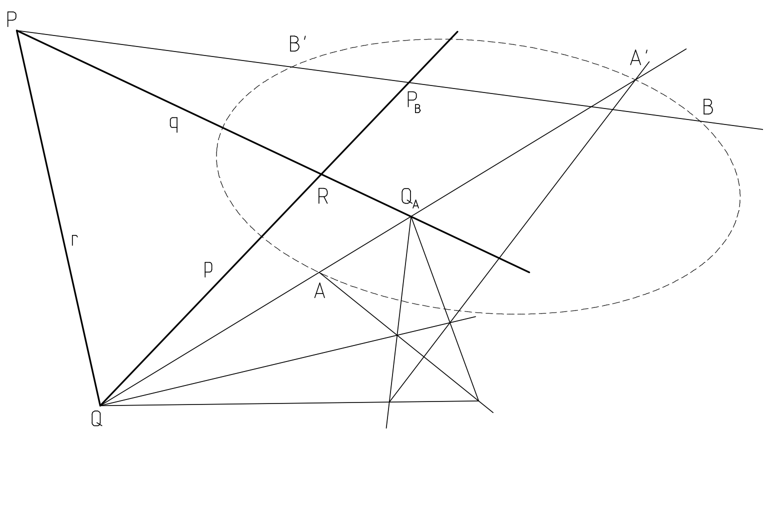
Úloha 2.5.5 Kuželosečka je dána dvěma vlastními body A, B, tečnou a v bodě A a pólem P s polárou p. Sestrojte další bod a tečnu.

Řešení (Obr. 2.5.6): Označíme $P_B = BP \cap p, X = a \cap p, p_a = PX$. Na přímce BP sestrojíme bod B', pro který platí $(BB'PP_B) = -1$, a tím získáme další bod kuželosečky. Dále sestrojíme přímku a', pro kterou platí $(aa'pp_a) = -1$. Tato přímka je pak hledanou tečnou kuželosečky.



Obr. 2.5.6

Úloha 2.5.6 Kuželosečka je dána dvěma body A, B a polárním trojúhelníkem PQR. Sestrojte další body kuželosečky.

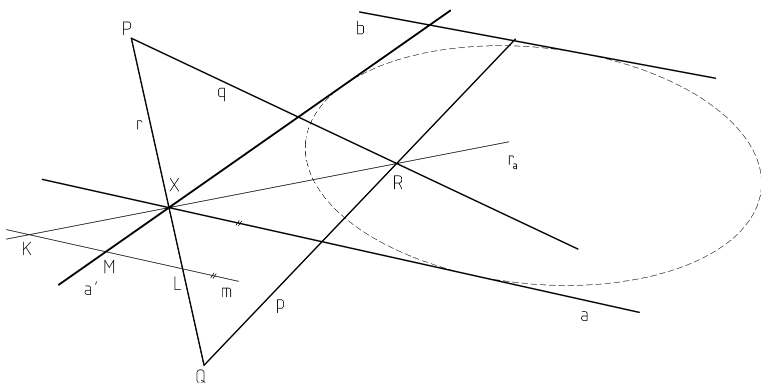


Obr. 2.5.7

Řešení (Obr. 2.5.7): Sestrojíme přímku AQ, která protne poláru q pólu Q v bodě Q_A. Přímka AQ protíná kuželosečku v bodě A a v hledaném bodě A'. Pro čtveřici bodů A, A', Q, Q_A platí $(AA'QQ_A) = -1$. Hledaný bod A' sestrojíme pomocí konstrukce 1.10.1. Další hledané body kuželosečky sestrojíme analogicky.

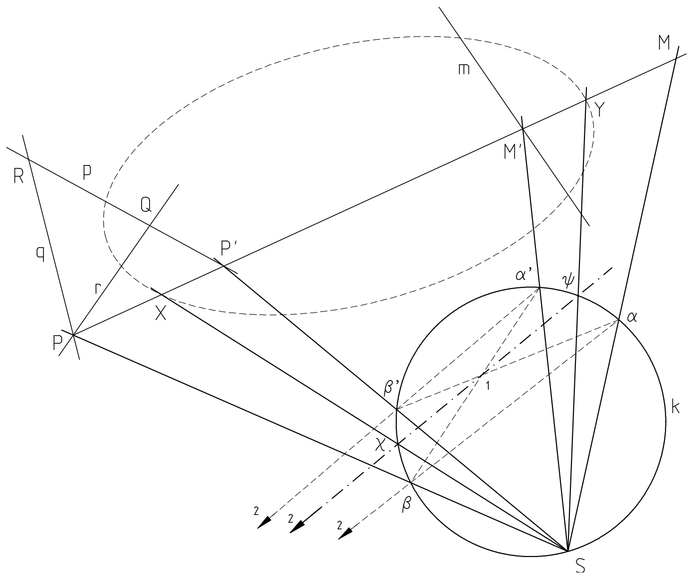
Úloha 2.5.7 Kuželosečka je dána dvěma tečnami a, b a polárním trojúhelníkem PQR. Sestrojte další tečnu kuželosečky.

Řešení (Obr. 2.5.8): Označíme $X = a \cap r$ a sestrojíme přímku $r_a = XR$. Chceme sestrojit tečnu kuželosečky $a' \neq a$ procházející bodem X, přičemž pro čtveřici přímek a, a', r, r_a platí $(aa'rr_a) = -1$ (věta 2.5.8*). Přímku a' lze sestrojit pomocí konstrukce 1.10.1*, nebo využijeme vlastnosti dvojpoměru $(ABCD_\infty) = (ABC)$ následujícím způsobem. Protože $(ABCD_\infty) = (ABC) = -1$, je bod C středem AB. Tedy v našem případě vedeme libovolným vlastním bodem $K \neq X$ přímky r_a vedeme přímku m procházející nevlastním bodem přímky a, tedy rovnoběžku s přímkou a. Přímka m protne přímku r v bodě L a hledanou přímku a' v bodě M, protože $(aa'rr_a) = -1 = (KLMA_\infty) = (KLM)$, bod M je tedy středem úsečky KL. Další tečny dané kuželosečky sestrojíme analogicky.



Obr. 2.5.8

Úloha 2.5.8 Kuželosečka je dána pólem M s polárou m a polárním trojúhelníkem PQR. Sestrojte několik bodů kuželosečky.

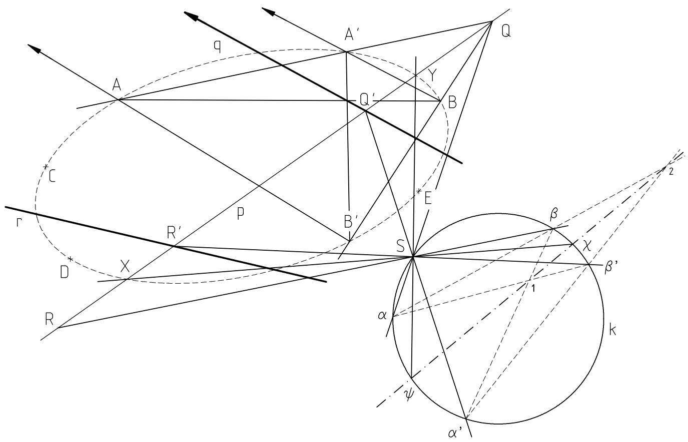


Obr. 2.5.9

Řešení (Obr. 2.5.9): Sestrojíme-li přímku MP, pak body $P, P' = p \cap MP, M, M' = m \cap MP$ určují involuci sdružených pólů dané kuželosečky (věta 2.5.6). Jelikož se odpovídající si dvojice bodů neoddělují, je tato involuce hyperbolická a má tedy dva samodružné body. Dle věty 2.5.7 jsou samodružné body X, Y této involuce průsečíky přímky MP s kuželosečkou. Body X, Y sestrojíme pomocí Steinerovy kružnice k (konstrukce 2.1.1). Z libovolného bodu S kružnice k promítneme přímkami body $M, M',\ P, P'$. Na kružnici k dostaneme involuci kvadratických soustav bodů $k\,(\alpha, \beta, \dots)$ a $k\,(\alpha', \beta', \dots)$. Osa o této involuce protíná kružnici k v samodružných bodech χ, ψ. Promítneme-li body χ a ψ z bodu S na přímku MP získáme hledané body X, Y dané kuželosečky. Další body kuželosečky sestrojíme analogicky.

Úloha 2.5.9 Kuželosečka je dána pěti body A, B, C, D, E. Sestrojte průsečíky dané přímky p s touto kuželosečkou.

Řešení (Obr. 2.5.10): Na přímce p zvolíme libovolné dva různé body Q, R a sestrojíme jejich poláry q, r vzhledem k dané kuželosečce (úloha 2.5.1). Označíme $Q' = q \cap p, R' = r \cap p$. Body Q, Q', R, R' určují na přímce p involuci sdružených pólů kuželosečky. Jelikož se odpovídající si dvojice bodů neoddělují, jedná se o hyperbolickou involuci a můžeme sestrojit samodružné body X, Y této involuce, které jsou hledanými průsečíky přímky p s danou kuželosečkou. V případě, kdy by involuce byla eliptická, daná přímka p by s kuželosečkou neměla žádný společný bod.



Obr. 2.5.10

2.6 Svazek a řada kuželoseček

Regulární kuželosečka je jednoznačně určena pěti svými body, z nichž žádné tři neleží na přímce. Dvě různé regulární kuželosečky tedy mohou mít nejvýše čtyři společné body, přičemž těmito body prochází nekonečně mnoho navzájem různých kuželoseček.

Definice 2.6.1 Nechť A, B, C, D jsou čtyři různé body projektivní roviny, z nichž žádné tři neleží v přímce. Množina všech kuželoseček, které procházejí body A, B, C, D se nazývá *svazek kuželoseček*. Značíme $\mathcal{S}(A, B, C, D)$.

Definice 2.6.2* Nechť a, b, c, d jsou čtyři různé přímky projektivní roviny, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem. Množina všech kuželoseček, které se dotýkají přímek a, b, c, d se nazývá *řada kuželoseček*. Značíme $s(a, b, c, d)$.

Každý svazek kuželoseček obsahuje vedle regulárních kuželoseček také tři singulární kuželosečky. Tyto singulární kuželosečky jsou tvořené protějšími stranami úplného čtyřrohu A, B, C, D. Je zřejmé, že pro každý bod projektivní roviny různý od dané čtveřice existuje právě jedna kuželosečka patřící tomuto svazku. Duální vlastnost pro řady kuželoseček platí jen v případě, že se omezíme pouze na regulární kuželosečky.

!

1. Společný název pro řadu a svazek kuželoseček je lineární soustava.
2. $X \neq A, B, C, D$;X určuje s body A, B, C, D jedinou kuželosečku.
3. Body A, B, C, D určují tři singulární kuželosečky (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC).

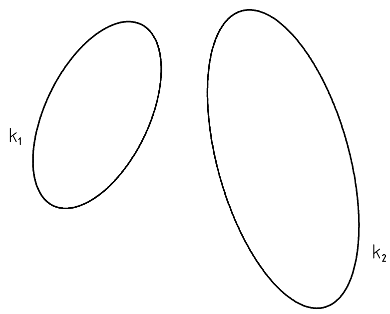
Definice 2.6.2 Za singulární kuželosečku $\mathcal{K}$ budeme pokládat množinu přímek a, b

1. je-li $a \neq b$, pak kuželosečka $\mathcal{K}$ je sjednocením řad bodových $\mathcal{K} = [a] \cap [b]$,
2. je-li $a = b$, pak $\mathcal{K} = [a]$, přičemž každý bod $A \in a$ budeme považovat za dvojnásobný.

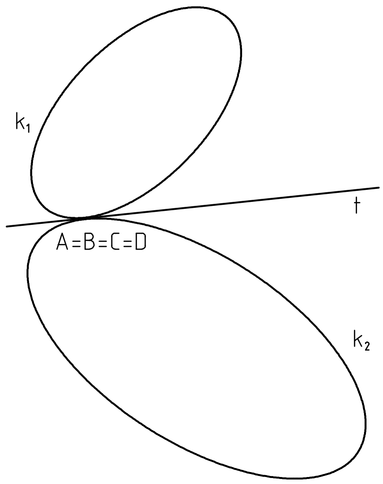
Věta 2.6.1 *Svazek kuželoseček je určen dvěma svými kuželosečkami.*

Věta 2.6.1* Řada kuželoseček je určena dvěma svými kuželosečkami.

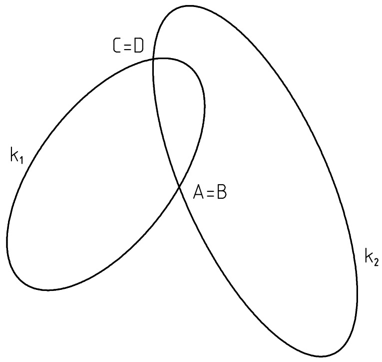
Dvě různé kuželosečky mohou mít nejvýše čtyři společné body. Pro regulární kuželosečky může vzájemná poloha být následující:



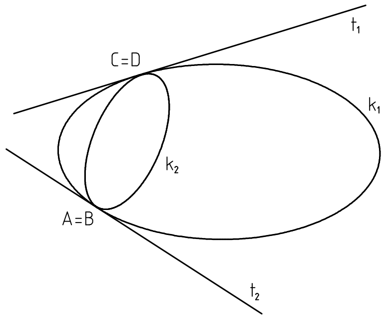
Obr. 2.6.1 jeden společný bod (v něm společná tečna)



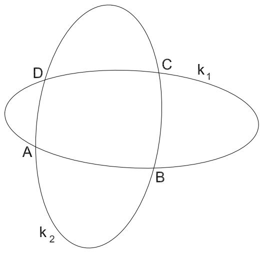
Obr. 2.6.2 jeden společný bod (v něm společná tečna)



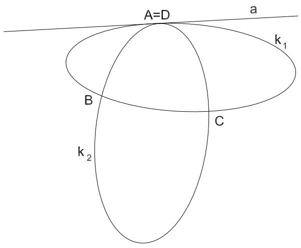
Obr. 2.6.3 dva společné body (bez společné tečny)



Obr. 2.6.4 dva společné body (se společnými tečnami)



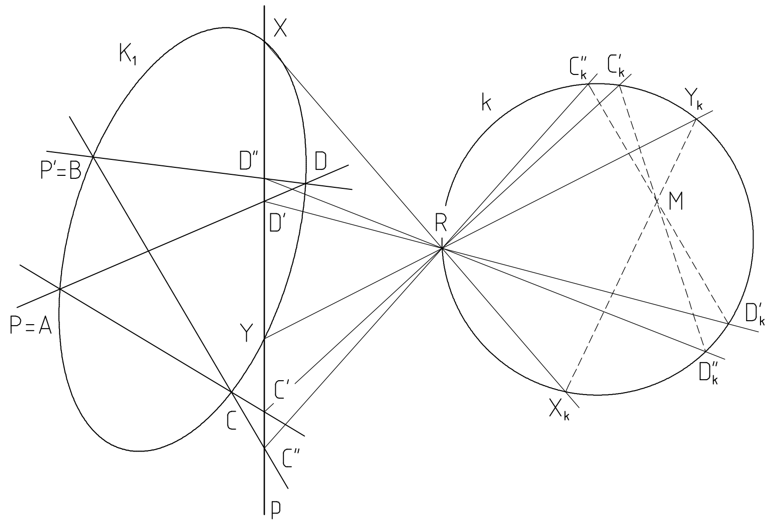
Obr. 2.6.5 čtyři společné body



Obr. 2.6.6 tři společné body (v jednom společná tečna)

Věta 2.6.2 ***(Desarguesova)****Kuželosečky svazku $\mathcal{S}\,(A, B, C, D)$ protínají přímku p, která neprochází žádným z bodů A, B, C, D, v párech bodů, které tvoří na přímce p involuci, tzv. involuci Desarguesovu.*

Důkaz: (Obr. 2.6.7) Nechť je dána kuželosečka svazku $\mathcal{S}\,(A, B, C, D)$ a přímka p. Studujme jejich vzájemnou polohu. Předpokládejme, že přímka p neprochází žádným z bodů A, B, C, D. Abychom určili průsečíky přímky p s některou kuželosečkou $\mathcal{K}_1$ daného svazku, užijeme konstrukce v Úloze 2.1.8. Označme $P \equiv A, P' \equiv B$. Z bodů P, P' se promítají ostatní body naší kuželosečky $\mathcal{K}_1$ projektivními svazky přímek, které protínají přímku p ve dvou projektivních přímých řadách bodových. Z bodu $P \equiv A$ promítneme body C, D do bodů C', D' a z bodu $P' \equiv B$ promítneme body C, D do bodů C'', D''. Samodružné body projektivních řad $p(C', D', \ldots) \barwedge p(C'', D'', \ldots)$ jsou průsečíky přímky p s kuželosečkou $\mathcal{K}_1$ ve svazku blíže neurčenou. Podle Úlohy'2.1.8 hledáme tyto samodružné body tím způsobem, že obě projektivní řady promítneme z libovolného bodu R na pomocnou kružnici, tzv. *Steinerovu kružnici*, procházející bodem R. Tyto průměty bodů C', D', C'', D'' na kružnici k označme C'_k, D'_k, C''_k, D''_k. Tím je úloha převedena na hledání samodružných bodů kvadratických projektivních soustav bodů $k(C'_k, D'_k, \ldots) \barwedge k(C''_k, D''_k, \ldots)$ na kuželosečce k; k tomu potřebujeme jejich direkční osu. Protože naše myšlená kuželosečka $\mathcal{K}_1$ nebyla ve svazku blíže určena, známe z této projektivnosti jen dva páry odpovídajících si bodů; můžeme tedy určit jen jeden bod direkční osy, je to průsečík spojnic $C'_k D''_k$ a $D'_k C''_k$,. V obrázku je označen jako bod M.



Obr. 2.6.7

Zvolíme-li na přímce p na příklad bod X jako jeden průsečík kuželosečky $\mathcal{K}_1$ s touto přímkou, bude druhý průsečík Y mít tu vlastnost, že body X, Y se promítnou z bodu R na kružnici k do bodů X_k, Y_k jejich spojnice jako direkční osa projektivních řad bude procházet bodem M. Tento postup lze obrátit. Vedeme-li bodem M libovolnou přímku, pak tato přímka protne kružnici k v bodech X_k, Y_k, které se z bodu R promítají na přímku p do bodů X, Y, v nichž ji protne některá kuželosečka daného svazku. Protože body X_k, Y_k zřejmě tvoří na kružnici k involuci o středu M, tvoří i body X, Y na přímce p involuci, tzv. *Desarguesovu involuci.*

! Desarguesova věta má značné konstruktivní důsledky. Proto je důležité ji umět konstruktivně určit. Z obrázku je přímo patrné, že například bodu D' odpovídá v Desarguesově involuci na přímce p bod C'', neboť spojnice $D'_kC''_k$, prochází středem involuce M bodů na pomocné Steinerově kružnici. Věc je velmi názorná, uvědomíme-li si, že kuželosečka zkoumaného svazku, která prochází bodem D', obsahuje tři body A, D, D', jež leží v přímce. To znamená, že tato kuželosečka není regulární; je tudíž složená z přímek AD a BC a její průsečíky s přímkou p tvoří také jeden pár zmíněné involuce. Věta Desarguesova platí tedy i pro singulární kuželosečky daného svazku a ty jsou zřejmě tvořeny protějšími stranami úplného čtyřrohu $ABCD$.

Věta 2.6.2* Tečny vedené ke kuželosečkám řady $s\,(a, b, c, d)$ z bodu, který neleží na žádné z přímek a, b, c, d, tvoří involuci, tzv. *involuci Desarguesovu.*

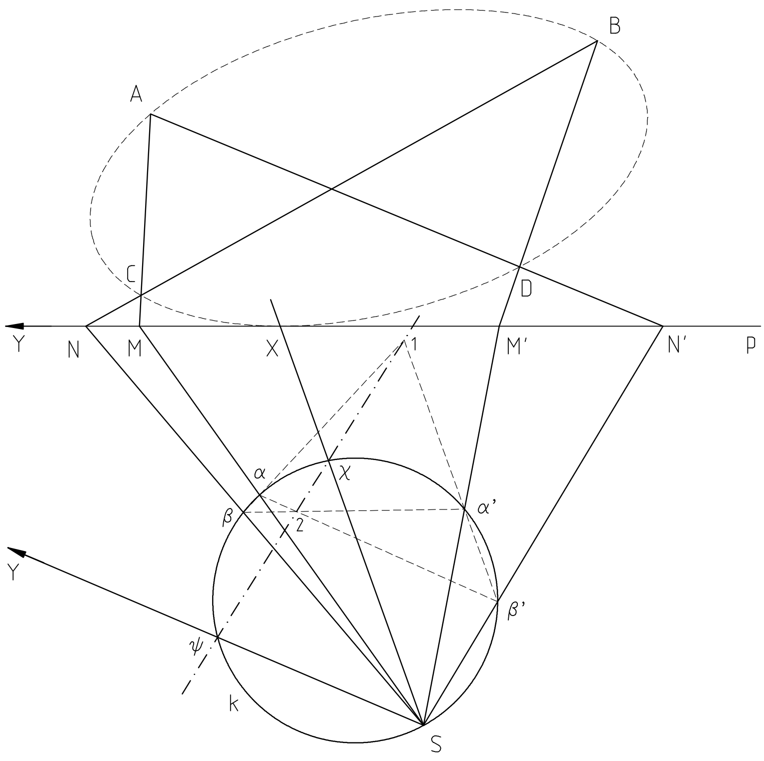
Desarguesovy věty užíváme při konstrukci kuželosečky svazku, která se přímky p dotýká. Bod dotyku této kuželosečky je totiž samodružným bodem Desarguesovy involuce.

Věta 2.6.3 *Jestliže v Desarguesově involuci bodů na přímce p existují dva různé samodružné body, pak v daném svazku kuželoseček existují dvě kuželosečky, pro které je přímka p tečnou. Přitom body dotyku jsou právě samodružné body Desarguesovy involuce.*

Věta 2.6.3* Jestliže v Desarguesově involuci přímek v bodě P existují dvě různé samodružné přímky, pak v dané řadě kuželoseček existují dvě kuželosečky, které procházejí bodem P. Přitom tečny těchto kuželoseček v bodě P jsou právě samodružné přímky Desarguesovy involuce.

Úloha 2.6.1 Určete kuželosečky svazku $\mathcal{S}\,(A, B, C, D)$ dotýkající se dané přímky p.

Řešení (Obr. 2.6.8): V daném svazku existují dvě různé singulární kuželosečky, $[\,AC\,] \cup [\,BD\,]$ a $[\,AD\,] \cup [\,BC\,]$. Tyto kuželosečky protínají přímku p v bodech M, M', N, N', které určují Desarguesovu involuci bodů. Samodružné body X, Y této involuce jsou body dotyku hledaných kuželoseček svazku $\mathcal{S}\,(A, B, C, D)$ a přímky p. Body X, Y určíme pomocí Steinerovy kružnice k. Hledané kuželosečky jsou tedy jednoznačně určeny pěti svými body A, B, C, D, X, resp. A, B, C, D, Y. (V obrázku je z důvodu přehlednosti zakreslena pouze kuželosečka určená body A, B, C, D, X).



Obr. 2.6.8

2.7 Afinní a metrické vlastnosti kuželoseček

Při studiu afinních a metrických vlastností kuželoseček pracujeme s nevlastními prvky, rovnoběžností a metrikou. Dále tedy budeme projektivní rovinou rozumět rozšířenou eukleidovskou rovinu.

2.7.1 Afinní klasifikace kuželoseček

Definice 2.7.1 Kuželosečku nazýváme *elipsou*, jestliže neprotíná nevlastní přímku. Kuželosečku nazýváme *parabolou*, jestliže má s nevlastní přímkou společný právě jeden bod (dotykový).
Kuželosečku nazýváme *hyperbolou*, jestliže protíná nevlastní přímku ve dvou bodech.

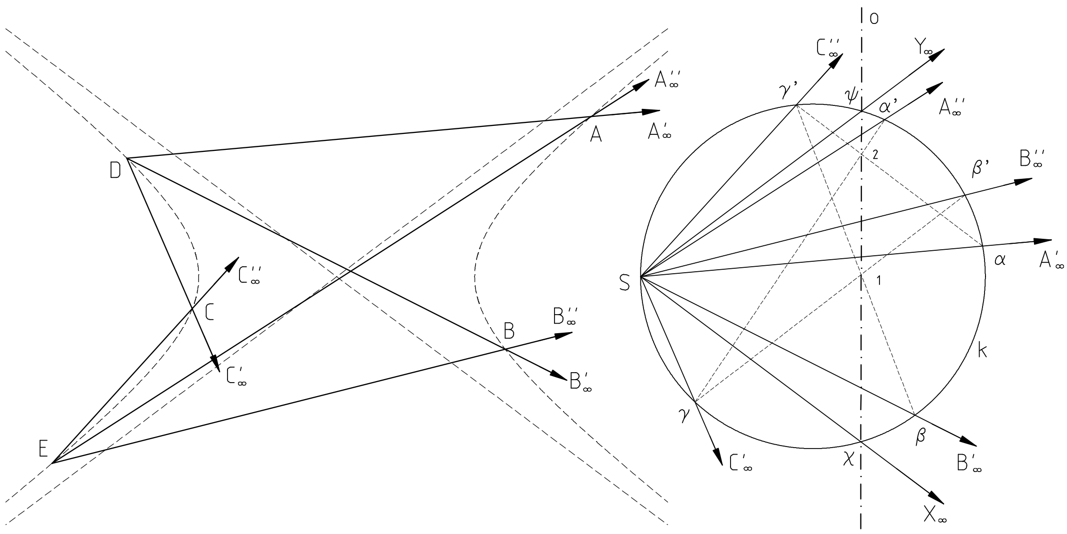
Z této definice plyne, že nevlastní přímka není tečnou elipsy ani hyperboly. Pro elipsu a hyperbolu lze tedy uvažovat involuci sdružených pólů na nevlastní přímce a pomocí ní rozhodnout o jaký typ kuželosečky se jedná.

Věta 2.7.1 *Kuželosečka je elipsou, resp. hyperbolou, právě tehdy, když na nevlastní přímce své roviny indukuje eliptickou, resp. hyperbolickou, involuci sdružených pólů.*

Věta 2.7.2 *Kuželosečka je parabolou právě tehdy, když je nevlastní přímka její tečnou.*

Úloha 2.7.1 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. Určete typ kuželosečky.

Řešení (Obr. 2.7.1): Typ kuželosečky určíme tak, že zjistíme počet průsečíků kuželosečky s nevlastní přímkou. Zvolíme dva body D, E a z nich promítneme ostatní body projektivními svazky. Páry odpovídajících si průsečíků přímek těchto svazků s nevlastní přímkou tvoří soumístnou projektivitu řad. Pomocí Steinerovy kružnice k určíme počet samodružných bodů této projektivity. Dostáváme projektivní kvadratické soustavy bodů $k(\alpha, \beta, \gamma, ...), k(\alpha', \beta', \gamma', ...)$. Direkční osa o protíná Steinerovu kružnici k ve dvou bodech χ, ψ, daná kuželosečka je tedy hyperbola.



Obr. 2.7.1

2.7.2 Střed a asymptoty kuželosečky

Definice 2.7.2 Pól nevlastní přímky vzhledem k elipse, resp. hyperbole, se nazývá *střed elipsy*, resp. *střed hyperboly*.

U paraboly střed nezavádíme, jelikož nevlastní přímka je tečnou paraboly a její pól tedy příslušným bodem dotyku, který je nevlastní. Pro elipsu ani pro hyperbolu není nevlastní přímka její tečnou, pól nevlastní přímky vzhledem k těmto kuželosečkám tedy není incidentní s nevlastní přímkou a je bodem vlastním. Pro střed hyperboly a elipsy dokážeme důležitou vlastnost.

Věta 2.7.3 *Elipsa a hyperbola jsou souměrné podle svého středu. Jiný střed souměrnosti nemají.*

Důkaz: Nechť přímka p prochází středem S kuželosečky a protíná tuto kuželosečku v bodech A, A'. Označíme-li průsečík přímky p s nevlastní přímkou jako S_∞, pak z polárních vlastností plyne, že $(AA'SS_\infty) = -1$ a tedy $(AA'S) = -1$. Střed S je tedy středem úsečky AA'. Obráceně střed souměrnosti musí být zřejmě pólem nevlastní přímky. Ke každé přímce však vzhledem k dané kuželosečce existuje právě jeden její pól. Jediný střed souměrnosti elipsy, resp. hyperboly, je tedy její střed.

$\square$

Definice 2.7.3 Elipsa a hyperbola se nazývají *středové* kuželosečky. Parabola se nazývá *nestředová* kuželosečka.

Definice 2.7.4 Tečna kuželosečky v jejím nevlastním bodě se nazývá *asymptota* kuželosečky.

Počet asymptot u jednotlivých kuželoseček plyne ihned z definice 2.7.1 Elipsa nemá s nevlastní přímkou žádný společný bod, neexistuje tedy žádná její reálná asymptota.

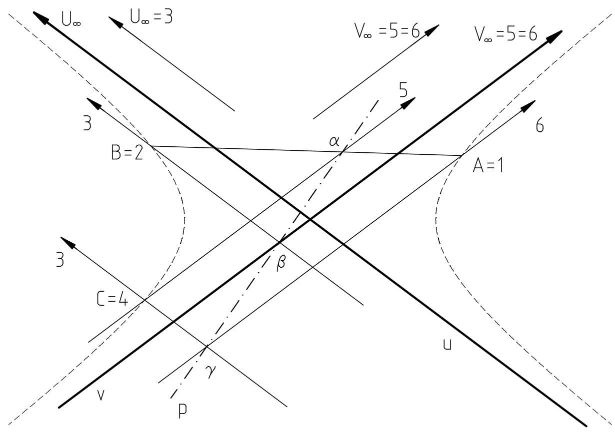
Věta 2.7.4 *Hyperbola má dvě asymptoty a jejich průsečík je středem hyperboly. Jediná asymptota paraboly je nevlastní přímka dané roviny.*

Důkaz: Pro parabolu věta plyne přímo z věty 2.7.2 Dokážeme tedy pouze, že průsečík asymptot hyperboly je jejím středem. Asymptoty jsou tečny v nevlastních bodech, jejich průsečík je tedy dle věty 2.5.1* pólem nevlastní přímky. Pól nevlastní přímky je však podle definice 2.7.2 střed kuželosečky.

$\square$

Vedle involuce sdružených pólů na nevlastní přímce, můžeme studovat také involuci sdružených polár procházejících středem kuželosečky. Pro elipsu je tato involuce eliptická, tedy bez samodružných přímek. Pro hyperbolu je naopak hyperbolická, existují v ní tedy dvě samodružné přímky. Lze dokázat, že samodružné přímky této involuce jsou právě asymptoty dané hyperboly.

Úloha 2.7.2 Hyperbola je dána třemi vlastními body A, B, C a dvěma nevlastními body U_∞, V_∞. Sestrojte její asymptoty u, v.

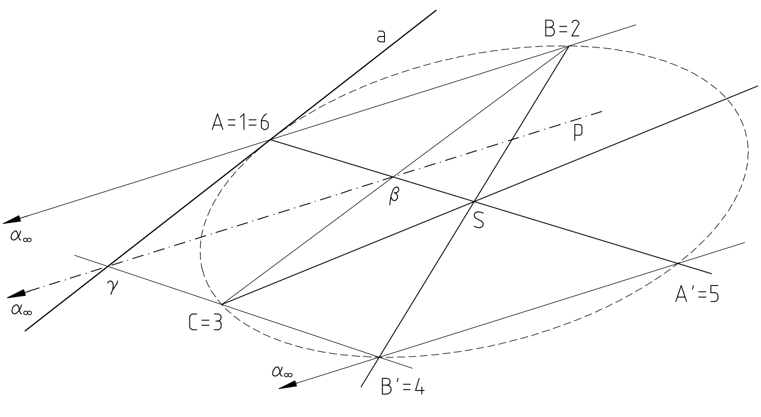


Obr. 2.7.2

Řešení (Obr. 2.7.2): Asymptoty u, v sestrojíme jako tečny v nevlastních bodech U_∞, V_∞ užitím Pascalovy věty. Označíme $A = 1, B = 2, C = 4, U_\infty = 3, V_\infty = 5 = 6$ a sestrojíme Pascalovu přímku $p = \alpha\gamma$, kde $\alpha = 12 \cap 45, \gamma = 34 \cap 61$. Hledaná asymptota v prochází bodem $\beta = 23 \cap p$ a bodem V_∞. Asymptotu u sestrojíme analogicky.

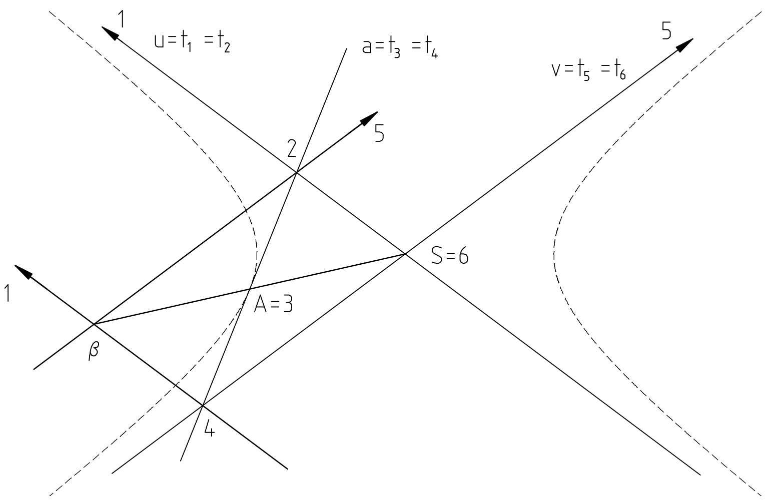
Úloha 2.7.3 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a středem S. Sestrojte další body a tečnu kuželosečky.

Řešení (Obr. 2.7.3): Další body A', B', C' kuželosečky sestrojíme jako body souměrně sdružené s body A, B, C podle středu S kuželosečky. Tečnu kuželosečky sestrojíme pomocí Pascalovy věty. Označíme $A = 1 = 6, A' = 5, B = 2, B' = 4, C = 3$ a sestrojíme Pascalovu přímku $p = \alpha_\infty\beta$. Hledaná tečna a kuželosečky prochází bodem $\gamma = 34 \cap p$.



Obr. 2.7.3

Úloha 2.7.4 Hyperbola je dána asymptotami u, v a tečnou a. Sestrojte bod dotyku A tečny a.



Obr. 2.7.4

Řešení (Obr. 2.7.4): Bod A sestrojíme pomocí Brianchonovy věty. Označíme $u = t_1 = t_2, a = t_3 = t_4, v = t_5 = t_6$ a sestrojíme Brianchonův bod $\beta = 14 \cap 25$, kde $1 = t_1 \cap t_2, 2 = t_2 \cap t_3, 4 = t_4 \cap t_5, 5 = t_5 \cap t_6$. Hledaný bod A určíme jako průsečík přímky a s přímkou $\beta 6$.

2.7.3 Průměry kuželoseček

Definice 2.7.5 Vlastní přímka, jejíž pól vzhledem k dané kuželosečce je bod nevlastní, se nazývá *průměr kuželosečky.*

Z této definice je zřejmé, že ke každé kuželosečce existuje nekonečně mnoho jejích průměrů. Z polárních vlastností kuželoseček snadno odvodíme následující věty pro průměry kuželoseček.

Věta 2.7.5 *Průměry středové kuželosečky procházejí jejím středem a obráceně, každá přímka procházející středem kuželosečky je jejím průměrem.*

Věta 2.7.6 *Průměry paraboly jsou navzájem rovnoběžné. Jejich společný nevlastní bod je bodem dotyku nevlastní přímky a paraboly.*

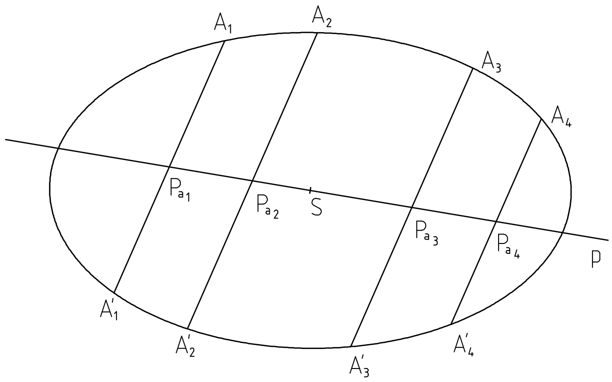
Věta 2.7.7 *Spojnice průsečíku dvou tečen kuželosečky se středem úsečky, jejímiž krajními body jsou body dotyku těchto tečen, je průměr kuželosečky.*

Důkaz: Nechť t_1, t_2 jsou dvě tečny téže kuželosečky s body dotyku T_1, T_2. Označme $P = t_1 \cap t_2$ a $p = T_1T_2$. Bod P je zřejmě pólem přímky p. Označíme-li Q_∞ nevlastní bod přímky p, pak jeho polára q vzhledem k dané kuželosečce prochází bodem P a protíná přímku p v bodě Q'. Stačí tedy dokázat, že bod Q' je středem úsečky T_1T_2. Body T_1, T_2, Q', Q_∞ tvoří harmonickou čtveřici a jelikož bod Q_∞ je nevlastní platí také $(T_1T_2Q') = -1$. Bod Q' je tedy středem úsečky T_1T_2.

□

Dvě tečny středové kuželosečky mohou být navzájem rovnoběžné, jejich průsečíkem je pak nevlastní bod. Spojnice bodů dotyku těchto tečen je tedy polárou nevlastního bodu čili průměrem této kuželosečky. K parabole nelze vést navzájem rovnoběžné tečny, jelikož je nevlastní přímka tečnou paraboly a tedy každým nevlastním bodem může procházet nejvýše jedna vlastní tečna.

Věta 2.7.8 *Spojnice středů rovnoběžných tětiv kuželosečky je její průměr.*



Obr. 2.7.5

Důkaz: Nechť všechny navzájem rovnoběžné tětivy procházejí nevlastním bodem P_∞. Potom polára p tohoto bodu je průměrem dané kuželosečky. Stačí tedy dokázat, že přímka p prochází středy rovnoběžných tětiv. Zvolme libovolnou tětivu a, která protíná kuželosečku v bodech A, A' a přímku p v bodě P_a. Pro body A, A', P_a, P_∞ platí $(AA'P_aP_\infty) = -1$ a tedy $(AA'P_a) = -1$. Bod P_a je tedy středem úsečky AA'.

□

Střed kuželosečky je možné určit například jako průsečík dvou jejích průměrů či jako pól nevlastní přímky. Ke konstrukci středu kuželosečky lze také využít následující věty.

Věta 2.7.9 *Střed kuželosečky je středem involuce sdružených pólů, kterou kuželosečka indukuje na kterémkoli svém průměru, který není asymptotou.*

Vedle sdružených pólů ležících na průměru kuželosečky, můžeme také studovat páry sdružených polár procházejících středem kuželosečky. Dostáváme řadu vlastností, které lze využít při konstrukci středových kuželoseček.

Definice 2.7.6 Dva průměry středové kuželosečky, které jsou jejími sdruženými polárami, se nazývají *sdružené průměry.*

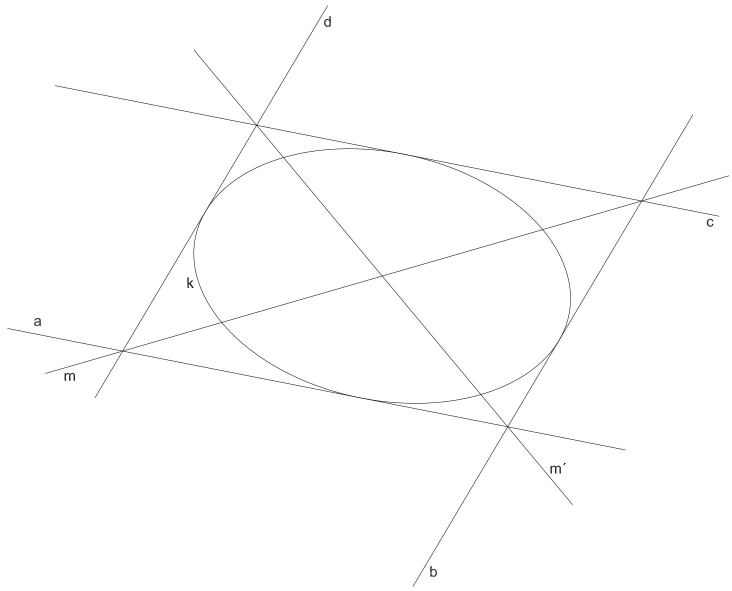
Věta 2.7.10 *Dvojice sdružených průměrů středové kuželosečky tvoří involuci přímek indukovanou kuželosečkou ve svém středu.*
U elipsy je tato involuce eliptická. U hyperboly je hyperbolická, přičemž samodružné přímky této involuce jsou její asymptoty.

Z vlastností hyperbolické involuce přímek ihned plyne, že asymptoty hyperboly oddělují harmonicky každé dva její sdružené průměry. Z polárních vlastností kuželoseček můžeme také odvodit, že každá dvojice sdružených průměrů kuželosečky tvoří spolu s nevlastní přímkou polární trojúhelník této kuželosečky. Obráceně také platí, že každý polární trojúhelník kuželosečky, jehož jednou stranou je nevlastní přímka, obsahuje dvojici sdružených průměrů. Další vlastnosti sdružených průměrů plynoucí z polárních vlastností uvádějí následující věty.

Věta 2.7.11 *Každý ze dvou sdružených průměrů středové kuželosečky půlí její tětivy rovnoběžné s druhým průměrem.*

Věta 2.7.12 *Každá přímka polárně sdružená s průměrem středové kuželosečky je rovnoběžná s jejím sdruženým průměrem.*

Věta 2.7.13 *Úhlopříčky rovnoběžníku středové kuželosečce opsaného jsou sdruženými průměry této kuželosečky.*

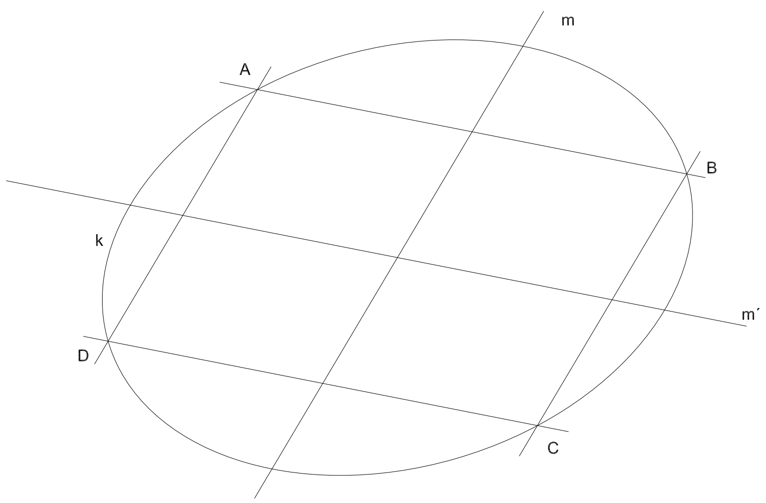


Obr. 2.7.6

Důkaz: Strany rovnoběžníku tvoří úplný čtyřstran, jehož diagonální trojúhelník obsahuje nevlastní přímku. Střed kuželosečky je tedy vrcholem diagonálního trojúhelníku a diagonální trojúhelník je polárním trojúhelníkem. Strany tohoto trojúhelníku procházející středem kuželosečky jsou tedy sdružené průměry.

□

Pro rovnoběžník kuželosečce vepsaný platí podobná věta. V jejím důkazu bychom vyšli z vlastností úplného čtyřrohu a jeho diagonálního trojúhelníku.



Obr. 2.7.7

Věta 2.7.14 *Střední příčky rovnoběžníku vepsaného středové kuželosečce jsou její sdružené průměry.*

Definice 2.7.7 Průsečíky kuželosečky se svým libovolným průměrem se nazývají *krajní body průměru.*

Věta 2.7.15 *Dva průměry středové kuželosečky jsou sdružené právě tehdy, když tečny sestrojené v krajních bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem.*

Důkaz:

(1) Nechť m, m' jsou sdružené průměry kuželosečky a body M_∞, M'_∞ jejich póly. Označme M_1, M_2 krajní body průměru m a m_1, m_2 tečny v těchto bodech. Tečna m_1, resp. m_2, je polárně sdružena s přímkou m, jelikož přímka m prochází pólem M_1, resp. M_2, přímky m_1, resp. m_2. Tečny m_1, m_2 tedy procházejí nevlastním bodem M_∞, kterým však podle předpokladu prochází také průměr m'. Přímky m', m_1, m_2 jsou tedy navzájem rovnoběžné.

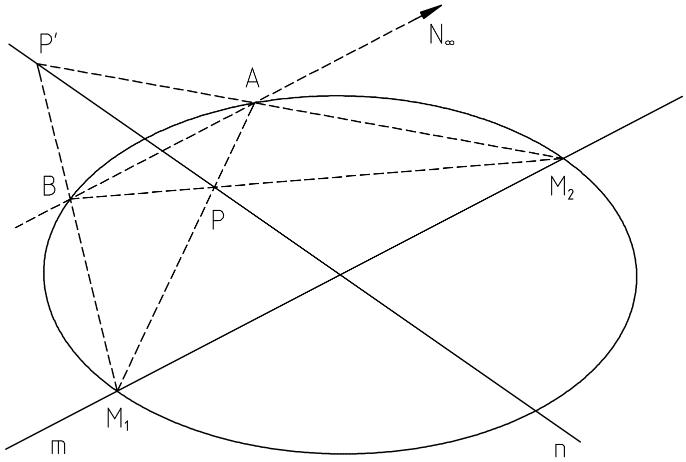
(2) Nechť m, n jsou průměry kuželosečky a tečny m_1, m_2 sestrojené v krajních bodech průměru m jsou rovnoběžné s průměrem n. Tečny m_1, m_2 opět procházejí pólem M_∞ průměru m. Jelikož je přímka n podle předpokladu rovnoběžná s tečnami m_1, m_2, musí procházet stejným nevlastním bodem, tedy bodem M_∞. Pól průměru m leží na průměru n, tudíž pól průměru n musí ležet na průměru m a tedy dané průměry jsou sdružené.

□

Věta 2.7.16 *Spojnice kteréhokoli bodu středové kuželosečky s krajními body jejího libovolného průměru jsou rovnoběžné se sdruženými průměry této kuželosečky.*

Tato věta je důsledkem věty o středních příčkách rovnoběžníku vepsaného kuželosečce (věta 2.7.14).

Věta 2.7.17 *Spojnice kteréhokoli bodu středové kuželosečky s krajními body libovolného průměru protínají právě s ním sdružený průměr ve dvou sdružených pólech.*



Obr. 2.7.8

Důkaz: Nechť m, n jsou sdružené průměry, body M_1, M_2 krajní body průměru m a bod A libovolným bodem kuželosečky. Určíme-li na kuželosečce bod B tak, aby platilo $AB \| M_1M_2$, pak body A, B, M_1, M_2 tvoří úplný čtyřroh kuželosečce vepsaný. Nevlastní bod N_∞ přímky m je diagonálním bodem tohoto čtyřrohu a přímka n je jeho diagonální stranou. Na přímce n tedy leží zbývající diagonální vrcholy $P = AM_1 \cap n$, $P' = AM_2 \cap n$, přičemž tyto vrcholy jsou sdruženými póly vzhledem ke kuželosečce.

□

Na průměru kuželosečky tak dostáváme involuci sdružených pólů určenou středem kuželosečky a dvojicí odpovídajících si pólů. Je-li tato involuce hyperbolická, můžeme sestrojit její samodružné body, které jsou krajními body daného průměru.

Pro parabolu nemá smysl zavádět pojem sdružených průměrů, jelikož jsou všechny její průměry rovnoběžné. Z polárních vlastností však můžeme pro parabolu odvodit podobné vlastnosti jako pro středové kuželosečky.

Definice 2.7.8 Směr přímek polárně sdružených s průměrem paraboly se nazývá *směr sdružený* s tímto průměrem.

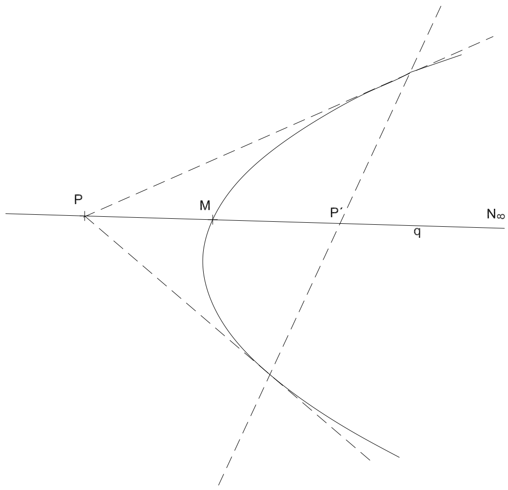
Věta 2.7.18 *Každý směr v rovině paraboly, který není směrem průměru této paraboly, je sdružen právě s jedním průměrem této paraboly.*

Důkaz: Mějme dán libovolný směr $\vec{\mathbf{s}}$ různý od směru průměru dané paraboly. Všechny přímky daného směru $\vec{\mathbf{s}}$ nechť procházejí bodem S_∞. K bodu S_∞ existuje právě jedna polára s vzhledem k dané parabole, která je navíc jejím průměrem. Na přímce s leží všechny póly přímek patřící směru $\vec{\mathbf{s}}$ a obráceně, každý bod ležící na přímce s má poláru směru $\vec{\mathbf{s}}$. Směr $\vec{\mathbf{s}}$ je tedy sdružen právě s průměrem s paraboly.

□

Bod dotyku vlastní tečny a paraboly je pólem této tečny, průměr procházející tímto bodem je tedy průměr sdružený se směrem této tečny. Pro tětivy paraboly platí opět podobná věta jako pro tětivy středové kuželosečky.

Věta 2.7.19 *Průměr paraboly půlí všechny její tětivy rovnoběžné se směrem s ním sdruženým.*



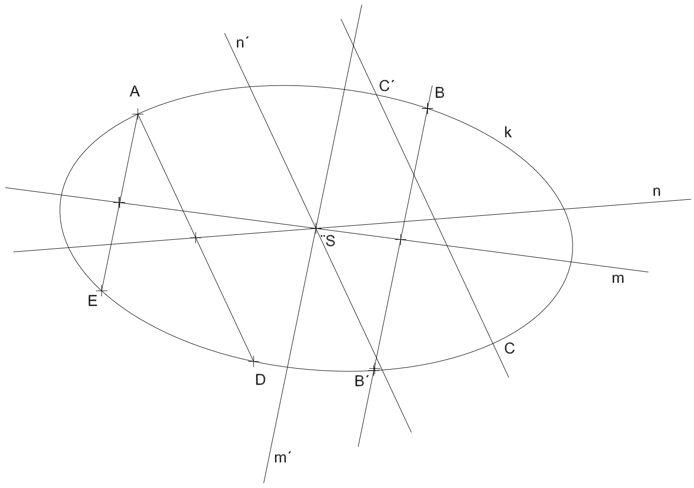
Obr. 2.7.9

Na každém svém průměru indukuje parabola involuci sdružených pólů. Tato involuce je vždy hyperbolická a má tedy dva samodružné prvky, které jsou opět body paraboly. Jelikož je jedním samodružným bodem této involuce nevlastní bod, platí pro druhý samodružný bod následující věta.

Věta 2.7.20 *Nechť q je libovolný průměr paraboly a body P, P' jsou dva různé sdružené póly ležící na tomto průměru q. Potom střed úsečky PP' je bodem paraboly. (Obr. 2.7.9)*

Konstrukce 2.7.1 Sestrojte involuci sdružených průměrů, případně asymptoty kuželosečky určené pěti body A, B, C, D, E.

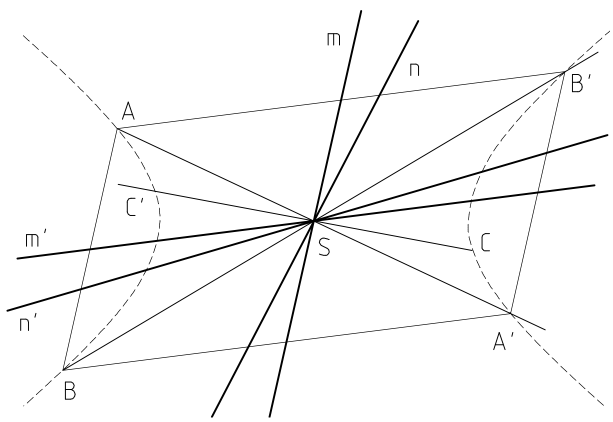
Řešení(Obr. 2.7.10): Spojnicí AE vedeme rovnoběžku bodem B a Pascalovou větou určíme její druhý průsečík B' s danou kuželosečkou. Spojnice středů rovnoběžných tětiv AE a BB' je podle věty 2.7.8 průměr m dané kuželosečky. Jiný její průměr určíme touž konstrukcí, opakujeme-li ji na příklad pro tětivy rovnoběžné s přímkou AD, získáme tak průměr n. Jsou-li průměry m, n spolu rovnoběžné, je touto kuželosečkou parabola a hledání involuce sdružených průměrů v tomto případě odpadá. V opačném případě je průsečík průměrů m, n středem kuželosečky, jímž prochází průměr m' sdružený s průměrem m, který sestrojíme jako přímku vedenou středem kuželosečky rovnoběžně s přímkou AE. Podobně průměr n' sdružený s průměrem n je rovnoběžný s přímkou AD. Dvěma páry m, m' a n, n' je involuce sdružených průměrů určena; její samodružné přímky jsou hledané asymptoty. V našem případě se jedná o elipsu a asymptoty by byly imaginárně sdružené přímky.



Obr. 2.7.10

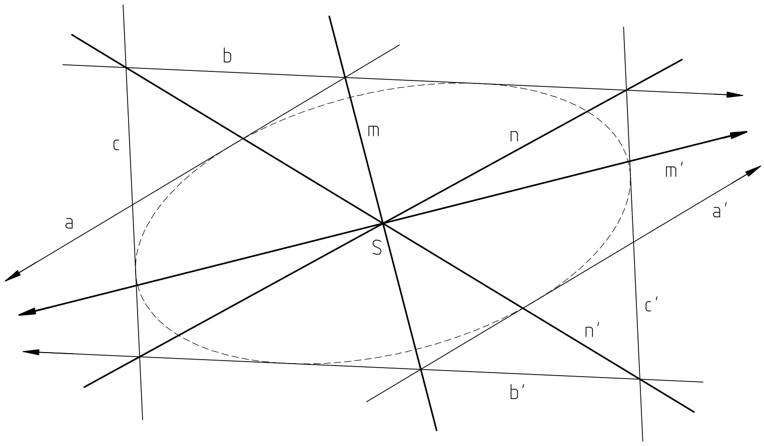
Úloha 2.7.5 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a středem S. Určete involuci sdružených průměrů.

Řešení (Obr. 2.7.11): K bodům A, B, C sestrojíme podle středu S kuželosečky středově souměrné body A', B', C'. Body A, B, A', B', resp. B, C, B', C', jsou vrcholy rovnoběžníků kuželosečce vepsaných. Dle věty 2.7.14 jsou tedy střední příčky těchto rovnoběžníků sdruženými průměry. Dostáváme tak dva páry sdružených průměrů m, m' a n, n', které určují involuci sdružených průměrů.



Obr. 2.7.11

Úloha 2.7.6 Kuželosečka je dána třemi vlastními tečnami a, b, c a středem S. Určete involuci sdružených průměrů.

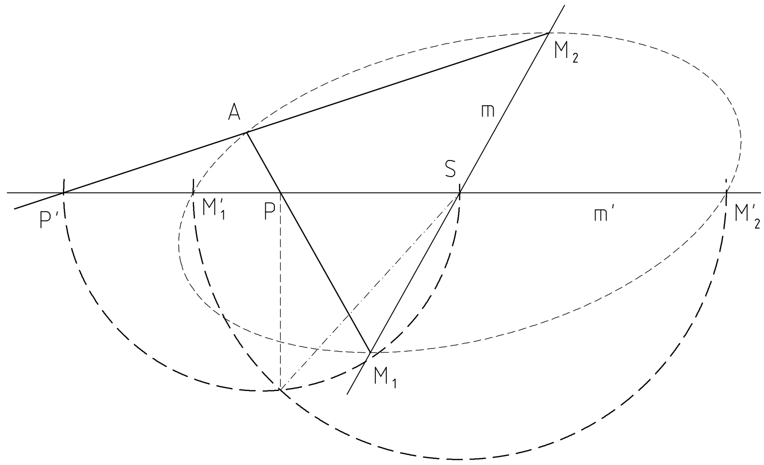


Obr. 2.7.12

Řešení (Obr. 2.7.12): K tečnám a, b, c sestrojíme podle středu S kuželosečky středově souměrné tečny a', b', c'. Přímky a, b, a', b', resp. b, c, b', c', určují rovnoběžníky kuželosečce opsané. Dle věty 2.7.13 jsou úhlopříčky těchto rovnoběžníků sdruženými průměry. Dostáváme tak dva páry sdružených průměrů m, m' a n, n', které určují involuci sdružených průměrů.

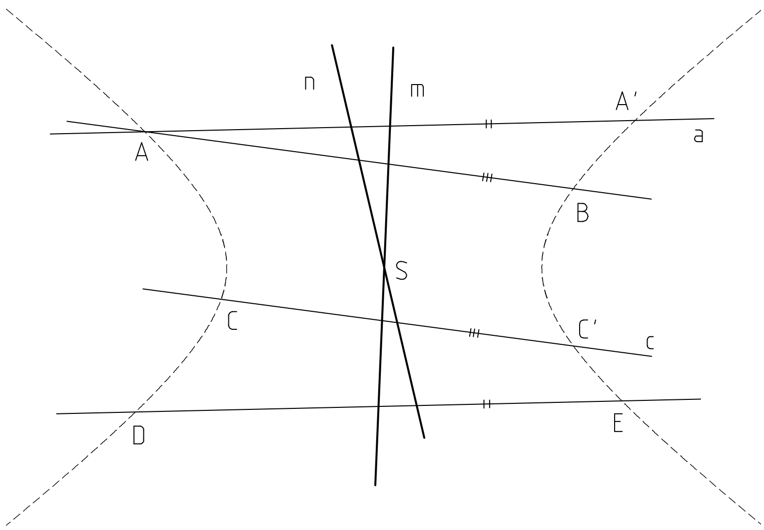
Úloha 2.7.7 Kuželosečka je dána párem sdružených průměrů m, m', krajními body M_1, M_2 průměru m a bodem A. Sestrojte krajní body průměru m'.

Řešení (Obr. 2.7.13): Z bodu A kuželosečky promítneme krajní body M_1, M_2 průměru m na průměr m'. Dostaneme tak body P, P', které tvoří involutorní pár sdružených pólů vzhledem ke kuželosečce (věta 2.7.17). Jelikož se jedná o hyperbolickou involuci, můžeme sestrojit (konstrukce 1.11.2) její samodružné body M_1', M_2', které jsou krajními body průměru m'.



Obr. 2.7.13

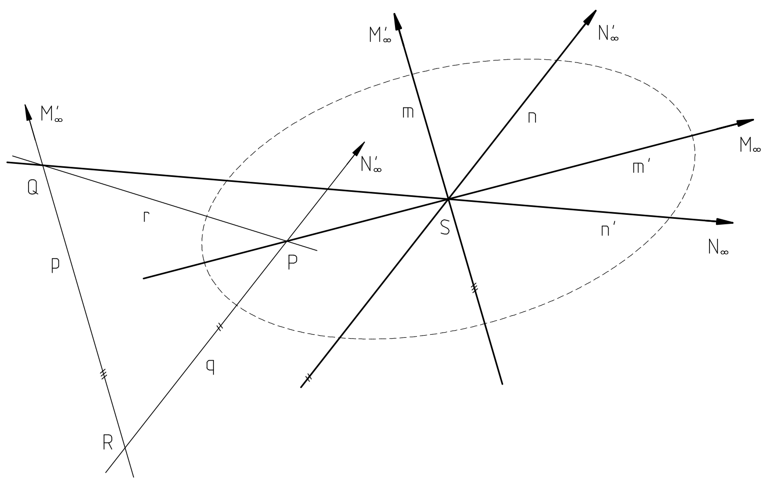
Úloha 2.7.8 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. Sestrojte její střed S.



Obr. 2.7.14

Řešení (Obr. 2.7.14): Bodem C vedeme přímku c rovnoběžnou s přímkou AB a pomocí Pascalovy věty na ní sestrojíme průsečík C' s danou kuželosečkou. (V obrázku z důvodu přehlednosti není tato konstrukce vyznačena). Dostaneme tak dvě rovnoběžné tětivy kuželosečky. Podle věty 2.7.8 je spojnice m středů těchto tětiv průměr kuželosečky. Obdobně sestrojíme také průměr n kuželosečky. Jelikož jsou průměry m, n různoběžné, nemůže být daná kuželosečka parabolou a průsečík těchto průměrů je tedy hledaným středem S kuželosečky.

Úloha 2.7.9 Kuželosečka je dána středem S a polárním trojúhelníkem PQR. Určete involuci sdružených průměrů.



Obr. 2.7.15

Řešení (Obr. 2.7.15): Sestrojíme průměr $m' = PS$ a jeho nevlastní bod označíme M_∞. Hledaný průměr m, který je sdružený s průměrem m', je zřejmě polárou nevlastního bodu M_∞. Průměr m' prochází středem S a pólem P, jeho pól je tedy průsečíkem přímek n_∞, p, tedy nevlastním bodem přímky p, kde přímka p je polárou bodu P. Jelikož polára m' prochází bodem M_∞, musí také polára m bodu M_∞ procházet bodem M'_∞. Hledaný průměr m sdružený vzhledem ke kuželosečce s průměrem m' je tedy rovnoběžný s přímkou p. Analogicky sestrojíme sdružené průměry $n, n' = QS$. Involuci sdružených průměrů máte tedy určenu dvěma páry odpovídajících si průměrů.

2.7.4 Osy kuželoseček

Definice 2.7.9 Přímky, které tvoří pravoúhlý pár involuce sdružených průměrů středové kuželosečky, se nazývají *osy kuželosečky*.
Průměr paraboly, který je kolmý ke směru s ním sdruženým, se nazývá *osa paraboly*.

Dříve než se budeme zabývat počtem os u jednotlivých kuželoseček, je třeba množinu všech elips rozdělit na dvě disjunktní skupiny.

Definice 2.7.10 Elipsu, která ve svém středu indukuje pravoúhlou involuci sdružených průměrů, nazýváme *kružnicí*.

Pro středové kuželosečky lze počet os odvodit z vlastností involuce svazků přímek. Pro parabolu stačí uvažovat větu 2.7.18

Věta 2.7.21 *Každá parabola má právě jednu osu. Každá středová kuželosečka, která není kružnicí, má právě dvě osy. Každá kružnice má nekonečně mnoho os.*

Následující věta plyne pro středové kuželosečky z vlastností sdružených průměrů a pro parabolu z vlastností průměrů sdružených se směrem. Každý průměr paraboly půlí její tětivy, které patří směru sdruženému. A každý průměr středové kuželosečky půlí tětivy rovnoběžné s průměrem k němu sdruženým.

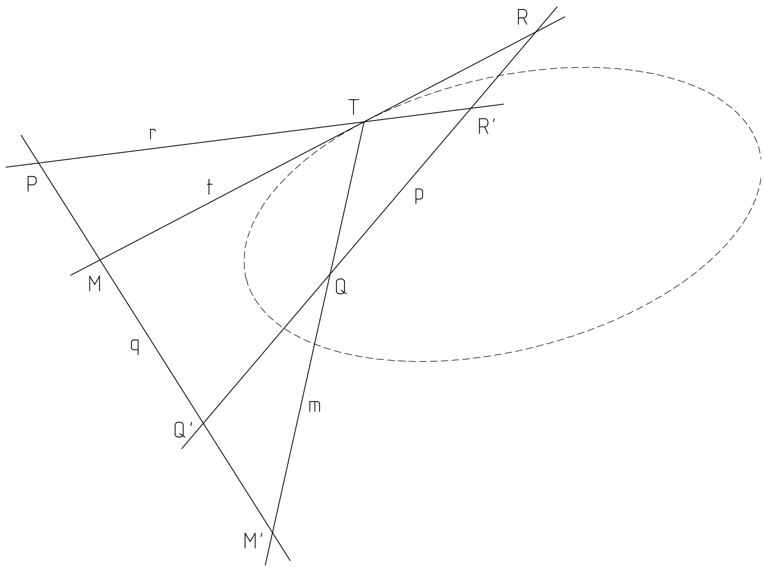
Věta 2.7.22 *Kuželosečka je souměrná podle své osy a obráceně osy kuželosečky jsou její jediné osy souměrnosti.*

Definice 2.7.11 Vlastní průsečíky kuželosečky s každou její osou se nazývají *vrcholy kuželosečky*. Tečny ve vrcholech se nazývají *vrcholové tečny*.

Parabola má tedy právě jeden vrchol a právě jednu vrcholovou tečnu. Každá středová kuželosečka, která není kružnicí, má nejvýše čtyři vrcholy. Dříve než odvodíme přesný počet vrcholů u středových kuželoseček, je třeba dokázat důležitou vlastnost vnitřních bodů kuželosečky. Přičemž vnitřním bodem kuželosečky rozumíme takový bod projektivní roviny, kterým neprochází žádná tečna této kuželosečky a jeho polára tedy neprotíná kuželosečku. Vnějším bodem kuželosečky, pak rozumíme bod, kterým procházejí právě dvě tečny.

Věta 2.7.23 *Každá přímka procházející vnitřním bodem kuželosečky je její sečnou.*

Důkaz: Nechť Q je libovolný vnitřní bod kuželosečky a p libovolná přímka, která jím prochází. Nechť dále přímka p protíná poláru q bodu Q vzhledem ke kuželosečce v bodě Q'. Body Q, Q' ležící na p jsou tedy polárně sdružené a současně body P, Q', kde P je pól přímky p, jsou polárně sdružené na přímce q. Zvolme libovolný bod T kuželosečky a sestrojme tečnu t v tomto bodě. Označme $R = p \cap t$. Polára r bodu R prochází body P, T a protíná přímku p v bodě R'. Body R, R' ležící na p jsou opět polárně sdružené. Máme tedy dánu involuci sdružených pólů na přímce p. Stačí dokázat, že tato involuce je hyperbolická a tedy že přímka p protíná kuželosečku v samodružných bodech této involuce. Označme $M = q \cap t$. Polára m bodu M prochází body Q, T a protíná přímku q v bodě M'. Body M, M' ležící na přímce q jsou polárně sdružené. Na přímce q máme dánu involuci sdružených pólů P, Q' a M, M'. Jelikož je přímka q polárou vnitřního bodu kuželosečky, je tato involuce eliptická a dané dvojice bodů se oddělují. Z toho plyne, že dvojice bodů M', Q' a M, P se navzájem neoddělují. Dvojice bodů Q, Q' a R, R' se tedy také navzájem neoddělují, jelikož jsou průmětem dvojic M', Q' a M, P. Involuce sdružených pólů na přímce p je tedy hyperbolická a přímka p protíná kuželosečku ve dvou bodech, je tedy její sečnou (Obr. 2.7.16). □



Obr. 2.7.16

Střed kuželosečky jsme definovali jako pól nevlastní přímky. Jelikož nevlastní přímka nemá s elipsou žádný společný bod, je střed elipsy vnitřním bodem. Hyperbola protíná nevlastní přímku ve dvou různých bodech, střed hyperboly je tedy jejím vnějším bodem. Snadno již tedy odvodíme věty o počtu vrcholů středových kuželoseček.

Věta 2.7.24 *Každý průměr elipsy ji protíná ve dvou různých bodech. Elipsa, která není kružnicí, má čtyři různé vrcholy. Kružnice má nekonečně mnoho vrcholů.*

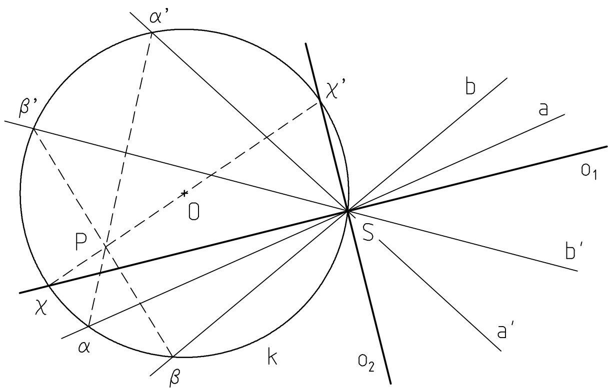
Věta 2.7.25 *Z každého páru sdružených průměrů hyperboly, které nejsou asymptotami, ji protíná právě jeden průměr. Hyperbola má dva různé vrcholy.*

Ukázalo se, že je výhodné na průměrech, které neprotínají hyperbolu, uvažovat podobné body, jako v případě krajních bodů průměrů protínajících hyperbolu. Těchto bodů poté využíváme při konstrukcích dalších prvků hyperboly.

Definice 2.7.12 Je-li involuce sdružených pólů na průměru hyperboly eliptická, pak sdružené póly incidentní s tímto průměrem, které jsou souměrné podle středu hyperboly, se nazývají *náhradní krajní body* tohoto průměru.

Z vlastností involuce sdružených průměrů snadno odvodíme, že osy úhlů, které svírají asymptoty, jsou osy hyperboly. Asymptoty hyperboly jsou samodružnými přímkami a osy hyperboly jsou pravoúhlým párem v této involuci. Charakteristika této involuce je rovna -1, asymptoty a osy hyperboly tedy tvoří harmonickou čtveřici přímek. Jelikož jsou osy hyperboly navzájem kolmé musí být osami úhlů, které svírají asymptoty.

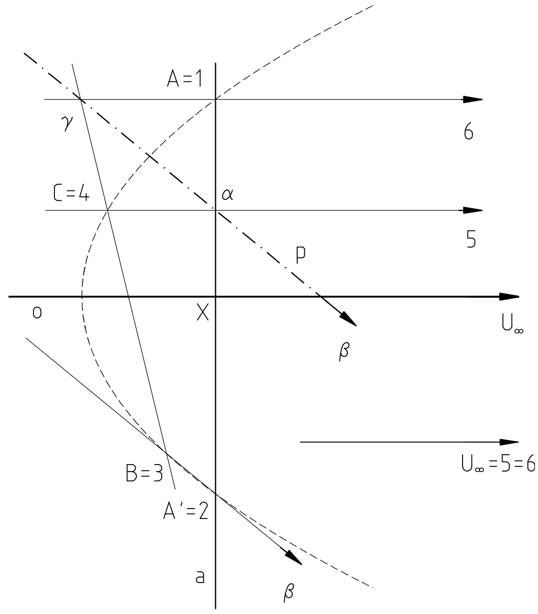
Konstrukce 2.7.2 Involuce je dána dvěma páry odpovídajících si přímek a, a' a b, b'. Sestrojte pravoúhlý pár přímek o_1, o_2 této involuce.



Obr. 2.7.17

Postup (Obr. 2.7.17) : Sestrojíme libovolnou kružnici k se středem O procházející středem involutorních svazků S. Přímky svazků protínají tuto kružnici v involutorních kvadratických soustavách bodů. Direkčním středem P těchto soustav procházejí všechny spojnice odpovídajících si bodů v dané involuci. Odpovídající si body χ, χ' kvadratických soustav, ve kterých kružnici k protíná pravoúhlý pár o_1, o_2, určíme jako krajní body průměru OP kružnice k.

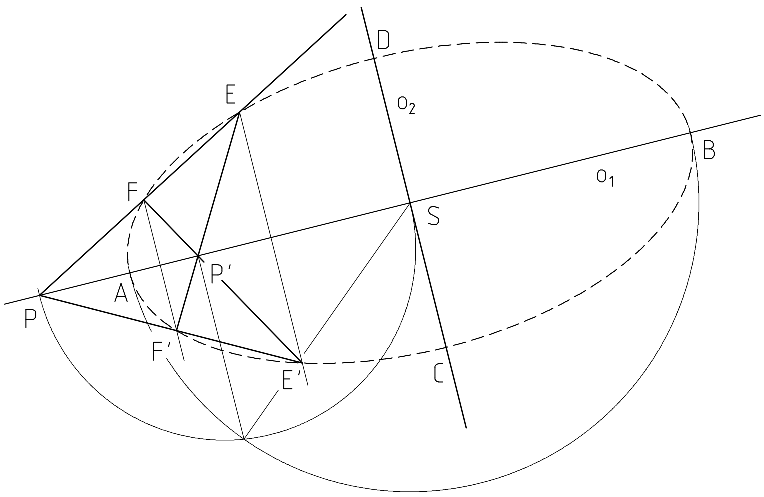
Úloha 2.7.10 Parabola je dána třemi vlastními body A, B, C a nevlastním bodem U_∞. Sestrojte osu o paraboly.



Obr. 2.7.18

Řešení (Obr. 2.7.18): Nevlastní bod U_∞ určuje směr hledané osy. Bodem A vedeme přímku a kolmou ke směru osy a pomocí Pascalovy věty na ní určíme bod A'. Parabola je souměrná podle své osy, hledaná osa o tedy prochází středem X úsečky AA'.

Úloha 2.7.11 Kuželosečka je dána středem S, osou o_1 a dvěma vlastními body E, F. Sestrojte všechny vrcholy kuželosečky.

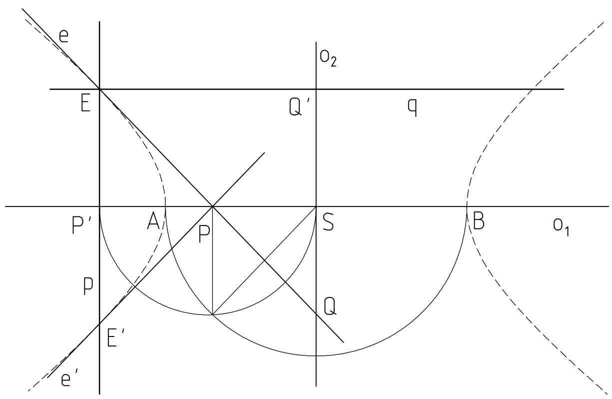


Obr. 2.7.19

Řešení (Obr. 2.7.19): Sestrojíme body E', F' souměrně sdružené s body E, F podle osy o_1. Čtveřice bodů E, F, F', E' tvoří úplný čtyřroh kuželosečce vepsaný, jeho diagonální vrcholy P, P' leží na ose o_1. Body P, P' jsou sdruženými póly v involuci pólů na přímce o_1. Jelikož je mocnost této involuce kladná, můžeme sestrojit její samodružné body A a B, které jsou hledanými vrcholy kuželosečky na ose o_1. Stejnou konstrukci lze provést i pro osu o_2 a tím získat vrcholy C, D. Zadaná kuželosečka je tedy elipsou.

Úloha 2.7.12 Kuželosečka je dána středem S, osou o_1 a tečnou e s bodem dotyku E. Sestrojte všechny vrcholy kuželosečky.

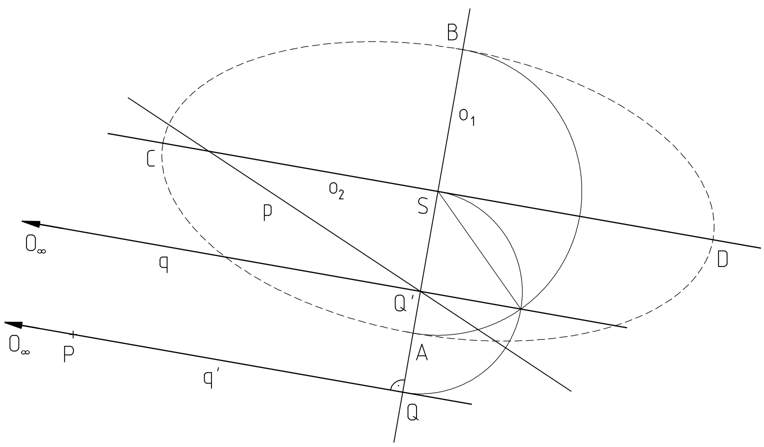
Řešení (Obr. 2.7.20): Sestrojíme bod E' a tečnu e' souměrně sdružené s bodem E a tečnou e podle osy o_1. Přímky e, e' se protínají na ose o_1 v bodě P, který je pólem přímky $p = EE'$. Průsečík přímky p s osou o_1 označíme P'. Body P, P' jsou sdruženými póly vzhledem k dané kuželosečce. Involuce sdružených pólů na ose o_1 určená středem kuželosečky S a odpovídajícími si body P, P' je hyperbolická. Lze tedy sestrojit její samodružné body A, B, které jsou hledanými vrcholy kuželosečky. Na ose o_2 kuželosečky dostáváme eliptickou involuci, osa o_2 tedy neprotíná kuželosečku. Kuželosečka je tedy hyperbolou.



Obr. 2.7.20

Úloha 2.7.13 Kuželosečka je dána středem S, osou o_1 a pólem P s polárou p. Sestrojte všechny vrcholy kuželosečky.

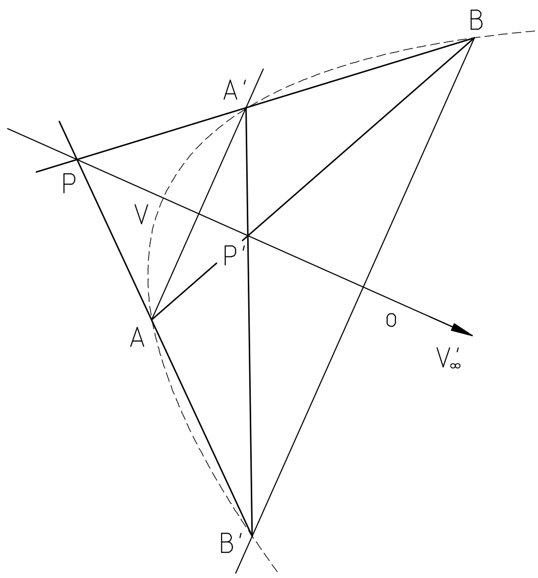
Řešení (Obr. 2.7.21): Označíme $Q' = o_1 \cap p$. Polára q' bodu Q' vzhledem ke kuželosečce prochází pólem P přímky p a pólem O_∞ přímky o_1. Průsečík přímek o_1 a q' označíme Q. Polára q bodu Q je určena body O_∞ a Q'. Dostáváme tak dvojici odpovídajících si pólů v involuci sdružených pólů na ose o_1. Samodružné body A, B této involuce jsou hledanými vrcholy kuželosečky na ose o_1. Analogickým postupem sestrojíme také vrcholy C, D na ose o_2.



Obr. 2.7.21

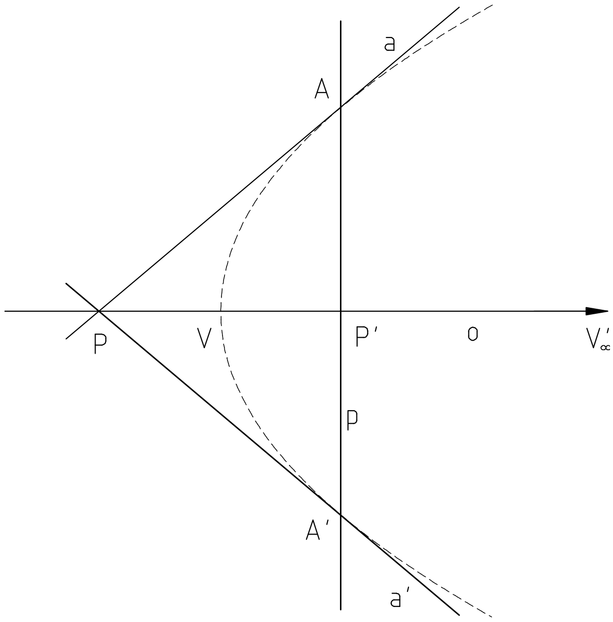
Úloha 2.7.14 Parabola je dána osou o a dvěma vlastními body A, B. Sestrojte vrchol V paraboly.

Řešení (Obr. 2.7.22): Sestrojíme body A', B' souměrně sdružené s body A, B podle osy o. Body A, B', B, A' tvoří úplný čtyřroh parabole vepsaný, jehož diagonální vrcholy P, P' leží na ose o. Body P, P' jsou sdruženými póly v involuci pólů na ose o. Samodružnými body této involuce jsou průsečíky osy o s parabolou, tedy nevlastní bod V'_∞ osy o, a hledaný vrchol V paraboly. Vrchol V je středem úsečky PP', jelikož pro body P, P', V, V'_∞ platí $\left(PP'VV'_\infty\right) = -1$ a tedy $(PP'V) = -1$.



Obr. 2.7.22

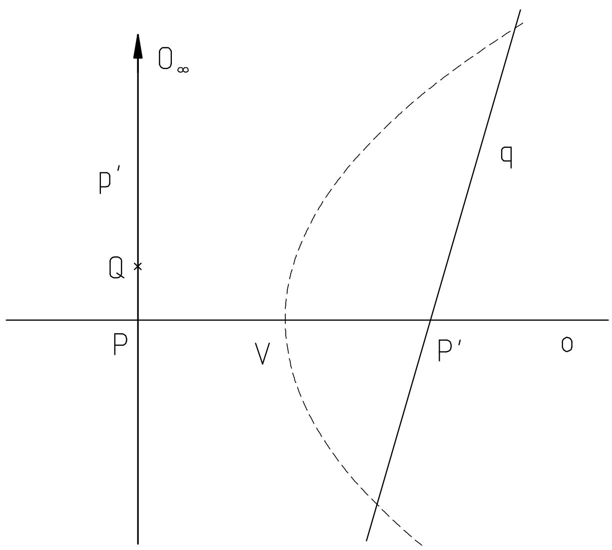
Úloha 2.7.15 Parabola je dána osou o a tečnou a s bodem dotyku A. Sestrojte vrchol V paraboly.



Obr. 2.7.23

Řešení (Obr. 2.7.23): Sestrojíme bod A' a tečnu a' souměrně sdružené s bodem A a tečnou a podle osy o. Přímky a, a' se protínají na ose o v bodě P, který je pólem přímky $p = AA'$. Průsečík přímky p s osou o označíme P'. Body P, P' jsou sdruženými póly v involuci pólů na ose o. Hledaný vrchol V paraboly je tedy (stejně jako v předchozí úloze) středem úsečky PP'.

Úloha 2.7.16 Parabola je dána osou o a pólem Q s polárou q. Sestrojte vrchol V paraboly.



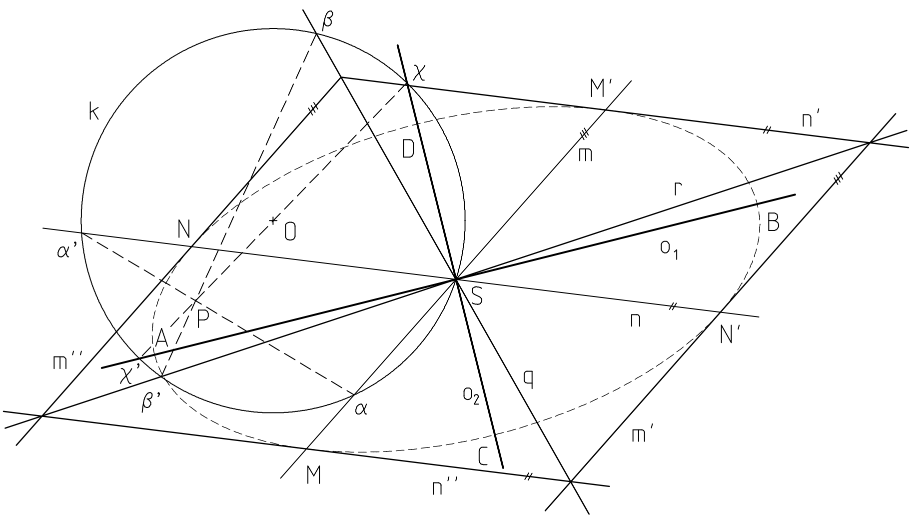
Obr. 2.7.24

Řešení (Obr. 2.7.24): Označíme $P' = o \cap q$. Polára p' bodu P' vzhledem k parabole prochází pólem Q přímky q a pólem O_∞ přímky o. Průsečík přímek o a p' označíme

P. Polára p bodu P je určena body O_∞ a P'. Dostáváme tak dvojici odpovídajících si pólů v involuci sdružených pólů na ose o. Samodružný vlastní bod V této involuce, tedy střed úsečky PP', je hledaným vrcholem paraboly.

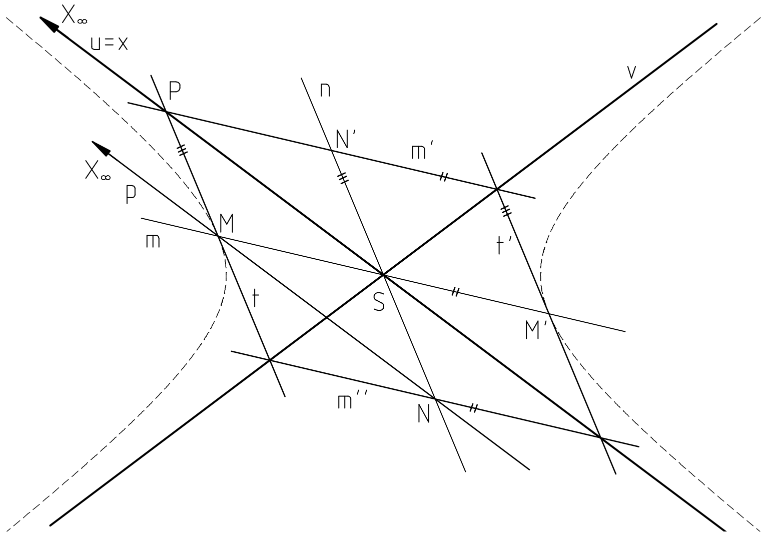
Úloha 2.7.17 Elipsa je dána sdruženými průměry m, n s krajními body M, M' a N, N'. Sestrojte osy o_1, o_2 a vrcholy A, B, C, D elipsy.

Řešení (Obr. 2.7.25): Krajními body M, M', resp. N, N', vedeme přímky n'', n', resp. m'', m', rovnoběžné s přímkou n, resp. m. Přímky m', n', m'', n'' tvoří rovnoběžník elipse opsaný. Úhlopříčky q, r tohoto rovnoběžníku jsou dalšími sdruženými průměry dané elipsy. Máme tak dánu involuci sdružených průměrů, ve které jsou hledané osy o_1, o_2 elipsy pravoúhlým párem sdružených průměrů (konstrukce 2.7.2). Vrcholy A, B, C, D sestrojíme stejně jako v úloze 2.7.11.



Obr. 2.7.25

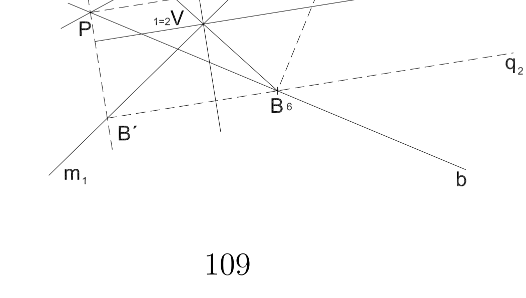
Úloha 2.7.18 Hyperbola je dána sdruženými průměry m, n s krajními body M, M', resp. náhradními krajními body N, N'. Sestrojte asymptoty u, v hyperboly.



Obr. 2.7.26

Řešení (Obr. 2.7.26): Body M, M', resp. N, N', vedeme přímky t, t', resp. m'', m', rovnoběžné s průměrem m, resp. n. Hledané asymptoty jsou úhlopříčky rovnoběžníku o stranách $tt'm'm''$. Odůvodnění vyplývá z následujícího. Označme $P = m' \cap t$. Polára p bodu P prochází body N, M, jelikož bod N je pólem přímky m' a bod M je pólem přímky t. Označme $x = PS$. Pól X_∞ přímky x dostaneme jako průsečík poláry p bodu P s nevlastní přímkou, tedy polárou středu S. Jelikož je přímka x úhlopříčkou rovnoběžníku se stranami t, m', t', m'' a přímka p spojnicí středu vedlejších stran tohoto rovnoběžníku, jsou tyto přímky rovnoběžné. Bod X_∞ tedy leží na přímce x. Protože přímka x prochází jak středem S hyperboly, tak i svým pólem X_∞ vzhledem k této hyperbole, je tato přímka hledanou asymptotou u hyperboly. Podobnou úvahou bychom došli k závěru, že asymptota v hyperboly je druhou úhlopříčkou rovnoběžníku se stranami t, m', t', m''.

Úloha 2.7.19 Parabola je dána tečnami a, b s body dotyku A, B. Sestrojte osu o a vrchol V paraboly.



Obr. 2.7.27

Řešení (Obr. 2.7.27): Nejprve sestrojíme průměr q dané paraboly jako spojnici průsečíku P daných tečen a, b se středem tětivy AB, kde A, B jsou body dotyku daných tečen a, b na základě věty 2.7.7. Jeden ze způsobů, kterým budeme pokračovat, nám umožní rychlé sestrojení vrcholu V dané paraboly. Sestrojíme rovnoběžky q_1, q_2 s přímkou q procházející body A, B, což jsou průvodiče bodů A, B. Bodem P vedeme přímku kolmou k průměru q, která protne přímky q_1, q_2 v bodech A', B'. Průsečík spojnic $A'BaBA'$ je vrchol V, jenž ovšem leží na ose g. Odůvodnění toho způsobu spočívá v tom, že bod P je direkčním středem projektivních svazků přímek $A(q1, \ldots)$ ::: $B(q2, \ldots)$, jež vytvářejí naši parabolu. Přímce $m_1 = AB'$ v této projektivnosti odpovídá přímka $m_2 = BA'$, takže bod V je skutečně bodem dané paraboly. Abychom ukázali, že je to její vrchol, sestrojíme v něm tečnu v užitím Pascalovy věty, při čemž očíslování volíme tak, že $V = 1 = 2, A = 3, B = 6$ a nevlastní bod průměru q, který je bodem dotyku nevlastní tečny, je bod $4_\infty \equiv 5_\infty$. Pascalovou přímkou je pak spojnice $A'B'$ a tečna v je s ní rovnoběžná. Tedy tečna v je kolmá na průměr q, a proto je to tečna vrcholová.

2.7.5 Ohniska kuželosečky

V každém bodě projektivní roviny, který neleží na kuželosečce, indukuje daná kuželosečka involuci sdružených polár. V této involuci sdružených polár existuje buď právě jeden pravoúhlý pár, nebo je daná involuce pravoúhlá.

Definice 2.7.13 Bod, v němž kuželosečka indukuje pravoúhlou involuci sdružených polár, se nazývá *ohnisko kuželosečky*. Značíme F.

Střed kružnice je zřejmě jejím ohniskem, jelikož navzájem kolmé sdružené průměry kružnice jsou současně sdruženými polárami. Oproti tomu kuželosečka, která není kružnicí, indukuje ve svém středu involuci sdružených průměrů, která není pravoúhlá. Její střed tedy není ohniskem. Dále lze odvodit, že ohnisko libovolné kuželosečky je bod vlastní, jelikož přímky incidentní s nevlastním bodem jsou rovnoběžné, a tedy nemohou tvořit pravoúhlou involuci.

Věta 2.7.26 *Průměr kuželosečky, který prochází jejím ohniskem, je osou této kuželosečky.*

Důkaz: Pro kružnici a parabolu tvrzení zřejmě platí. Nechť je tedy dána středová kuželosečka, která není kružnicí, její ohnisko F a střed S. Pól průměru FS je nevlastní bod, všechny poláry sdružené s touto přímkou tímto bodem procházejí a jsou tedy navzájem rovnoběžné. Průměr FS kuželosečky a průměr s ním sdružený v involuci sdružených průměrů ve středu S tedy tvoří pravoúhlý pár této involuce a tedy také osy kuželosečky.

$\square$

Tato věta nezaručuje existenci žádného ohniska, pouze říká, kde případná ohniska leží. Vyslovíme tedy větu, díky které lze počet ohnisek jednotlivých kuželoseček snadno odvodit.

Věta 2.7.27 *Mějme kuželosečku, která není kružnicí. Potom páry bodů, které na každé její ose vytínají dvě k sobě kolmé sdružené poláry, tvoří involuci. Je-li kuželosečka středová, pak její střed je středem každé z těchto involucí; na jedné ose je involuce hyperbolická a její samodružné body jsou ohniska, na druhé ose je eliptická. Je-li kuželosečka parabola, je tato involuce hyperbolická, přičemž jeden její samodružný bod je nevlastní bod osy a druhý je ohnisko paraboly.*

Jako přímý důsledek této věty dostáváme větu o počtu ohnisek kuželoseček.

Věta 2.7.28 *Každá středová kuželosečka, která není kružnicí, má dvě různá ohniska, jejich spojnice je osou této kuželosečky. Parabola má jedno ohnisko.*

V pravoúhlé involuci polár nemůže existovat přímka, která by byla tečnou kuželosečky. Ohnisko tedy neleží na kuželosečce a ani není jejím vnějším bodem. Každé ohnisko kuželosečky je tedy jejím vnitřním bodem. Jelikož ohniska středové kuželosečky, která není kružnicí, leží pouze na jedné z os, budeme tyto osy navzájem rozlišovat.

Definice 2.7.14 Osu středové kuželosečky, která není kružnicí, procházející jejími ohnisky nazýváme *hlavní osou*. Osu, na které ohniska neleží, nazýváme *vedlejší osou*.

Pro hyperbolu tak dostáváme následující větu plynoucí z toho, že každé ohnisko je vnitřním bodem své kuželosečky.

Věta 2.7.29 *Hlavní osa hyperboly protíná tuto hyperbolu ve dvou různých vrcholech, vedlejší osa ji neprotíná.*

Definice 2.7.15 Vzdálenost ohniska od středu kuželosečky se nazývá *excentricita (výstřednost) kuželosečky*. Značíme ji e. Vzdálenost vrcholu na hlavní ose od středu kuželosečky se nazývá *délka hlavní poloosy*. Značíme ji a. Vzdálenost vrcholu elipsy na vedlejší ose od středu elipsy se nazývá *délka vedlejší poloosy*. Značíme ji b. *Délkou vedlejší poloosy* hyperboly rozumíme kladné číslo b takové, že $-b^2$ je mocnost involuce sdružených pólů na její vedlejší ose, číslo $2a$, resp. $2b$, je *délka hlavní*, resp. *vedlejší osy kuželosečky*.

Můžeme tedy vyslovit dobře známou větu eukleidovské geometrie. Tuto větu opět uvedeme bez důkazu, jelikož se zde využívá poznatků z důkazu věty 2.7.27.

Věta 2.7.30 *Jsou-li a, b délky hlavní a vedlejší poloosy středové kuželosečky a e její výstřednost, platí pro elipsu rovnice $e^2 = a^2 - b^2$ a pro hyperbolu $e^2 = a^2 + b^2$.*

Jelikož jsou délka b vedlejší poloosy a výstřednost e u středové kuželosečky vždy kladné, platí pro elipsu vztahy $a > b$, $e < a$ a pro hyperbolu vztah $e > a$.

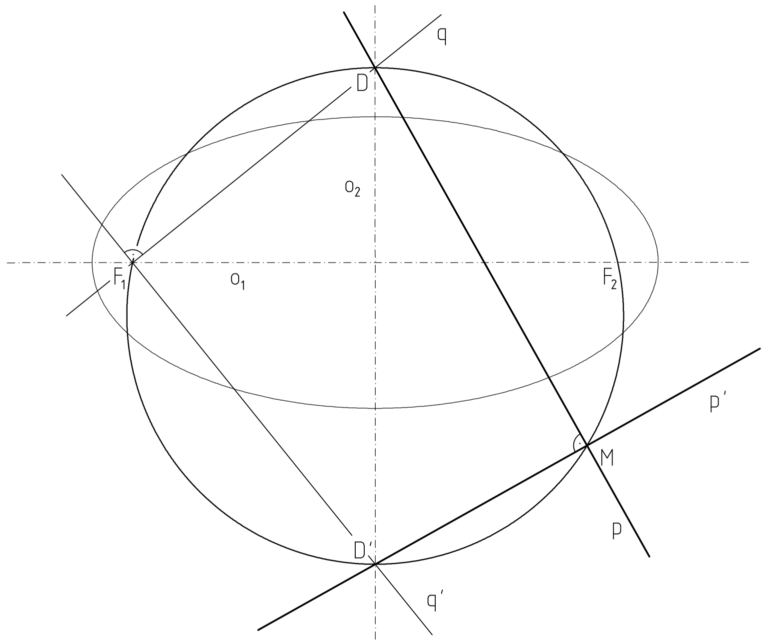
Definice 2.7.16 Obdélník, jehož vrcholy jsou průsečíky vrcholových tečen hyperboly s jejími asymptotami, se nazývá *charakteristický obdélník hyperboly*.

Věta 2.7.31 *Délky stran charakteristického obdélníku hyperboly o poloosách a, b jsou $2a, 2b$.*

Zřejmě tedy také platí, že úhlopříčky charakteristického obdélníku hyperboly s výstředností e mají délku $2e$. Průsečík těchto úhlopříček je střed hyperboly, jelikož úhlopříčky jsou asymptoty. Z těchto vlastností ihned plyne následující věta.

Věta 2.7.32 *Ohniska hyperboly jsou průsečíky její hlavní osy s kružnicí, která je opsána jejímu charakteristickému obdélníku.*

Věta 2.7.33 *Kružnice opsaná trojúhelníku, jehož jedna strana je na vedlejší ose středové kuželosečky, která není kružnicí, a druhé dvě jsou kterékoli její dvě kolmé sdružené poláry, protíná hlavní osu v ohniskách této kuželosečky.*



Obr. 2.7.28

Důkaz: (Obr. 2.7.28) Nechť p, p' jsou libovolné navzájem kolmé sdružené poláry vzhledem k dané středové kuželosečce, která není kružnicí, a jejich průsečík M nechť neleží na vedlejší ose této kuželosečky. Označme průsečíky D, D' polár p, p' s vedlejší osou kuželosečky. Body D, D' jsou dle věty 2.7.27 odpovídající si body v involuci na vedlejší ose. Přímka q' kolmá ke spojnici q bodů D, F_1 a procházející týmž ohniskem F_1 je ovšem její sdruženou polárou. Dvojice přímek q, q' tedy protíná vedlejší osu g' v páru bodové involuce. Protože jeden bod takového páru je bod D, druhým bodem je nutně bod D', to znamená, že přímka q' prochází bodem D'. Oba pravoúhlé trojúhelníky DMD' a DF_1D' mají tedy společnou přeponu, proto body M a F_1 leží na kružnici nad průměrem DD'. □

Definice 2.7.17 Přímka procházející bodem dotyku tečny s kuželosečkou a kolmá k této tečně se nazývá *normála kuželosečky.*

Tečna kuželosečky a její normála jsou kolmými sdruženými polárami vzhledem k této kuželosečce. Věta 2.7.33 pro ně tedy také platí, čehož využíváme zejména v případě, kdy máme sestrojit ohniska středové kuželosečky dané osami a tečnou s bodem dotyku.

Věta 2.7.34 *Ohnisko paraboly je středem každé úsečky, jejíž krajní body jsou na ose paraboly vyťaty kolmými sdruženými polárami, a tedy i každou její tečnou a příslušnou normálou.*

Důkaz: Nechť p, p' jsou libovolné navzájem kolmé sdružené poláry vzhledem k dané parabole, jejichž průsečík neleží na ose této paraboly. Označme průsečíky D, D' polár p, p' s osou paraboly. Body D, D' jsou opět (dle věty 2.7.27) odpovídající si body v involuci na ose paraboly. Jelikož je nevlastní bod osy paraboly jedním samodružným bodem této involuce, musí být druhý samodružný bod, tedy ohnisko, středem každé úsečky s krajními body v odpovídajících si bodů v involuci na ose paraboly, tedy i úsečky DD'. □

Definice 2.7.18 Polára ohniska kuželosečky se nazývá *řídicí přímka kuželosečky.*

Kružnice má právě jednu řídicí přímku a to přímku nevlastní. Každá středová kuželosečka, která není kružnicí, má právě dvě řídicí přímky. Parabola má právě jednu řídicí přímku a tato přímka je vždy vlastní. Jelikož je ohnisko kuželosečky vždy jejím vnitřním bodem, je řídicí přímka vždy nesečnou kuželosečky.

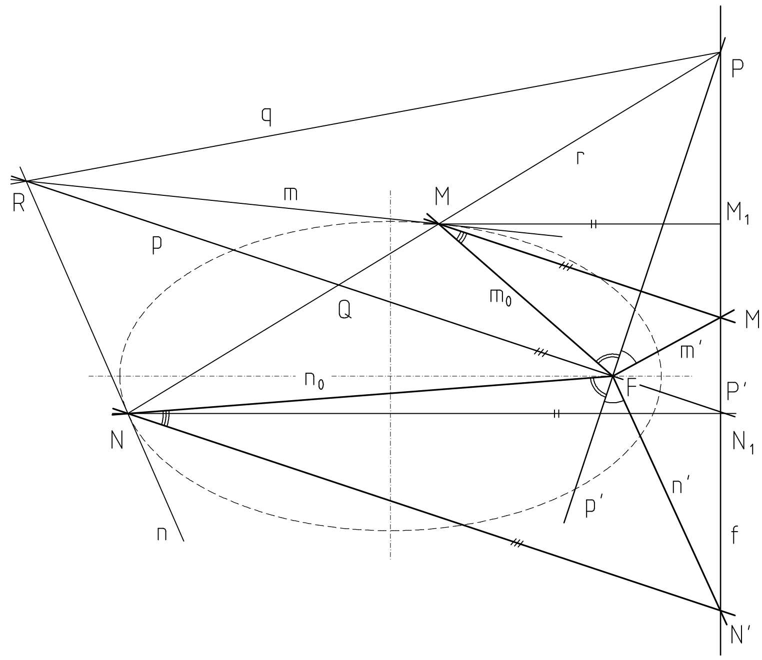
Věta 2.7.35 *Je-li d vzdálenost středu kuželosečky, která není kružnicí, od řídicí přímky, pak je $d \cdot e = a^2$.*

Tato věta plyne z toho, že libovolné ohnisko a průsečík hlavní osy s polárou tohoto ohniska tvoří odpovídající si pár v involuci s mocností a^2 a středem ve středu kuželosečky. Z vlastností involuce sdružených pólů na ose paraboly můžeme také odvodit větu pro ohnisko paraboly.

Věta 2.7.36 *Vrchol paraboly je středem úsečky s krajními body v jejím ohnisku a průsečíku řídicí přímky s osou.*

Věta 2.7.37 *Poměr vzdáleností libovolného vlastního bodu kuželosečky, která není kružnicí, od jejího ohniska a od řídicí přímky, která je polárou tohoto ohniska, je konstantní.*

Důkaz: (Obr. 2.7.29) Nechť F je ohnisko a f jeho polára vzhledem k dané kuželosečce. Na kuželosečce zvolme libovolné dva různé vlastní body M, N a sestrojme tečny m, n v těchto bodech. Označme R průsečík tečen m, n. Polára r bodu R vzhledem k dané kuželosečce je určena body M, N. Označme $P = f \cap r$ a sestrojme poláru $p = FR$ bodu P. Dále označme $P' = f \cap p$ a opět sestrojme poláru $p' = FP$ bodu P'. Jelikož jsou přímky p, p' sdružené poláry procházející ohniskem F, jsou navzájem kolmé. Označme $Q = p \cap r$ a $q = PR$. Body P, Q jsou sdruženými póly na přímce r, platí tedy $(MNPQ) = -1$.



Obr. 2.7.29

Promítneme-li body M, N z bodu F přímkami m_0, n_0, pak také platí $(m_0 n_0 p' p) = -1$. Jelikož jsou přímky p, p' navzájem kolmé a harmonicky sdružené s přímkami m_0, n_0, jsou přímky p, p' osy úhlů přímek m_0, n_0. Promítneme-li body M, N, P, Q rovnoběžně s přímkou p na přímku f do bodů M', N', P, P', platí $(M'N'PP') = -1$. Sestrojíme-li přímky $m' = FM', n' = FN'$, pak přímky p, p' jsou opět osy úhlů těchto přímek. Z uvedených vlastností vyplývá, že $|\measuredangle NFN'| = |\measuredangle MFM'|$ a $|\measuredangle FMM'| = |\measuredangle FNN'|$, tedy že trojúhelníky MFM', NFN' jsou podobné. Promítneme-li body M, N kolmo na přímku f do bodů M_1, N_1, jsou také trojúhelníky $MM'M_1, NN'N_1$ podobné. Dostáváme tedy následující rovnosti

$$\frac{|MF|}{|MM'|} = \frac{|NF|}{|NN'|} \text{ a } \frac{|MM'|}{|MM_1|} = \frac{|NN'|}{|NN_1|} = \rho \Rightarrow |MM'| = \rho|MM_1|, |NN'| = \rho|NN_1|$$

$$\text{a tedy } \frac{|MF|}{\rho|MM_1|} = \frac{|NF|}{\rho|NN_1|} \Rightarrow \frac{|MF|}{|MM_1|} = \frac{|NF|}{|NN_1|}.$$

Protože body M, N byly dva libovolné různé body naší kuželosečky a $|MF|$ je vzdálenost bodu M od ohniska a $|MM_1|$ je vzdálenost bodu M od řídící přímky, má poměr $|MF| : |MM_1|$ hodnotu nezávislou na volbě bodu M na naší kuželosečce a je tedy pro všechny body kuželosečky konstantní. □

Z osové souměrnosti podle vedlejší osy u středových kuželoseček plyne, že tento poměr vzdáleností nezávisí na volbě ohniska. Pro každou kuželosečku, která není kružnicí, tedy dostáváme jedinou hodnotu tohoto poměru vzdáleností.

Definice 2.7.19 Poměr vzdáleností libovolného vlastního bodu kuželosečky, která není kružnicí, od jejího libovolného ohniska a příslušné řídicí přímky se nazývá *číselná výstřednost kuželosečky* a značíme ji ε. Číselná výstřednost kružnice je rovna 0.

Vrchol paraboly je stejně vzdálen od jejího ohniska a její řídicí přímky, číselná výstřednost paraboly je tedy rovna 1. Pro všechny vlastní body paraboly tedy platí, že jsou stejně vzdáleny od jejího ohniska a řídicí přímky. Zbývá ukázat, zda každý vlastní bod projektivní roviny, který má stejnou vzdálenost od ohniska i od řídicí přímky, je bodem paraboly.

Věta 2.7.38 *Každý vlastní bod paraboly má od jejího ohniska a od řídicí přímky stejnou vzdálenost. Každý vlastní bod roviny, který je stejně vzdálen od ohniska a řídicí přímky paraboly, je bodem dané paraboly.*

Důkaz: První část věty plyne přímo z předchozích úvah. Dokážeme tedy, že každý vlastní bod projektivní roviny, jehož vzdálenosti od ohniska a od řídicí přímky jsou sobě rovny, je bodem paraboly. Důkaz rozdělíme na dva případy.

1. Nechť bod X je stejně vzdálen od ohniska F a řídicí přímky f dané paraboly a současně je vnějším bodem této paraboly. Nechť úsečka FX protíná parabolu v bodě A. Označme X' pravoúhlý průmět bodu X na přímku f. Dostáváme tak následující rovnost

$$|XX'| = |FX| = |XA| + |AF|, |AA'| = |AF| \Rightarrow |XX'| = |AX| + |AA'|.$$

Bod A je tedy bodem úsečky XX' a současně dle předpokladu také bodem úsečky FX. Úsečky XX', FX nemohou být rovnoběžné, platí tedy $A = X$, což je spor s předpokladem, že X je vnějším bodem paraboly.

2. Nechť bod Y je stejně vzdálen od ohniska F a řídicí přímky f dané paraboly a současně je vnitřním bodem této paraboly. Označme Y' pravoúhlý průmět bodu Y na přímku f. Nechť úsečka YY' protíná parabolu v bodě B. Dostáváme tak následující rovnost

$$|FY| = |YY'| = |YB| + |BY'|, |BY'| = |BF| \Rightarrow |FY| = |YB| + |BF|.$$

Bod B je tedy bodem úsečky FY a současně bodem úsečky YY'. Jelikož však úsečky YY', FY nemohou být rovnoběžné, musí platit $B = Y$, což je spor s předpokladem, že Y je vnitřním bodem paraboly.

Dokázali jsme, že každý vlastní bod, který je stejně vzdálen od ohniska a řídicí přímky paraboly, je bodem dané paraboly. □

Středové kuželosečky, které nejsou kružnicí, mají právě dvě ohniska a právě dvě řídicí přímky, pro libovolný bod X této kuželosečky musí být tedy splněna rovnost

$$\frac{|XF_1|}{|XX_1|} = \frac{|XF_2|}{|XX_2|} = \varepsilon,$$

kde F_1, F_2 jsou ohniska a X_1, X_2 pravoúhlé průměty bodu X na příslušné řídicí přímky. Jelikož jsou řídicí přímky navzájem rovnoběžné dostáváme následující rovnosti

$$\text{pro elipsu } |XX_1| + |XX_2| = 2d, \text{ pro hyperbolu } \Big||XX_1| - |XX_2|\Big| = 2d.$$

Musí být tedy splněny také rovnosti

$$\text{pro elipsu } \frac{|XF_1| + |XF_2|}{|XX_1| + |XX_2|} = \varepsilon, \text{ pro hyperbolu } \left|\frac{|XF_1| - |XF_2|}{|XX_1| - |XX_2|}\right| = \varepsilon,$$

a tedy také

$$\text{pro elipsu } |XF_1| + |XF_2| = 2d\varepsilon = 2a, \text{ pro hyperbolu } \Big||XF_1| - |XF_2|\Big| = 2d\varepsilon = 2a.$$

Součet vzdáleností libovolného bodu elipsy, která není kružnicí, od jejích ohnisek je tedy konstantní. A absolutní hodnota rozdílu vzdáleností libovolného vlastního bodu hyperboly od jejích ohnisek je také konstantní. Odvodili jsme tedy následující věty pro body elipsy a pro vlastní body hyperboly.

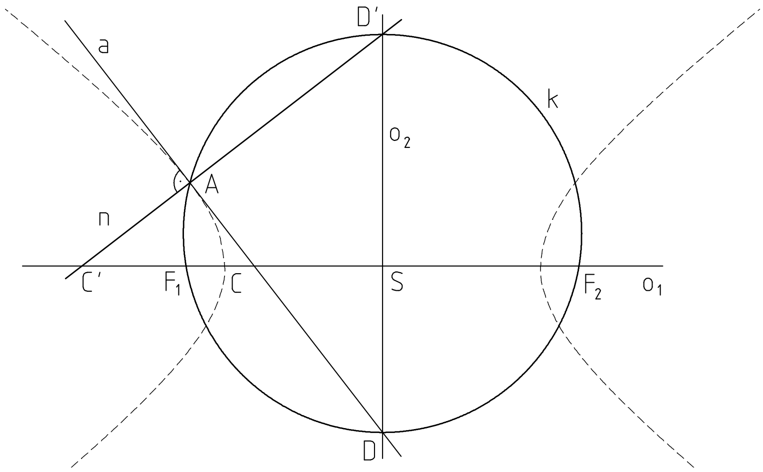
Věta 2.7.39 *Elipsa, která není kružnicí, je množina vlastních bodů, jejichž součet vzdáleností od dvou různých pevných vlastních bodů F_1, F_2 je konstantní a je roven délce její hlavní osy.*

Věta 2.7.40 *Vlastní body hyperboly jsou body, jejichž rozdíl vzdáleností od dvou různých pevných vlastních bodů je konstantní a je roven délce její hlavní osy.*

Pro středové kuželosečky, které nejsou kružnicí, je splněno $2d\varepsilon = 2a$ a současně $d \cdot e = a^2$. Z těchto rovností snadno dostáváme rovnost $\varepsilon = \frac{e}{a}$. Jelikož pro elipsu platí také $e < a$, je číselná výstřednost elipsy menší než 1. Pro hyperbolu naopak platí $e > a$, číselná výstřednost hyperboly je tedy větší než 1.

Věta 2.7.41 *Nechť ε je číselná výstřednost kuželosečky. Je-li $\varepsilon \in \langle 0; 1)$, je kuželosečka elipsou. Je-li $\varepsilon = 1$, je parabolou. Je-li $\varepsilon \in (1; \infty)$, je hyperbolou.*

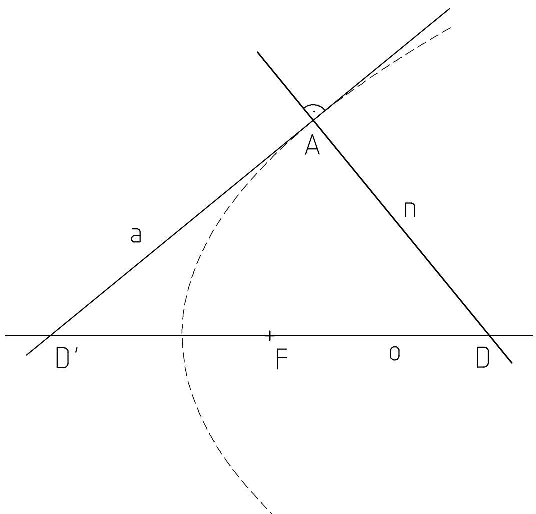
Úloha 2.7.20 Kuželosečka je dána osami o_1, o_2 a tečnou a s bodem dotyku A. Sestrojte ohniska F_1, F_2 kuželosečky.



Obr. 2.7.30

Řešení (Obr. 2.7.30): V bodě A sestrojíme normálu n kuželosečky. Přímky a, n protínají osy o_1, o_2 v bodech $C, C' \in o_1$ a $D, D' \in o_2$. Body C, C', resp. D, D', tvoří involutorní pár bodů v involuci na přímce o_1, resp. o_2. Jelikož střed S je bodem úsečky DD', je involuce na přímce o_2 eliptická, a tedy přímka o_2 je vedlejší osou kuželosečky. Sestrojíme kružnici k s průměrem DD'. Kružnice k protíná osu o_1 v ohniskách F_1, F_2 kuželosečky (věta 2.7.33). Ohniska lze také sestrojit pomocí involuce bodů na ose o_1. Bod S je středem této involuce a body C, C' tvoří involutorní pár. Samodružné body této involuce jsou hledanými ohnisky kuželosečky (věta 2.7.27).

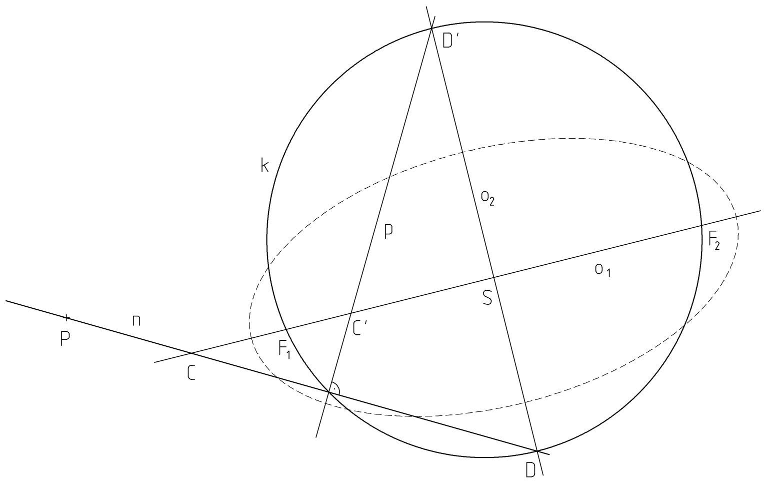
Úloha 2.7.21 Parabola je dána osou o a tečnou a s bodem dotyku A. Sestrojte ohnisko F paraboly.



Obr. 2.7.31

Řešení (Obr. 2.7.31): V bodě A sestrojíme normálu n paraboly. Přímky a, n protínají osu o paraboly v bodech D, D'. Hledané ohnisko F paraboly je středem úsečky DD' (věta 2.7.34).

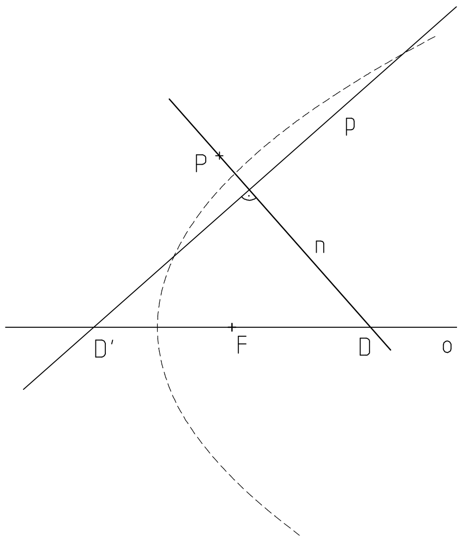
Úloha 2.7.22 Kuželosečka je dána osami o_1, o_2 a pólem P s polárou p. Sestrojte ohniska F_1, F_2 kuželosečky.



Obr. 2.7.32

Řešení (Obr. 2.7.32): V bodě P sestrojíme přímku n kolmou k přímce p. Přímky n, p protínají osy o_1, o_2 v bodech $C, C' \in o_1$ a $DD' \in o_2$. Přímky p, n jsou kolmé sdružené poláry, body C, C', resp. D, D', tedy tvoří involutorní páry bodů v involuci na přímce o_1, resp. o_2. Involuce na o_2 je eliptická, přímka o_2 je tedy vedlejší osou kuželosečky. Sestrojíme kružnici k s průměrem DD'. Tato kružnice protíná osu o_1 v hledaných ohniskách F_1, F_2 kuželosečky (věta 2.7.33).

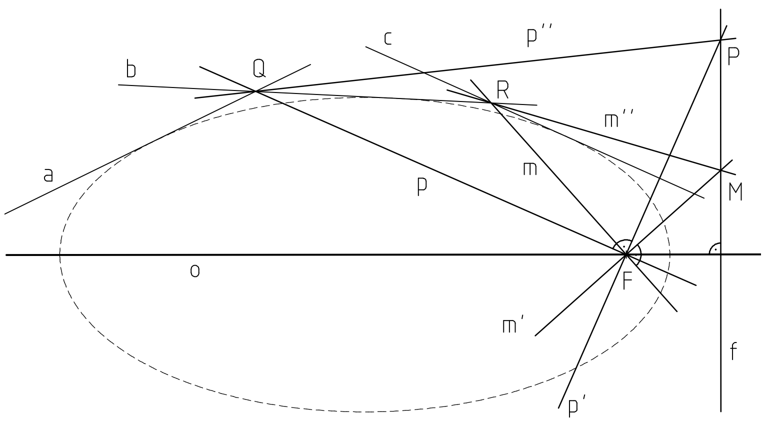
Úloha 2.7.23 Parabola je dána osou o a pólem P s polárou p. Sestrojte ohnisko F paraboly.



Obr. 2.7.33

Řešení (Obr. 2.7.33): V bodě P sestrojíme přímku n kolmou k přímce p. Přímky n, p jsou kolmými sdruženými polárami vzhledem k dané parabole a protínají osu o paraboly v bodech D, D'. Hledané ohnisko F paraboly je dle věty 2.7.34 středem úsečky DD'.

Úloha 2.7.24 Kuželosečka je dána třemi tečnami a, b, c a ohniskem F. Sestrojte osu o kuželosečky.

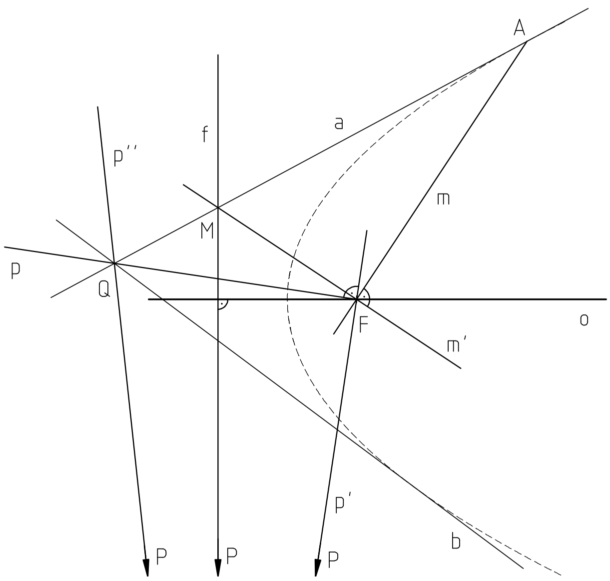


Obr. 2.7.34

Řešení (Obr. 2.7.34): Označíme $Q = a \cap b$ a sestrojíme přímku $p = QF$. V ohnisku F sestrojíme přímku p' kolmou k p. V bodě Q sestrojíme přímku p'', tak aby platilo $(abpp'') = -1$. Přímky p, p', resp. p, p'', jsou sdružené poláry vzhledem k dané kuželosečce. Průsečík P přímek p', p'' je tedy pólem přímky p. Jelikož polára p prochází ohniskem F, leží její pól P na poláře f ohniska F, tedy na řídicí přímce. Stejným postupem pro bod $R = b \cap c$ určíme pól M přímky $m = RF$. Řídicí přímka f kuželosečky je tedy určena body M, P. Hledaná osa o prochází ohniskem F a je kolmá k přímce f.

Úloha 2.7.25 Kuželosečka je dána tečnou a s bodem dotyku A, tečnou b a ohniskem F. Sestrojte osu o kuželosečky.

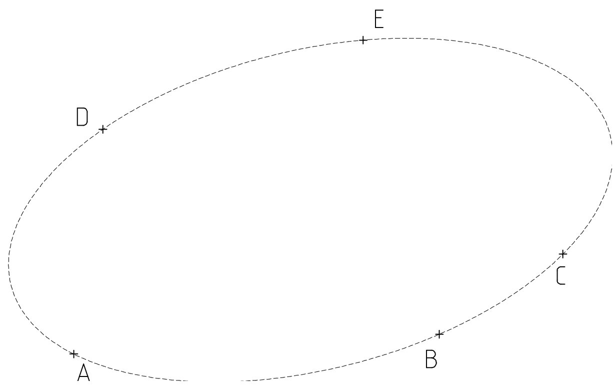
Řešení (Obr. 2.7.35): Označíme $Q = a \cap b$ a sestrojíme přímku $p = QF$. V ohnisku F sestrojíme přímku p' kolmou k p. V bodě Q sestrojíme přímku p'', tak aby platilo $(abpp'') = -1$. Přímky p, p', resp. p, p'', jsou sdružené poláry vzhledem k dané kuželosečce. Průsečík P přímek p', p'' je tedy pólem přímky p. Jelikož polára p prochází ohniskem F leží její pól P na poláře f ohniska F, tedy na řídicí přímce. Sestrojíme přímku $m = AF$ a v ohnisku F sestrojíme přímku m' kolmou k m. Přímky a, m' jsou sdružené poláry vzhledem k dané kuželosečce, jejich průsečík M je tedy pólem přímky m. Přímka m prochází ohniskem F, řídicí přímka f tedy prochází bodem M. Hledaná osa o prochází ohniskem F a je kolmá k přímce $f = MP$.



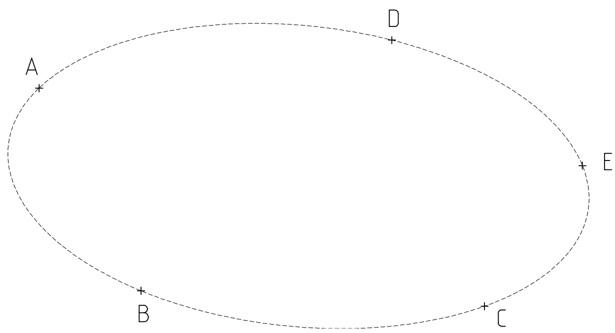
Obr. 2.7.35

Přílohy

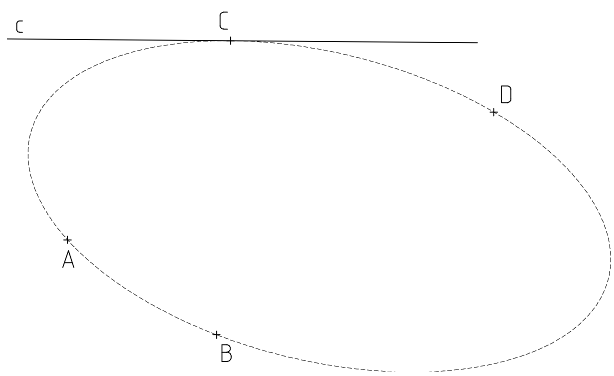
Úloha 2.1.1 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. Sestrojte její další bod.



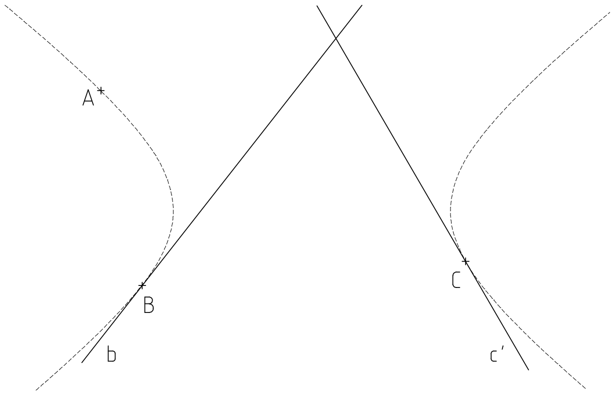
Úloha 2.1.2 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. V jednom z daných bodů sestrojte tečnu.



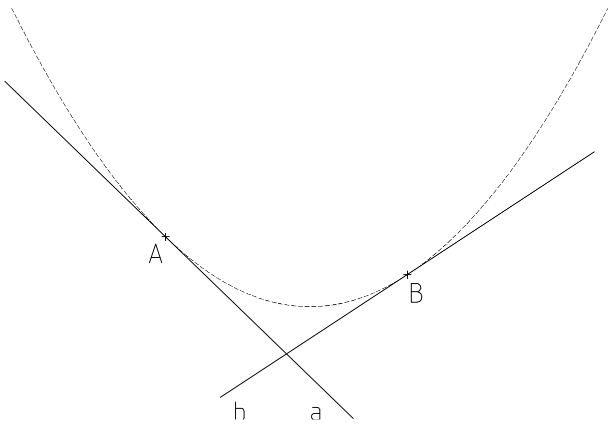
Úloha 2.1.3 Kuželosečka je dána čtyřmi vlastními body A, B, C, D a tečnou c v bodě C. Sestrojte další bod a tečnu kuželosečky.



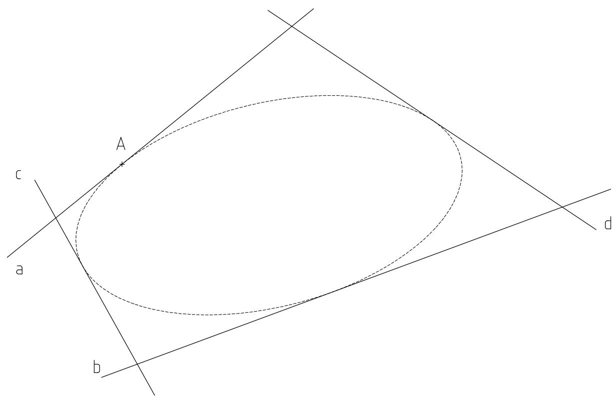
Úloha 2.1.4 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a tečnami b, c' v bodech B, C. Sestrojte její další bod.



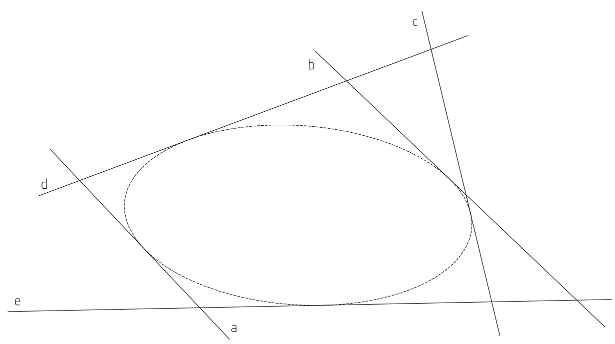
Úloha 2.1.5 Kuželosečka je dána dvěma vlastními tečnami a, b s vlastními body dotyku A, B a nevlastní tečnou c_∞. Sestrojte další tečnu kuželosečky.



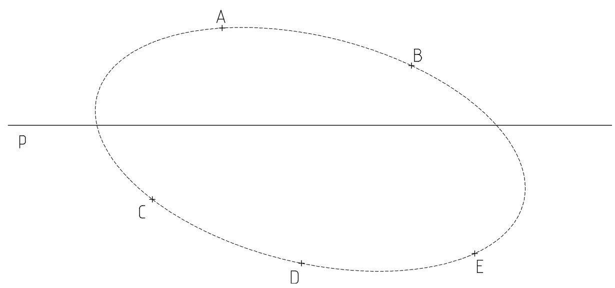
Úloha 2.1.6 Kuželosečka je určena čtyřmi vlastními tečnami a, b, c, d a bodem dotyku A na tečně a. Sestrojte další bod kuželosečky.



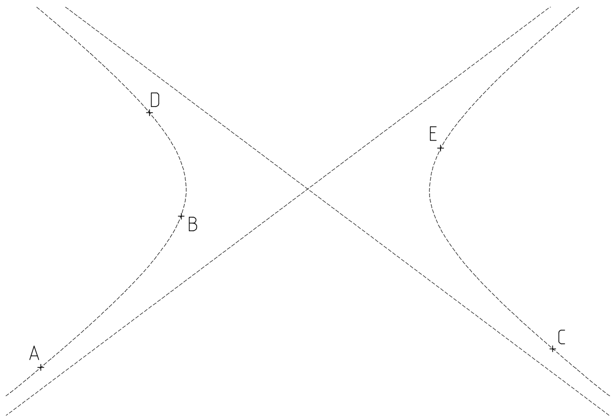
Úloha 2.1.7 Kuželosečka je dána pěti vlastními tečnami a, b, c, d, e. Sestrojte další tečnu a některý bod dotyku.



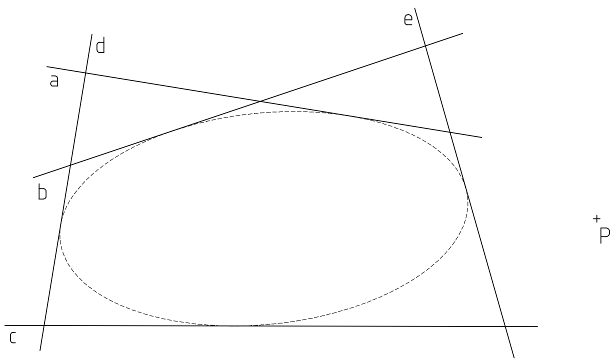
Úloha 2.1.8 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. Sestrojte průsečíky kuželosečky s danou přímkou p.



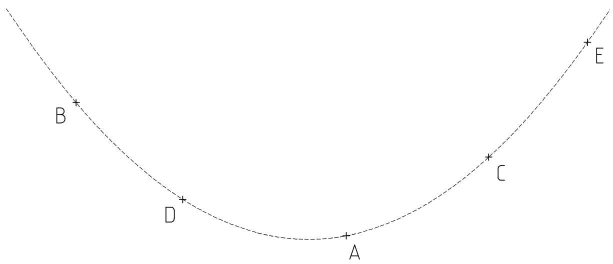
Úloha 2.1.9 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. Sestrojte průsečíky s nevlastní přímkou.



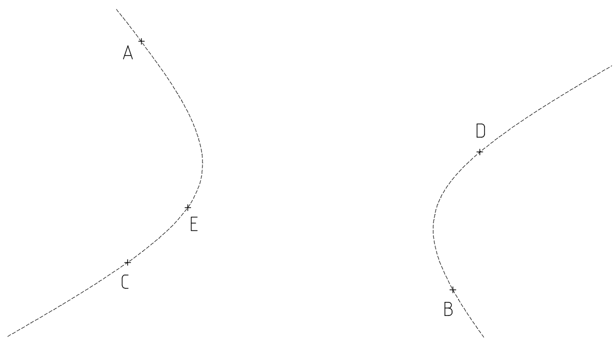
Úloha 2.1.10 Kuželosečka je dána pěti vlastními tečnami a, b, c, d, e. Sestrojte tečny kuželosečky z daného bodu P, který neleží na žádné z daných tečen.



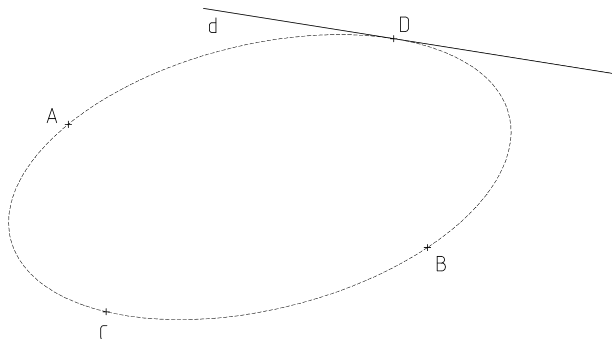
Úloha 2.2.1 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. Sestrojte další bod kuželosečky.



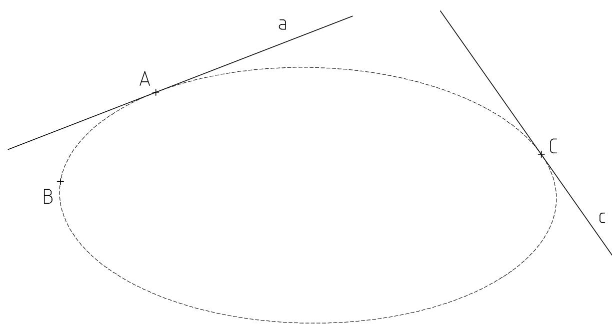
Úloha 2.2.2 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. Sestrojte tečnu kuželosečky v některém z daných bodů.



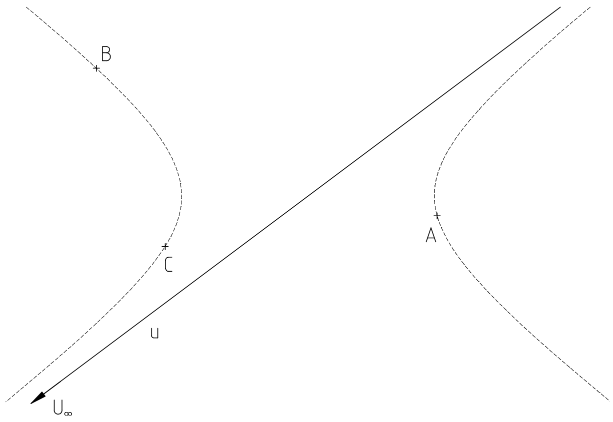
Úloha 2.2.3 Kuželosečka je dána čtyřmi vlastními body A, B, C, D a tečnou d v bodě D. Sestrojte další tečnu kuželosečky.



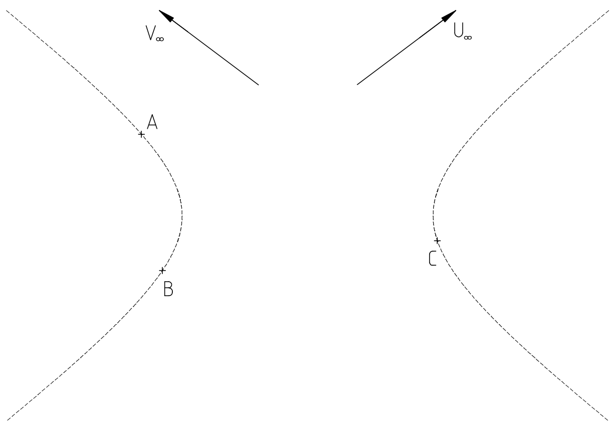
Úloha 2.2.4 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a tečnami a, c v bodech A, C. Sestrojte další bod kuželosečky.



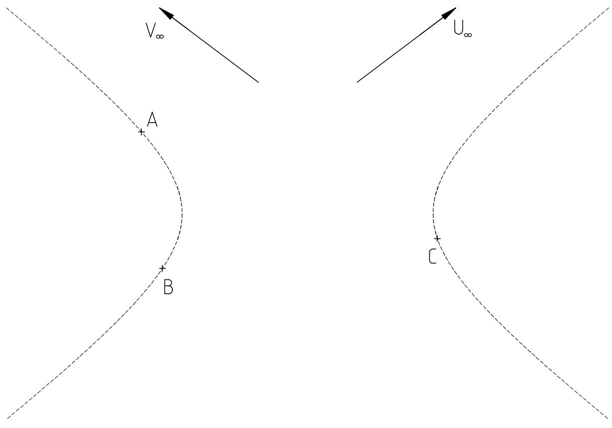
Úloha 2.2.5 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a vlastní tečnou u s nevlastním bodem dotyku U_∞. Sestrojte další tečnu kuželosečky.



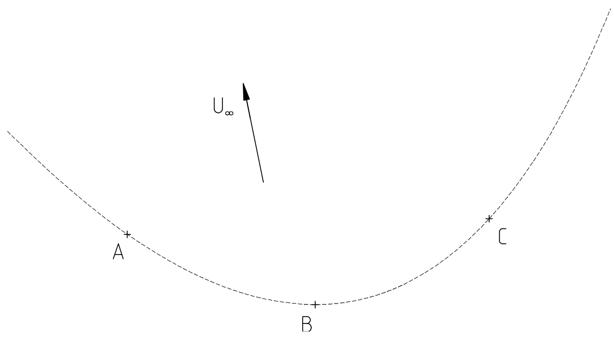
Úloha 2.2.6 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a dvěma nevlastními body U_∞, V_∞. Sestrojte další bod kuželosečky.



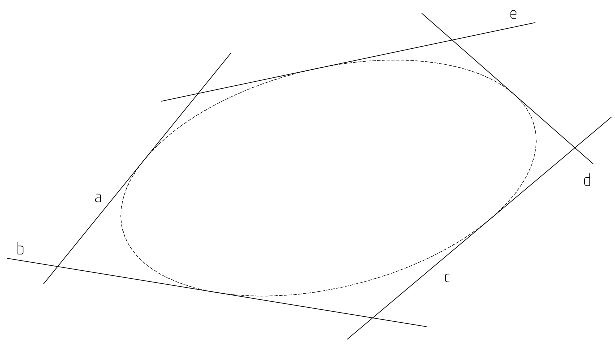
Úloha 2.2.7 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a dvěma nevlastními body U_∞, V_∞. Sestrojte tečny kuželosečky v nevlastních bodech.



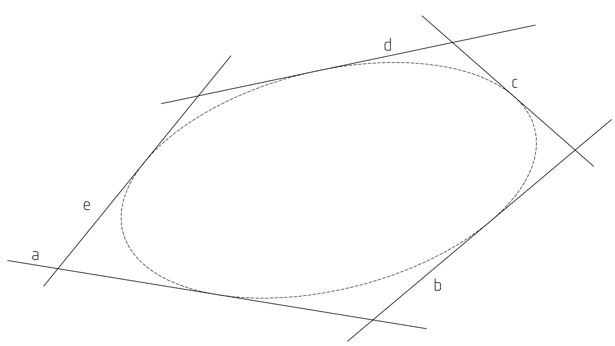
Úloha 2.2.8 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a jedním nevlastním bodem U_∞ s nevlastní tečnou. Sestrojte tečnu kuželosečky v některém z daných vlastních bodů.



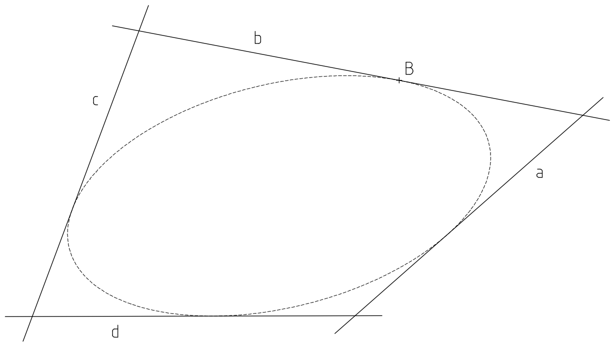
Úloha 2.3.1 Kuželosečka je dána pěti vlastními tečnami a, b, c, d, e. Sestrojte další tečnu kuželosečky.



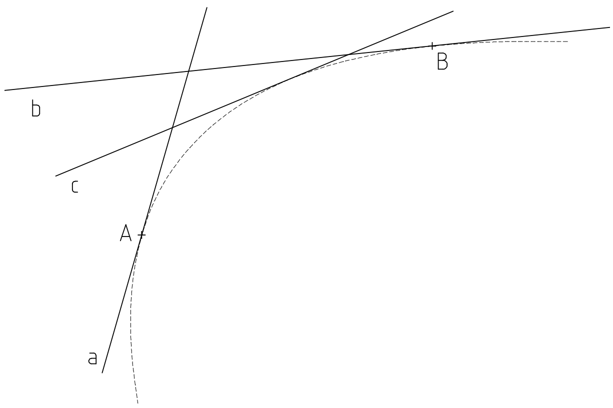
Úloha 2.3.2 Kuželosečka je dána pěti vlastními tečnami a, b, c, d, e. Sestrojte bod dotyku na jedné z nich.



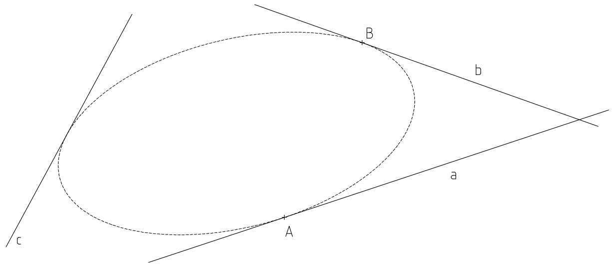
Úloha 2.3.3 Kuželosečka je dána čtyřmi vlastními tečnami a, b, c, d a bodem dotyku B na tečně b. Sestrojte další bod dotyku.



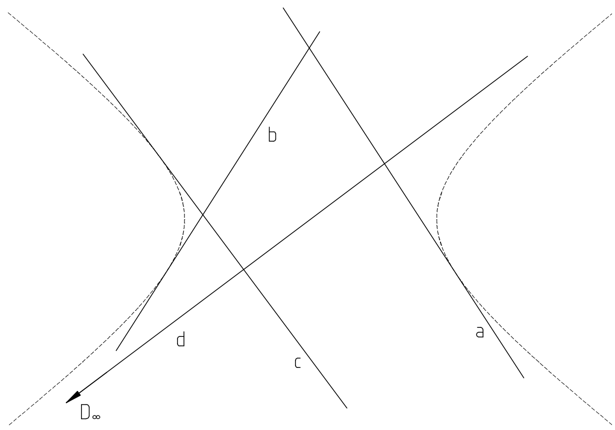
Úloha 2.3.4 Kuželosečka je dána třemi vlastními tečnami a, b, c a body dotyku A, B na tečnách a, b. Sestrojte zbývající bod dotyku.



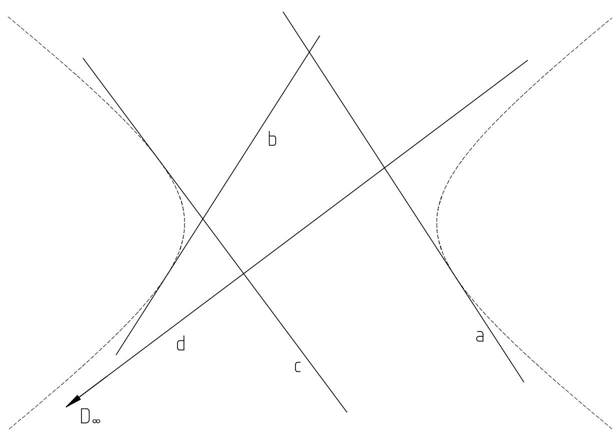
Úloha 2.3.5 Kuželosečka je dána třemi vlastními tečnami a, b, c a body dotyku A, B na tečnách a, b. Sestrojte další tečnu.



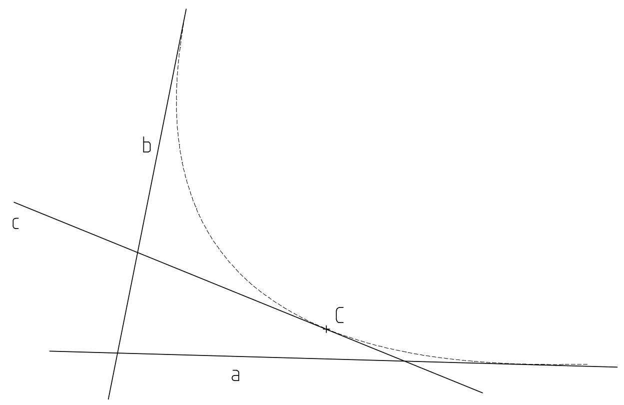
Úloha 2.3.6 Kuželosečka je dána čtyřmi vlastními tečnami a, b, c, d a nevlastním bodem dotyku D_∞ na tečně d. Sestrojte další tečnu kuželosečky.



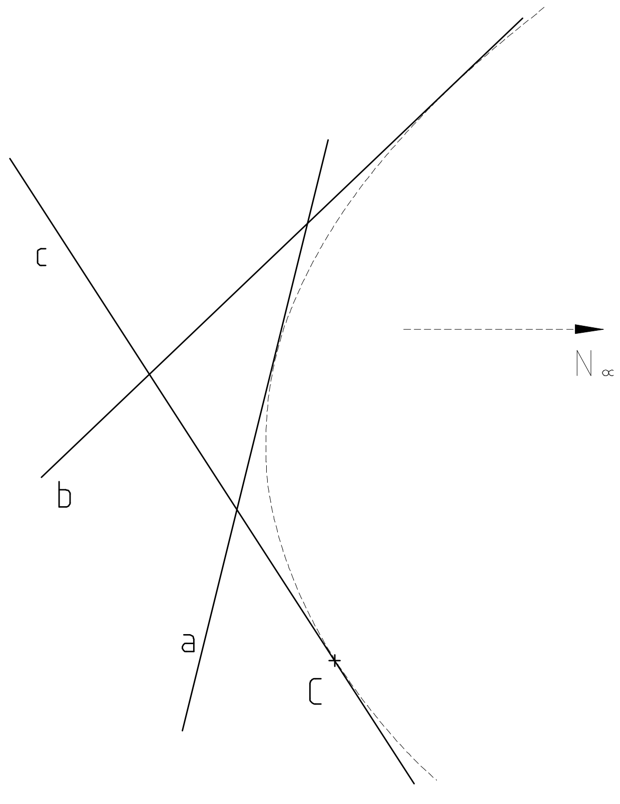
Úloha 2.3.7 Kuželosečka je dána čtyřmi vlastními tečnami a, b, c, d a nevlastním bodem dotyku D_∞ na tečně d. Sestrojte další bod kuželosečky.



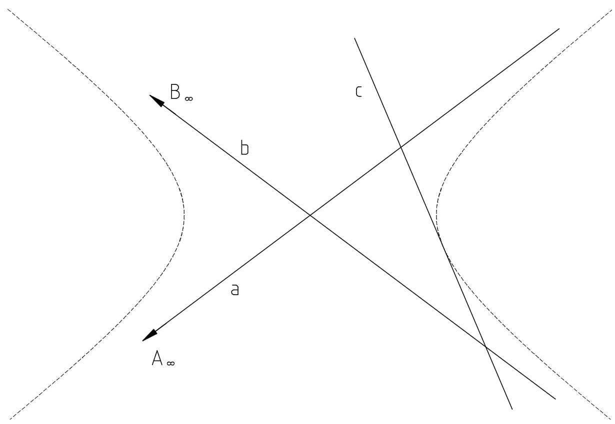
Úloha 2.3.8 Kuželosečka je dána třemi vlastními tečnami a, b, c, nevlastní tečnou n_∞ a bodem dotyku C na tečně c. Sestrojte další tečnu kuželosečky.



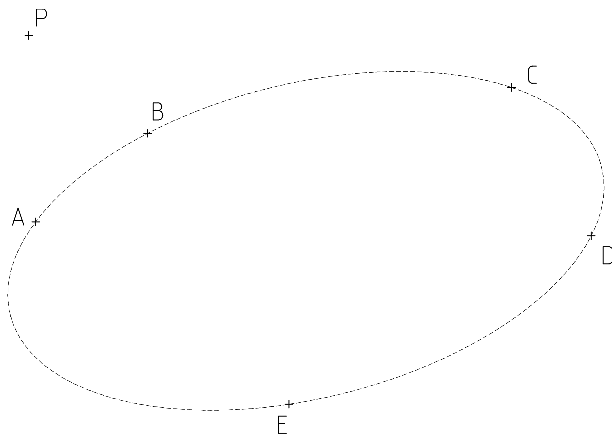
Úloha 2.3.9 Kuželosečka je dána třemi vlastními tečnami a, b, c a vlastním bodem dotyku C na tečně c. Sestrojte bod dotyku na nevlastní přímce n_∞.



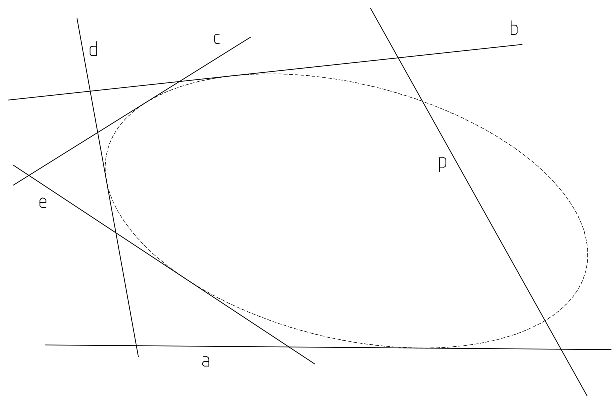
Úloha 2.3.10 Kuželosečka je dána třemi vlastními tečnami a, b, c a dvěma nevlastními body dotyku A_∞, B_∞ na tečnách a, b. Sestrojte bod dotyku C tečny c.



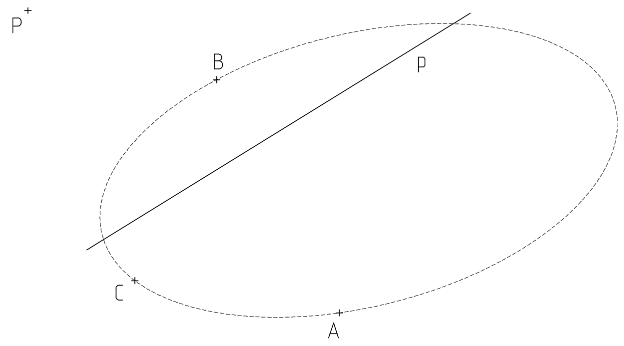
Úloha 2.5.1 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. K danému bodu P sestrojte jeho poláru p.



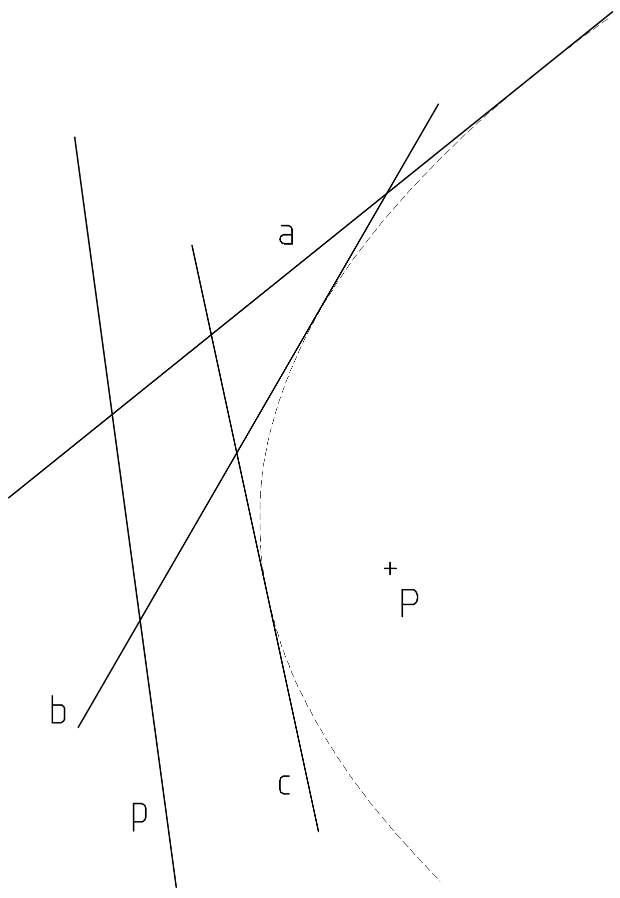
Úloha 2.5.2 Kuželosečka je dána pěti vlastními tečnami a, b, c, d, e. K dané přímce p sestrojte její pól P.



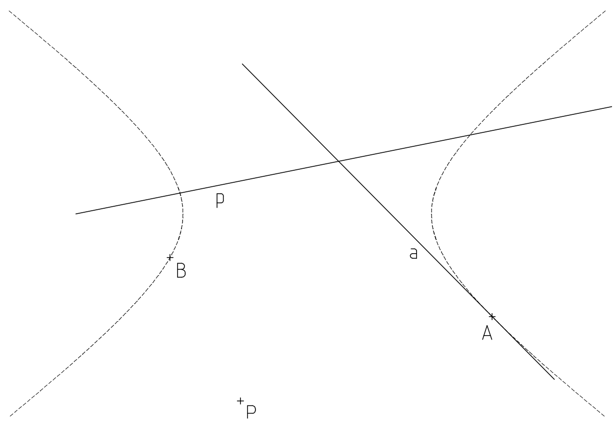
Úloha 2.5.3 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a pólem P s polárou p. Sestrojte další body kuželosečky.



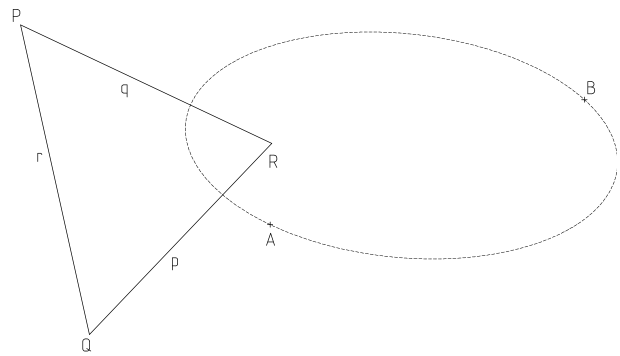
Úloha 2.5.4 Kuželosečka je dána třemi vlastními tečnami a, b, c a pólem P s polárou p. Sestrojte další tečnu kuželosečky.



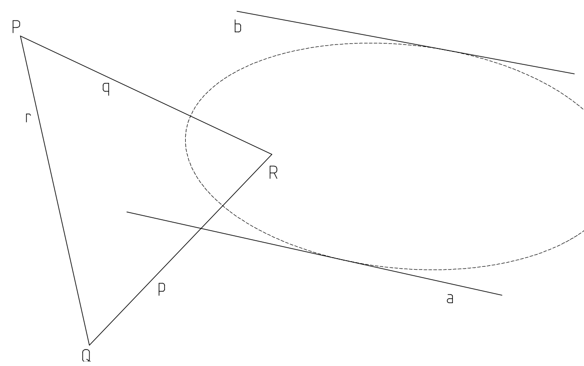
Úloha 2.5.5 Kuželosečka je dána dvěma vlastními body A, B, tečnou a v bodě A a pólem P s polárou p. Sestrojte další bod a tečnu.



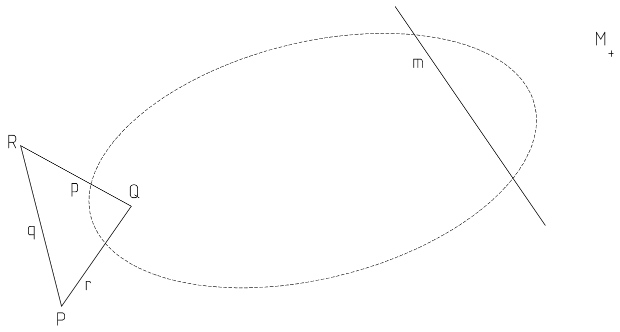
Úloha 2.5.6 Kuželosečka je dána dvěma body A, B a polárním trojúhelníkem PQR. Sestrojte další body kuželosečky.



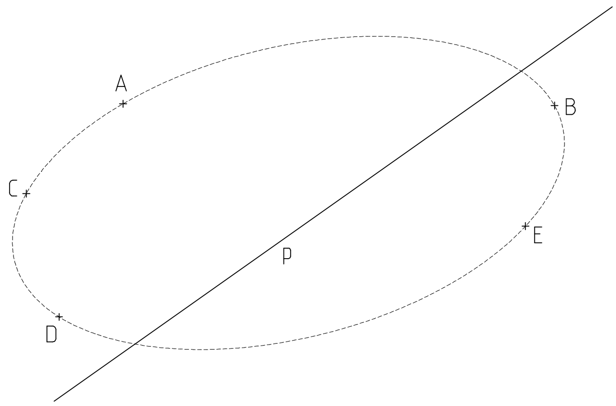
Úloha 2.5.7 Kuželosečka je dána dvěma tečnami a, b a polárním trojúhelníkem PQR. Sestrojte další tečnu kuželosečky.



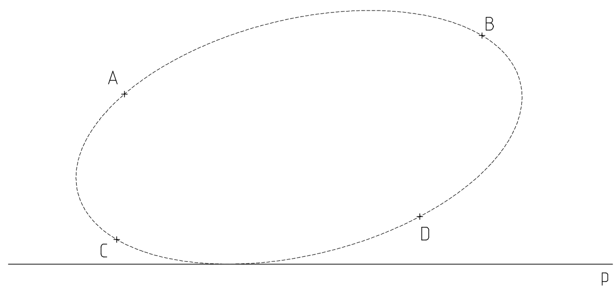
Úloha 2.5.8 Kuželosečka je dána pólem M s polárou m a polárním troj- úhelníkem PQR. Sestrojte několik bodů kuželosečky.



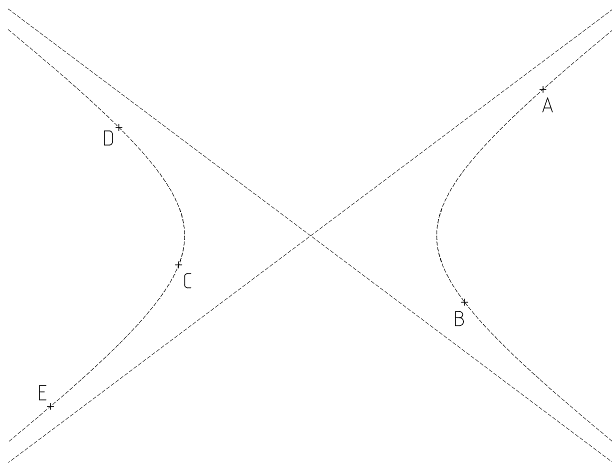
Úloha 2.5.9 Kuželosečka je dána pěti body A, B, C, D, E. Sestrojte průsečíky dané přímky p s touto kuželosečkou.



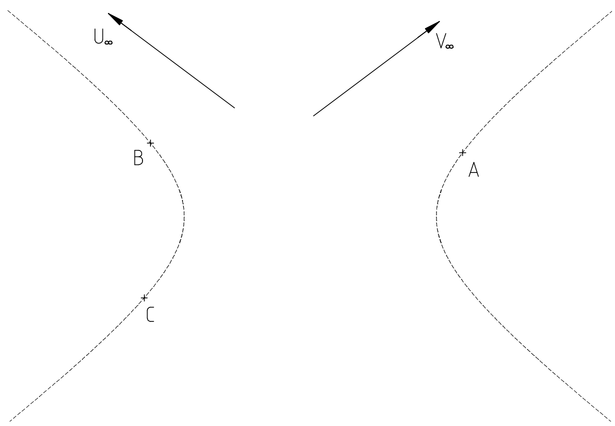
Úloha 2.6.1 Určete kuželosečky svazku $\mathcal{S}\,(A, B, C, D)$ dotýkající se dané přímky p.



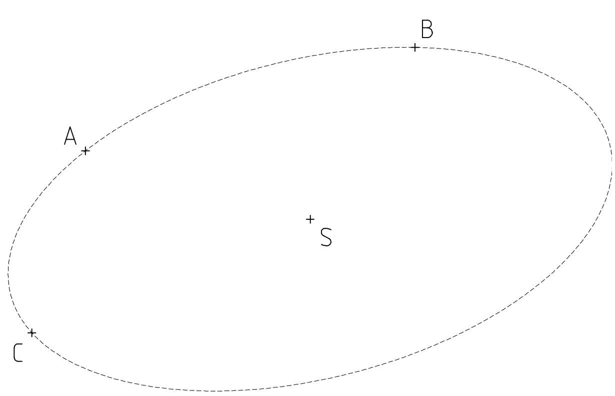
Úloha 2.7.1 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. Určete typ kuželosečky.



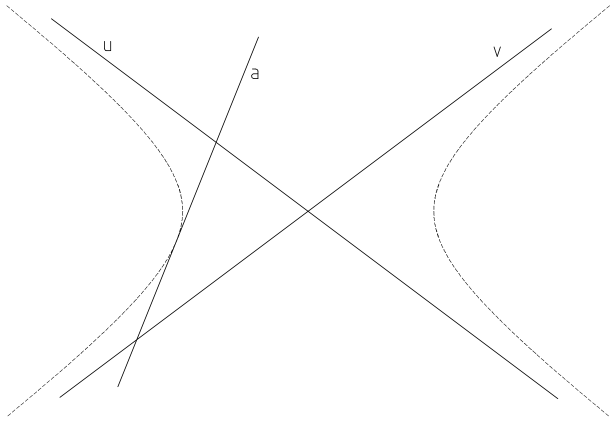
Úloha 2.7.2 Hyperbola je dána třemi vlastními body A, B, C a dvěma nevlastními body U_∞, V_∞. Sestrojte její asymptoty u, v.



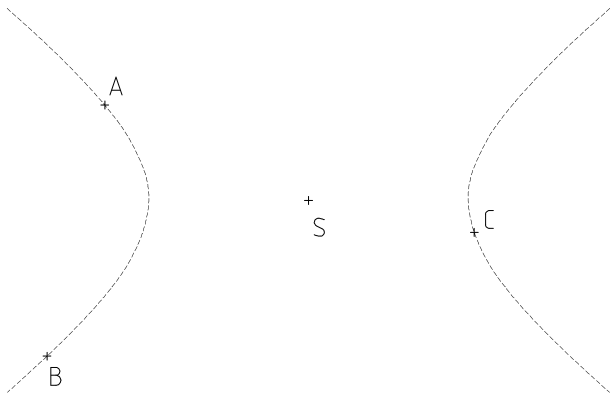
Úloha 2.7.3 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a středem S. Sestrojte další body a tečnu kuželosečky.



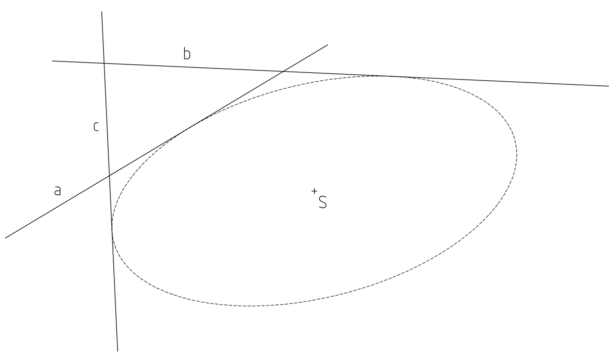
Úloha 2.7.4 Hyperbola je dána asymptotami u, v a tečnou a. Sestrojte bod dotyku A tečny a.



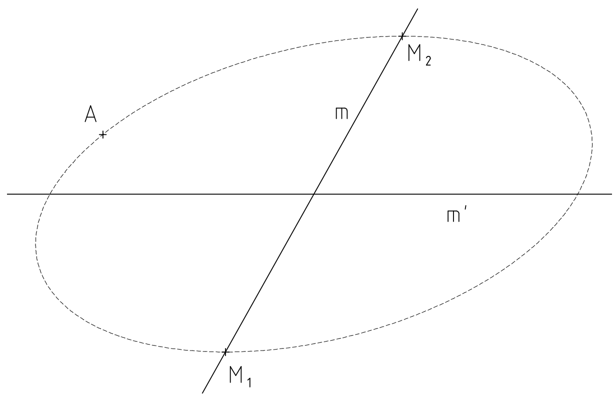
Úloha 2.7.5 Kuželosečka je dána třemi vlastními body A, B, C a středem S. Určete involuci sdružených průměrů.



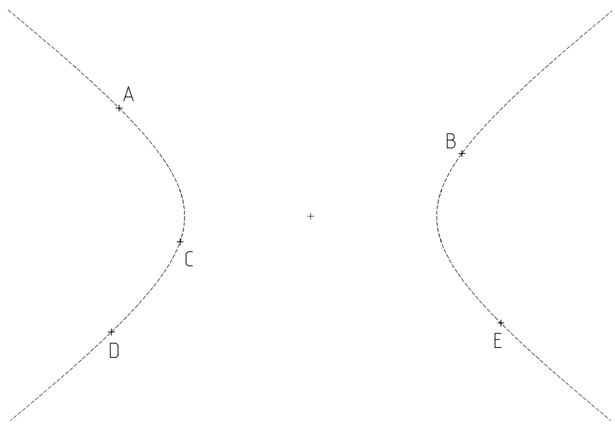
Úloha 2.7.6 Kuželosečka je dána třemi vlastními tečnami a, b, c a středem S. Určete involuci sdružených průměrů.



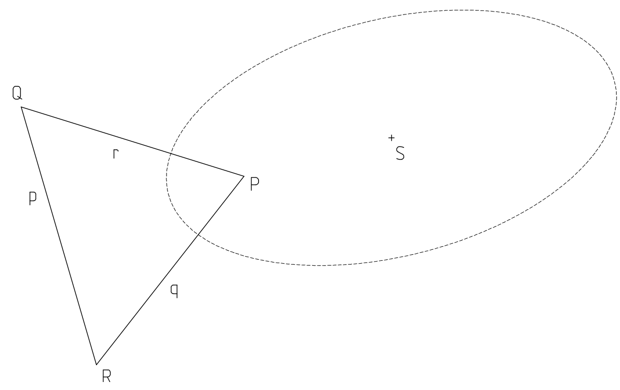
Úloha 2.7.7 Kuželosečka je dána párem sdružených průměrů m, m', krajními body M_1, M_2 průměru m a bodem A. Sestrojte krajní body průměru m'.



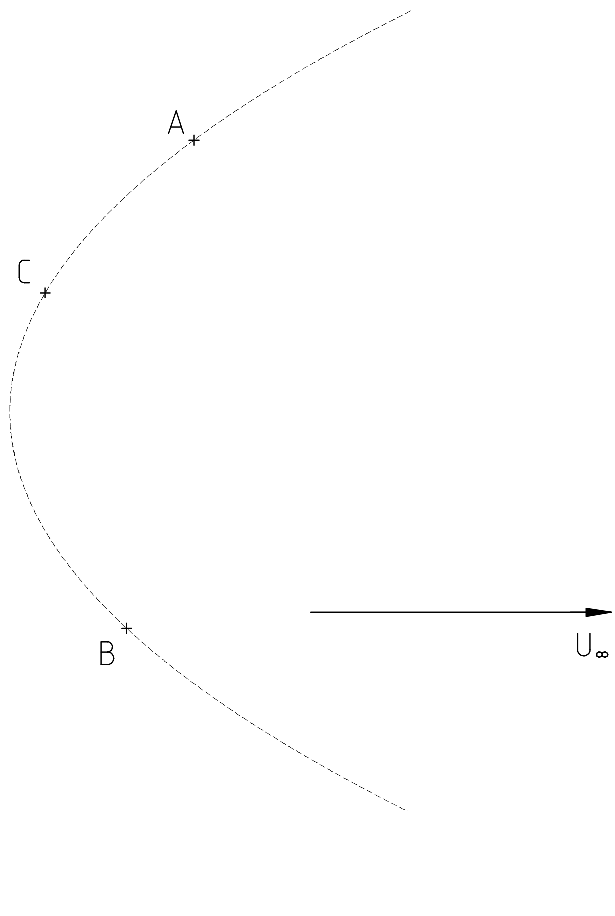
Úloha 2.7.8 Kuželosečka je dána pěti vlastními body A, B, C, D, E. Sestrojte její střed S.



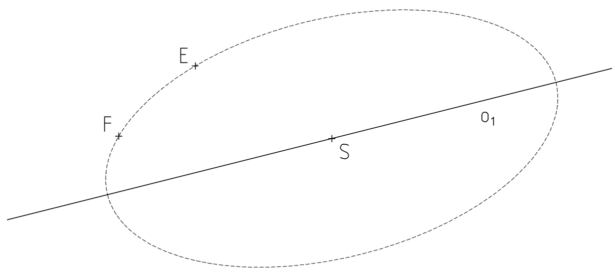
Úloha 2.7.9 Kuželosečka je dána středem S a polárním trojúhelníkem PQR. Určete involuci sdružených průměrů.



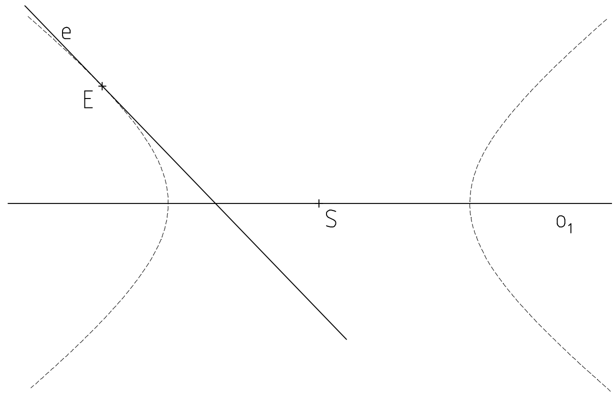
Úloha 2.7.10 Parabola je dána třemi vlastními body A, B, C a nevlastním bodem U_∞. Sestrojte osu o paraboly.



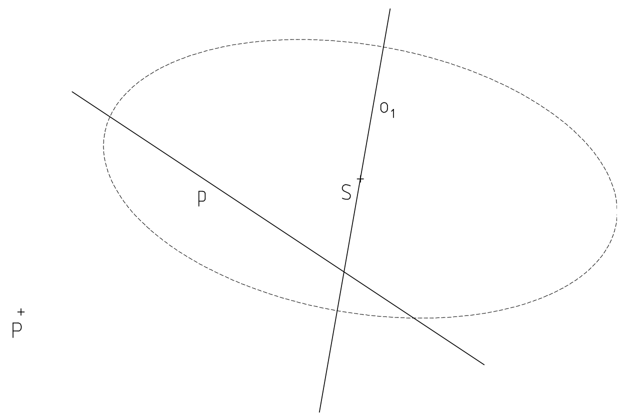
Úloha 2.7.11 Kuželosečka je dána středem S, osou o_1 a dvěma vlastními body E, F. Sestrojte všechny vrcholy kuželosečky.



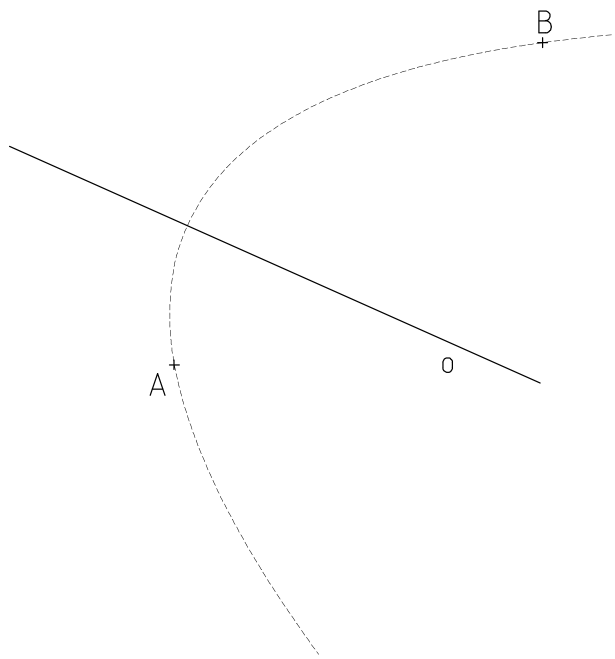
Úloha 2.7.12 Kuželosečka je dána středem S, osou o_1 a tečnou e s bodem dotyku E. Sestrojte všechny vrcholy kuželosečky.



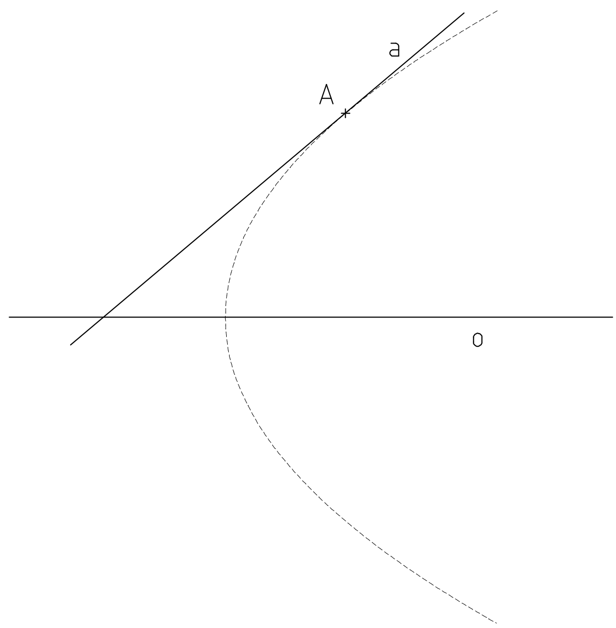
Úloha 2.7.13 Kuželosečka je dána středem S, osou o_1 a pólem P s polárou p. Sestrojte všechny vrcholy kuželosečky.



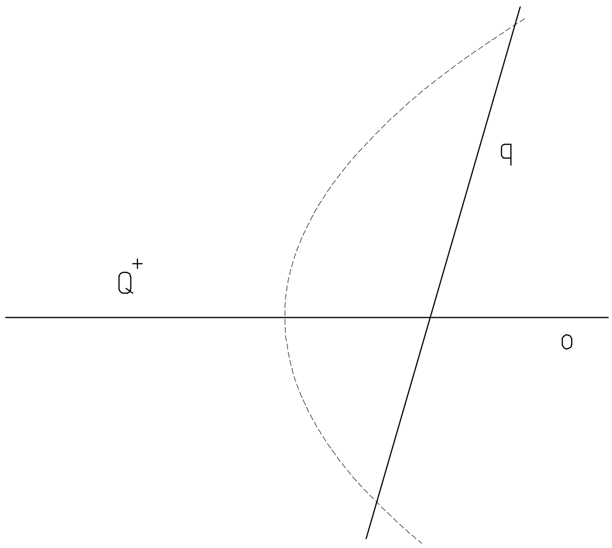
Úloha 2.7.14 Parabola je dána osou o a dvěma vlastními body A, B. Sestrojte vrchol V paraboly.



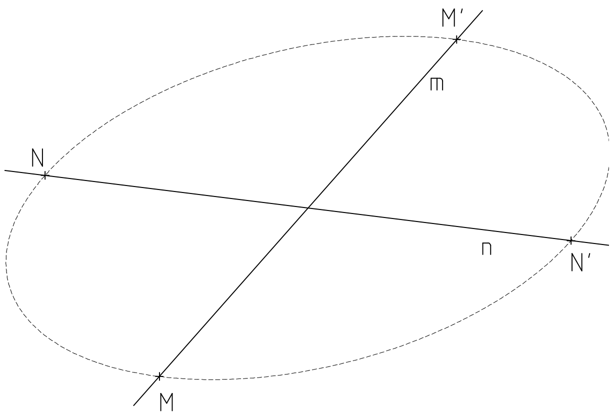
Úloha 2.7.15 Parabola je dána osou o a tečnou a s bodem dotyku A. Sestrojte vrchol V paraboly.



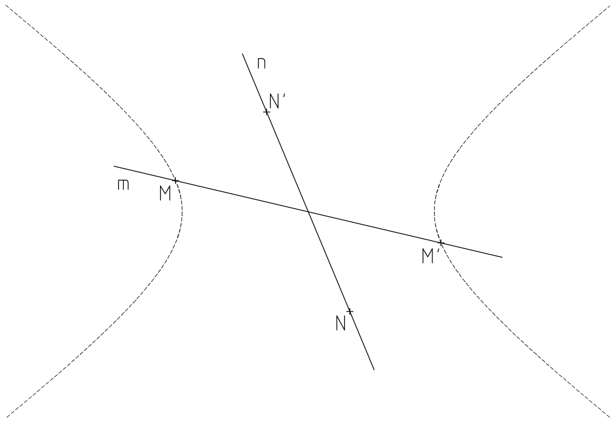
Úloha 2.7.16 Parabola je dána osou o a pólem Q s polárou q. Sestrojte vrchol V paraboly.



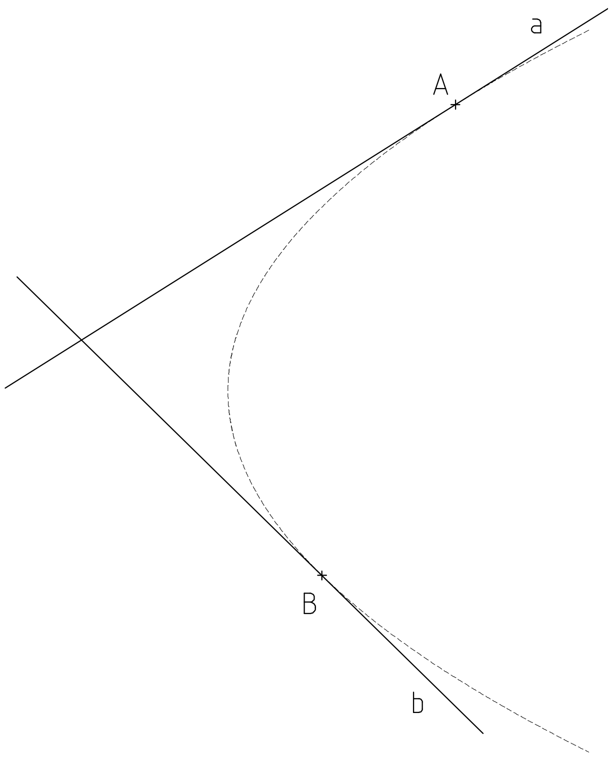
Úloha 2.7.17 Elipsa je dána sdruženými průměry m, n s krajními body M, M' a N, N'. Sestrojte osy o_1, o_2 a vrcholy A, B, C, D elipsy.



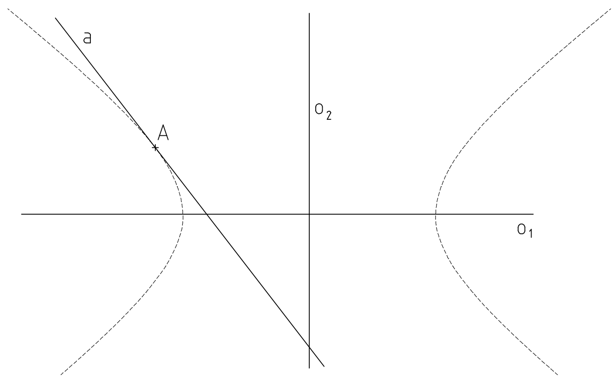
Úloha 2.7.18 Hyperbola je dána sdruženými průměry m, n s krajními body M, M', resp. náhradními krajními body N, N'. Sestrojte asymptoty u, v hyperboly.



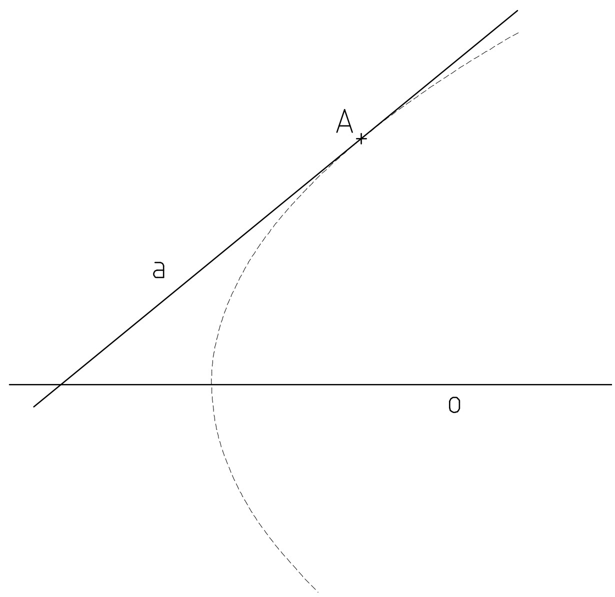
Úloha 2.7.19 Parabola je dána tečnami a, b s body dotyku A, B. Sestrojte osu o a vrchol V paraboly.



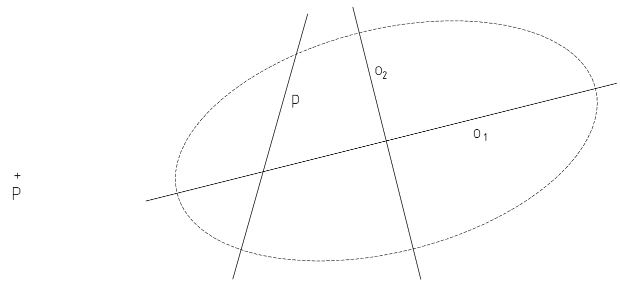
Úloha 2.7.20 Kuželosečka je dána osami o_1, o_2 a tečnou a s bodem dotyku A. Sestrojte ohniska F_1, F_2 kuželosečky.



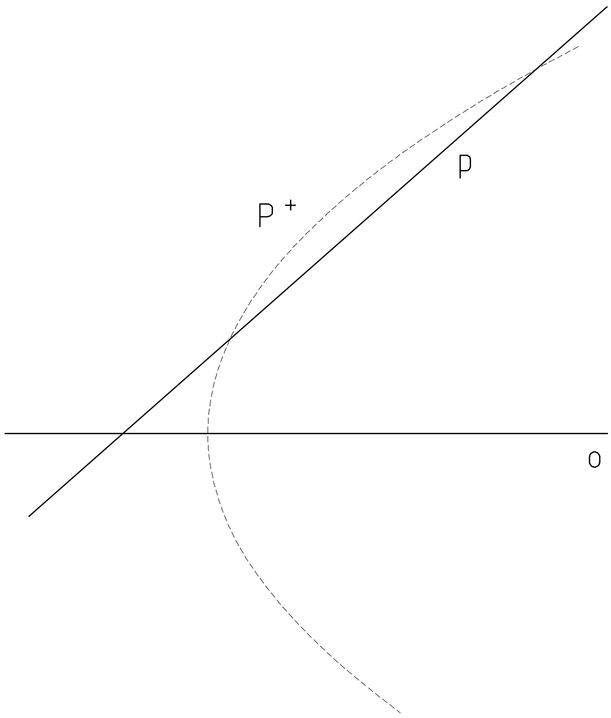
Úloha 2.7.21 Parabola je dána osou o a tečnou a s bodem dotyku A. Sestrojte ohnisko F paraboly.



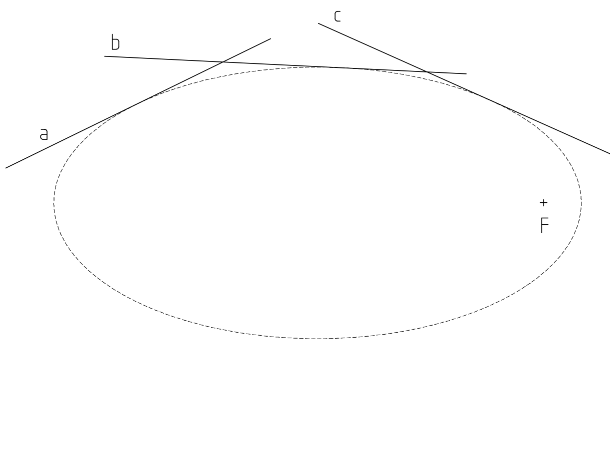
Úloha 2.7.22 Kuželosečka je dána osami o_1, o_2 a pólem P s polárou p. Sestrojte ohniska F_1, F_2 kuželosečky.



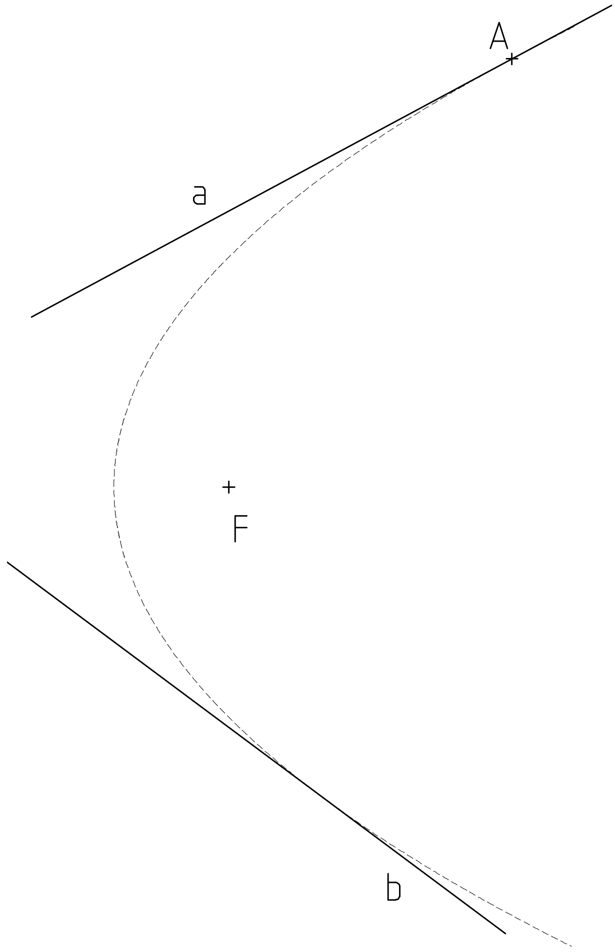
Úloha 2.7.23 Parabola je dána osou o a pólem P s polárou p. Sestrojte ohnisko F paraboly.



Úloha 2.7.24 Kuželosečka je dána třemi tečnami a, b, c a ohniskem F. Sestrojte osu o kuželosečky.



Úloha 2.7.25 Kuželosečka je dána tečnou a s bodem dotyku A, tečnou b a ohniskem F. Sestrojte osu o kuželosečky.


A
a
F
b

Literatura

[1] HAVLÍČEK, Karel. Úvod do projektivní geometrie kuželoseček, Praha 1956, SNTL

[2] KOZÁK, Petr. Řešené příklady z projektivní geometrie kuželoseček, Olomouc 2012, Diplomová práce

Mgr. Marie Chodorová, Ph.D.

Projektivní geometrie

Výkonný redaktor Prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr.
Odpovědná redaktorka Mgr. Jana Kreiselová
Technická redakce autor

Určeno pro studenty Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci

Vydala a vytiskla Univerzita Palackého v Olomouci
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc
www.upol.cz/vup
vup@upol.cz

Tato publikace neprošla redakční jazykovou úpravou.

Olomouc 2013

1. vydání

Edice – Skripta

ISBN 978-80-244-4000-2

Neprodejná publikace

VUP 2013/944