

KAG / KLTM - Logika a teória množín

1. Napíšte výrokovú formulu v KNT a DNT tvare, ktorá je ekvivalentná s formulou $((p \rightarrow q) \rightarrow s) \rightarrow ((\neg s \vee q) \rightarrow \neg(r \vee p))$.
2. Dokážte, že výrokové formule φ a ψ sú ekvivalentné, práve vtedy keď pre každé pravdivostné ohodnotenie v platí $v(\varphi) = v(\psi)$.
Pozn. Pracujte s definíciou ekvivalentnosti formúl ako je uvedená v knihe:
V. Švejdar: *Logika, neúplnosť, сложность a nutnosť* (Definície 1.1.6, strana 16).
3. Rozhodnite, či výrok $(\beta \vee \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$ je dokázateľný z množiny výrokových formúl $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \neg\beta\}$.
4. Nech výroková formula $\varphi \rightarrow \psi$ je tautológia. Ukážte, že $(\varphi \vee \psi) \equiv \psi$ je tiež tautológiou.
5. Nech P, Q sú unárne predikáty. Nájdite interpretáciu $\mathcal{M}$ jazyka $L = \{P, Q\}$ spĺňajúcu:
 - a) $\mathcal{M} \models (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$,
 - b) $\mathcal{M} \models \forall x (P(x) \rightarrow \forall x P(x))$,
 - c) $\mathcal{M} \models \forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow \neg \forall x P(x)$,
 - d) $\mathcal{M} \models \exists x P(x) \rightarrow \forall x \neg Q(x)$.
6. Pre každú z troch štruktúr $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$ a $(\mathbb{Q}, <)$ nájdite uzavretú formulu v jazyku $L = \{<\}$, ktorá v nej platí a v ostatných dvoch neplatí.
Pozn. Symboly $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ označujú množiny prirodzených, celých a racionálnych čísel. Predikát $<$ na každej z týchto množín označuje „klasické“ ostré usporiadanie.
7. Pre každú z troch štruktúr $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ a $(\mathbb{Q}, \leq)$ nájdite uzavretú formulu v jazyku $L = \{\leq\}$, ktorá v nej platí a v ostatných dvoch neplatí. Svoje tvrdenie odôvodnite, t.j. dokážte, že daná formula platí, resp. neplatí v uvažovanej štruktúre.
8. Definujte $T \models \varphi$, t.j. kedy výroková formula φ je (tautologickým) dôsledkom množiny formúl T . Dokážte, že $T \models \psi \rightarrow \varphi$ implikuje $T \cup \{\psi\} \models \varphi$.
9. Nech $L = \{f, \oplus, h, \geq\}$ je jazyk (bez rovnosti), pričom f je unárny, $\oplus$ binárny, h ternárny funkčný symbol a $\geq$ označuje binárny predikát. Uveďte príklady:

- a) termu, ktorý obsahuje všetky funkčné symboly jazyka L .
 - b) atomickej formule jazyka L , ktorá obsahuje apoň päť premenných.
 - c) formule jazyka L ktorá obsahuje tri viazané a jednu voľnú premennú.
10. Zdôvodnite, že štruktúry $(\mathbb{Z}, +)$ a $(\mathbb{Q}, +)$ je možné rozlíšiť pomocou platnosti uzavretej formule v jazyku $L = \{+, =\}$.
11. Napíšte definíciu zobrazenia. Rozhodnite, ktoré z uvedených relácií sú zobrazenia. Svoje tvrdenie odôvodnite.
- a) $\{[x, y] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : x = y \vee x = -y\}$,
 - b) $\{[x, A] \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : (\forall y)(y \in A \equiv y \text{ delí } x)\}$,
 - c) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$,
 - d) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^3\}$
12. Nech f, g sú zobrazenia. Ukážte, že
- a) $f \cap g, f \setminus g$ sú zobrazenia.
 - b) $f \cup g$ je zobrazenie vtedy a len vtedy, ak
- $$f \mid \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) = g \mid \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g).$$
- Pozn. Symbol $f \mid A$ označuje zúženie zobrazenia f na množinu A .
13. Nech f je zobrazenie neprázdnej množiny A do množiny B . Dokážte, že podmienky i) a ii) sú ekvivalentné.
- i) pre ľubovoľnú množinu C a pre ľubovoľné zobrazenia $g, h: C \rightarrow A$ také, že $g \circ f = h \circ f$, platí $g = h$.
 - ii) existuje zobrazenie $k: B \rightarrow A$ také, že $f \circ k = \text{id}_A$.
14. Nech f je zobrazenie neprázdnej množiny A do množiny B . Dokážte, že podmienky i) a ii) sú ekvivalentné.
- i) pre ľubovoľnú množinu C a pre ľubovoľné zobrazenia $g, h: B \rightarrow C$ také, že $f \circ g = f \circ h$, platí $g = h$.
 - ii) f je surjektívne.
15. Dokážte, alebo nájdite kontrapríklad.
- a) $(A \times B) \cup (C \times D) \supseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.
 - b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
 - c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

$$\text{d) } A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i).$$

$$\text{e) } (A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

$$\text{f) } (A \cup (B \cap A)) \setminus C = (B \setminus C) \cup (A \setminus C).$$

16. Definujte antisymetrickú reláciu na množine a dokážte, že $R \subseteq A \times A$ je antisymetrická práve vtedy, keď $R \cap R^{-1} \subseteq \text{id}_A$.
17. Nájdite rozklad množiny $\mathbb{N}$ na nekonečne veľa nekonečných množín.
18. Nájdite prosté zobrazenie z množiny ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ (t.j. z množiny všetkých postupností prirodzených čísel) na množinu všetkých neklesajúcich postupností prirodzených čísel. Dokážte, že nájdene zobrazenie má požadované vlastnosti.
19. Nech $\mathbf{A}$ je množina otvorených intervalov v $\mathbb{R}$ taká, že pre $I_1, I_2 \in \mathbf{A}$, $I_1 \neq I_2$ platí $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Ukážte, že $\mathbf{A}$ je spočítateľná.
20. Dokážte, že pre ľubovoľnú mohutnosť $\alpha \geq 2$ platí

$$2^\alpha \leq \alpha^\alpha \leq 2^{\alpha \cdot \alpha}.$$

21. Rozhodnite, či platí nasledujúce tvrdenie (svoje tvrdenie zdôvodnite).
Pre ľubovoľné množiny A, B platí $|A| < |B|$ práve vtedy, keď existuje bijekcia medzi množinou A a nejakou vlastnou podmnožinou množiny B .
22. Uvedte príklad bijekcie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (dokážte, že vami popísané zobrazenie je bijekciou) a použitím tejto funkcie dokážte $|\mathbb{N}^3| = |\mathbb{N}^5|$.
23. Dokážte, že ak A je množina spĺňajúca $|A| \geq \aleph_0$, tak existuje spočítateľný rozklad množiny $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ taký, že pre každú dvojicu rôznych indexov $i \neq j$ platí, $A_i \cap A_j = \emptyset$ a $|A_i| \neq |A_j|$.
24. Dokážte, že relácia $<$ medzi mohutnosťami množín je tranzitívna.