Analytická GEOMETRIE

Marek Jukl

ANALYTICKÁ GEOMETRIE

Marek JUKL

Olomouc, 2014

Oponenti: doc. RNDr. Petr Emanovský, Ph.D.
Mgr. Irena Hinterleitner, Ph.D.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

CZ.1.07/2.2.00/18.0013

1. vydání

ISBN 978-80-244-3963-1

Obsah

Úvod

Ke geometrii není zvláštní cesty pro krále.[1]

Na danou geometrii lze pohlížet z hlediska syntetického nebo analytického. Tato učebnice je věnována pohledu druhému, tedy geometrii analytické, a to afinní a euklidovské. Lze-li historii geometrie, jako vědecké discipliny, počítat již na tisíciletí, jeví se analytická geometrie relativně mladá, neboť základy této významné matematické discipliny položil R. Descartes ve století XVII. Soudobé pojetí analytické geometrie, předložené v této učebnici, využívající ve Weylově duchu výsledky teorie vektorových prostorů, je samozřejmě mnohem mladší.

Cílem učebnice je seznámit čtenáře se základy analytické geometrie lineárních a kvadratických útvarů v rozsahu a formou obvyklou zejména pro budoucí středoškolské učitele; poslouží však i jiným zájemcům o základy analytické geometrie z řad vysokoškolských studentů.

Analytická geometrie, jak jsme se již zmínili, široce využívá aparát lineární algebry (je ostatně její přirozenou aplikací), u čtenáře se proto předpokládá znalost základů lineární algebry v rozsahu obvyklém alespoň prvnímu semestru kurzu lineární algebry (tj. znalost teorie vektorových prostorů a algebry matic; tyto znalosti lze získat např. v [4, 10, 13]). Výklad je navíc přiměřeně doplněn i tím algebraickým aparátem, který nebývá obvyklou součástí úvodního kurzu lineární algebry, ať již v poznámkovém aparátu či samostatně (zejména tím jsou míněny bilineární a kvadratické formy).

Učebnice je rozdělena do pěti kapitol.

První dvojice je věnována analytické geometrii lineárních útvarů. Konkrétně v první kapitole zavádí se axiomaticky afinní prostor a následují standardní témata – zavedení soustavy souřadnic, vymezení pojmu podprostor a způsoby jeho určení, zkoumání polohových vztahů mezi podprostory, pak je řazeno zavedení orientace a zkoumání poloprostorů (zvláště je zkoumána afinní přímka). Kapitola dále zahrnuje vybudování pojmu lineární kombinace bodů a studium pojmů na něm založených, jako jsou geometrické souřadnice či simplex. Závěr této kapitoly náleží zavedení afinního zobrazení; to je však studováno jen letmo, toliko z důvodů existence vazby mezi geometrií a grupou jistých zobrazení.

Druhá kapitola se věnuje prostorům euklidovským a obsahuje témata rovněž standardní, kterými je zavedení metriky a studium metrických vztahů (kolmé průměty, vzdálenosti a od-

[1] odpověď Euklida vládci Egypta Ptolemaiovi I. na otázku, zda existuje snažší cesta k poznání geometrie, než studium *Základů*.

chylky podprostorů a objemy). I zde závěr patří studiu zobrazení spojených s euklidovskými prostory, tj. zobrazení shodných.

Teorii afinních a shodných zobrazení jsou podrobněji věnovány samostatné přednášky ve vyšších semestrech kurzu analytické geometrie.

Kapitola třetí, věnovaná především kvadratickým formám, má jen přípravný ráz k vybudování aparátu nutného pro studium kuželoseček a kvadrik. Tomu je také přizpůsoben výběr a šíře poznatků.

Další dvojice kapitol, kapitoly 4 a 5, se věnuje útvarům kvadratickým – kuželosečkám v euklidovské rovině a kvadrikám v třírozměrném euklidovském prostoru. Zvolený prostor vědomě není z hlediska efektivnosti výkladu tím nejvhodnějším (tím by byl komplexní prostor projektivní), avšak vycházíme z premisy, že budoucí učitel bude vyučovat analytickou geometrii právě v euklidovské rovině či třírozměrném prostoru, a je tudíž nutné, aby se s určitými „úskalími“ vyplývajícími z této volby – tj. absencí imaginárních i nevlastních elementů – seznámil. S rozšiřováním afinních a euklidovských prostorů se čtenář může seznámit ve vyšších semestrech či využít vhodnou literaturu (např. [4, 12, 15]).

Obě kapitoly jsou koncipovány analogicky. Obsahují vymezení pojmu kuželosečka, resp. kvadrika, a definici jednotlivých jejích případů; ta však není založena na metrických vlastnostech, ale na tvarech kanonických rovnic. Zvláštní pozornost věnujeme otázce jednoznačnosti rovnic a matic kuželoseček, resp. kvadrik, neboť ta vytváří základ pro studium jejich geometrických vlastností (invariantů). Standardními tématy jsou pak afinní a metrická klasifikace, studium tečných elementů a pojmy založené na sdruženosti směrů vzhledem ke kuželosečce, resp. kvadrice.

Vzhledem k významu analytické geometrie v dalších matematických disciplínách, přírodních a technických vědách či praxi, zaujímá i důležité místo ve školské matematice, a proto se výklad zaměřuje nejen na exaktní zvládnutí shora zmíněné problematiky, ale důsledně sleduje motivaci zaváděných a zkoumaných pojmů prostřednictvím „historického úkolu geometrie“, kterým po tisíciletí, od dob Euklidových, byla matematizace okolního „fyzikálního“ prostoru (viz ostatně kapitola 1.1.1). Zvládnutí kroku od intuitivní představy k exaktnímu matematickému popisu je pro neformální osvojení si analytické geometrie – stejně jako kterékoli matematické discipliny – důležité, zcela nezbytné je však pro budoucího učitele, který musí být schopen v myslích žáků vytvořit fungující spojení mezi formálními objekty (formulemi) a jimi popisovanými útvary. I proto obsahuje text otázky a výzvy směřované na čtenáře.

V učebnici jsou řazeny i vzorové příklady, mají však jen význam ilustrativní. Pro získání výpočetní praxe by měl čtenář využít řady sbírek úloh z analytické geometrie (např. [11]).

Závěrem chci poděkovat oběma recenzentům - doc. RNDr. Petru Emanovskému, Ph.D., a Mgr. Ireně Hinterleitner, Ph.D., za jejich rady a připomínky, které přispěly ke zkvalitnění učebního textu. Poděkovat chci i své ženě, za vytvoření obrazového doprovodu.

Autor

Kapitola 1

Afinní geometrie

1.1 Afinní prostor a jeho základní vlastnosti

Tato kapitola je věnována vybudování pojmu *afinní prostor* a zkoumání vlastností jeho a jeho jistých podmnožin *(prostorových útvarů)* různého druhu. Jak jsme již zmínili v úvodu, budeme zde zkoumat toliko vlastnosti *polohové* - tedy bez použití pojmů *vzdálenost* a *úhel*, které pro určité afinní prostory zavedeme v další kapitole.

Písmenem $\mathbf{V}$ (příp.$\mathbf{V}_n$) budeme označovat n-rozměrný vektorový prostor nad komutativním tělesem T, nebude-li uvedeno jinak. Nulový prvek tělesa T budeme značit 0, jednotkový 1.

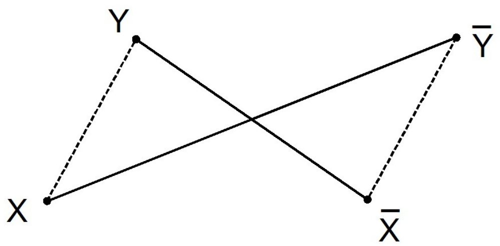
1.1.1 Motivace k volbě axiomů afinního prostoru

Předmětem našeho zájmu je *axiomatická teorie afinních* (kapitola 1) a posléze *euklidovských prostorů* (kapitola 2)[1]. Účelem jejího vybudování byla původně snaha o matematický popis

[1] Velmi stručně připomeňme, že *axiomatická teorie* vychází z množiny *základních pojmů*, množiny *výchozích tvrzení* o těchto pojmech (*axiomů*) a zahrnuje množinu *druhotných pojmů* (tj. pojmů, definovaných pomocí základních) a množinu všech *tvrzení logicky vyplývajících* z axiomů (*věty* této teorie).
Jsou-li axiomy navzájem logicky bezesporné, je tomu tak i pro *všechny* věty dané teorie (teorie tedy neobsahuje současně žádný výrok, s nímž by obsahovala i jeho negaci). Bezespornost soustavy axiomů je nejdůležitějším požadavkem na axiomatickou teorii kladeným (dalšími požadavky se zde zabývat nebudeme).
Vezmeme-li za základní pojmy *jakoukoli* množinu objektů, pro něž jsou všechna tvrzení axiomů splněna, dostáváme tzv. *interpretaci (model)* dané axiomatické teorie – získáváme tak jistou konkrétní teorii, a to pro nejrůznější vědní discipliny - od *matematických teorií* (čtenář jistě zná např. axiomatickou teorii grup – za prvky grup je zvyklý uvažovat nejrůznější objekty, které však vždy musí vyhovět axiomům (definičním podmínkám) grupy) až *teorie popisující konkrétní jevy hmotného světa* (přesnost tohoto popisu je dána *pouze* přesností, s níž bylo zjištěno splnění oněch základních tvrzení objekty „dosazenými“ za základní pojmy – viz. např. fyzikální teorie).
Jedna a táž axiomatická teorie tak může představovat východisko pro velkou řadu konkrétních teorií (získaných jako její interpretace), což je významným přínosem axiomatizace vůbec.
Primární motivací k axiomatizaci (nejen geometrie, ale i dalších matematických disciplin) je snaha o *exaktnost* popisu a odstranění tzv. *paradoxů* vlastním teoriím intuitivním.

okolního – „fyzikálního“ – prostoru, o kterém máme určitou intuitivní představu vycházející ze zkušenosti, představu, na níž je založena výuka geometrie na škole základní a střední. Chceme tedy, aby jednou z interpretací této axiomatické teorie byl prostor blízký fyzikálnímu[2], čehož dosáhneme vhodnou volbou axiomů.

Vyjděme nyní z naší dosavadní *intuitivní představy o fyzikálním prostoru* (bodech, přímkách, rovinách) a jeho vlastnostech známých z učiva střední školy.
Množinu bodů označme A, jednotlivé body značme (jak jsme zvyklí) velkými písmeny – $X, Y, \ldots$.
Zaveďme nyní pojem *vektor*. Uvažujme nejprve množinu všech uspořádaných dvojic bodů. Řekneme, že dvě uspořádané dvojice bodů (X, Y) a $(\bar{X}, \bar{Y})$ jsou *ekvipolentní*, jestliže střed dvojice bodů $X, \bar{Y}$ je týž, jako střed dvojice $Y, \bar{X}$.



Obr. 1.1.1

Vektorem určeným uspořádanou dvojicí bodů X, Y pak rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic bodů s ní ekvipolentních. Každá konkrétní uspořádaná dvojice určující daný vektor se nazývá *umístění (reprezentant)* vektoru. Množinu takto získaných vektorů označme V, jednotlivé vektory značme malými tučnými písmeny - $\mathbf{x}, \mathbf{y} \ldots$.[3]

Přirozeným způsobem jsme tak dospěli k zobrazení[4]

$$f : A \times A \to V,$$

které uspořádané dvojici bodů přiřazuje vektor, jehož je tato dvojice umístěním.[5]
K vlastnostem zobrazení f se ještě vrátíme.

Předpokládejme, že jsme zavedli obvyklým způsobem sčítání vektorů a násobení vektoru

[2]Otázkou této blízkosti se přirozeně geometrie *nezabývá* – jde o otázku *aplikace* matematické teorie – zde konkrétně o otázku náležející kosmologii. Uveďme však, že v oblastech slabých gravitačních polí lze fyzikální prostor pokládat za prostor afinní (resp. euklidovský) s mimořádně vysokou přesností.

[3]Dá se ukázat, že ekvipolence je relací ekvivalence na množině $A \times A$. Množina V je tedy faktorizací množiny $A \times A$ dle této relace.

[4]Opravdu jde o zobrazení – každá uspořádaná dvojice bodů určuje *právě jeden* vektor.

[5]Reprezentanta tohoto vektoru si zřejmě můžeme představit jako „šipku“ vedenou z bodu X do bodu Y. Bod X se obvykle nazývá počáteční a Y koncový bod daného umístění.

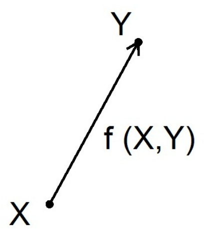
reálným číslem – jedná se po řadě o zobrazení $+ : V \times V \to V$ a $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$.[6]

Patrně (X, X) i (Y, Y) jsou umístěním téhož vektoru – označme jej $\mathbf{o}$ (ukáže se, že jde o *vektor nulový* – viz 3 v (1.1)). Pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in V$ budeme namísto $(-1)\mathbf{x}$ psát $-\mathbf{x}$ (ukáže se, že jde o *vektor opačný k* $\mathbf{x}$ – viz 4 v (1.1)).

Dá se ukázat, že následující tvrzení platí pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V,\ t, r \in \mathbb{R}$:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (1.1)
2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
3. $\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x} = \mathbf{o} + \mathbf{x}$
4. $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{o} = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x}$
5. $t(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = t\mathbf{x} + t\mathbf{y}$
6. $(tr)\mathbf{x} = t(r\mathbf{x})$
7. $(t + r)\mathbf{x} = (t\mathbf{x}) + (r\mathbf{y})$
8. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Souhrnně řečeno, ukázali jsme, že *množina V spolu se zobrazeními $+, \cdot$ tvoří vektorový prostor nad tělesem* $\mathbb{R}$. S využitím poznatků středoškolské geometrie bychom dospěli k tomu, že jeho dimenze je rovna třem.

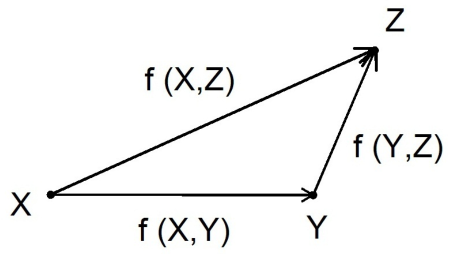


[6]Máme-li sečíst dva vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$, zvolíme jejich umístění tak, aby koncový bod vektoru $\mathbf{x}$ byl počátečním bodem vektoru $\mathbf{y}$. Umístění jejich součtu $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ je pak dáno počátečním bodem vektoru $\mathbf{x}$ a koncovým bodem vektoru $\mathbf{y}$.
Buď nyní $\mathbf{x}$ vektor určený umístěním $(X, Y),\ t \in \mathbb{R}$. Chceme-li vynásobit vektor $\mathbf{x}$ reálným číslem t, vedeme nejdříve počátečním bodem umístění vektoru $\mathbf{x}$ pomocnou přímku, kterou pokládáme za tzv. reálnou osu (její body intuitivně chápeme jako obrazy jednotlivých reálných čísel), tak, aby obraz nuly splýval s bodem X a aby byla byla různá od přímky $\overleftrightarrow{XY}$. Pak spojíme koncový bod Y umístění vektoru $\mathbf{x}$ s obrazem čísla 1 na reálné ose a s touto spojnicí vedeme rovnoběžku obrazem čísla t. Průsečík této rovnoběžky s přímkou $\overleftrightarrow{XY}$ označme Z. Umístěním vektoru $t \cdot \mathbf{x}$ je pak dvojice (X, Z).

Nyní se zbývejme vlastnostmi zobrazení f.
Zvolme libovolně body $X, Y, Z \in A$. Uvážíme-li vektory $f(X,Y)$, $f(Y,Z)$ a $f(X,Z)$, platí vzhledem k zavedení sčítání vektorů ve V:

$$f(X,Y) + f(Y,Z) = f(X,Z). \tag{1.2}$$

Situaci znázorňuje obr. 1.1.2:



Obr. 1.1.2

Dále zvolme některý bod P. Je-li $\mathbf{x}$ libovolný vektor, pak zřejmě existuje *jediný bod* X tak, že dvojice (P, X) je umístěním vektoru $\mathbf{x}$, neboli $\mathbf{x} = f(P,X)$. Pro každý bod $P \in A$ platí tedy následující tvrzení:

$$\forall \mathbf{x} \in V \ \exists! X \in A : \quad \mathbf{x} = f(P,X). \tag{1.3}$$

Jinak řečeno, znamená to, že definujeme-li pro libovolné $P \in A$ *zobrazení* $f_P : A \to V$ vztahem

$$\forall X \in A : \quad f_P = f(P,X),$$

pak f_P je *bijekcí* A na V.
Tuto skutečnost můžeme volně přiblížit tak, že z libovolně zvoleného bodu P „vychází“ do každého bodu *právě jeden vektor* a že každý vektor „vycházející“ z P směřuje *právě do jednoho bodu*.

1.1.2 Definice afinního prostoru

V předešlé podkapitole jsme ukázali, že intuitivně chápaný fyzikální prostor má vlastnosti (1.1), (1.2), (1.3). Z důvodů již uvedených, zohledníme tuto skutečnost při volbě axiomů.[7]

[7]Pro vybudování *axiomatizované analytické geometrie afinních a euklidovských prostorů* zde použijeme axiomatizaci inspirovanou H. Weylem.

Dodejme, že prvním, kdo se pokusil o axiomatizaci geometrie, byl starořecký matematik Euklides (jeho dílo *Základy* se ve výuce matematiky užívalo ještě v XIX. stol.), úspěšně se tohoto úkolu pro euklidovskou geometrii poprvé zhostil až D. Hilbert v XIX. století (viz [9]), kdy se rovněž (tehdy velmi překvapivě) ukázalo, že euklidovská geometrie není geometrií jedinou. S jistou modifikací Hilbertovy axiomatiky (a blíže s pojmem axiomatizace) způsobem vhodným pro učitele se lze seznámit např. v [16].
K definici 1.1.1 uveďme, že pojem afinního prostoru lze zavést i jinak (přirozeně s ekvivalentním výsledkem) – viz např. [2, 3, 7], či [4] (zde je afinní prostor vytvořen faktorizací vektorového prostoru).
Pro úplnost ještě dodejme, že se čtenář může setkat i s názvem *bodově vektorový prostor*.

Pojem *afinního prostoru* dle následující definice je však mnohem *obecnější* – zejm. co do volby dimenze n (n může být větší než 3; v případech $n = 1$, resp. $n = 2$, v sobě jako zvláštní případ zahrnuje i geometrii přímky, resp. roviny) či výběru tělesa T (T nemusí být tělesem reálných čísel) – a má často zcela jiné uplatnění, než popis okolního prostoru, byť z historického hlediska šlo o rozhodující motiv pro jeho zavedení.

Zdůrazněme, že nadále budeme již vycházet *pouze* z definice 1.1.1, *nikoli* ze svého názoru a představ o fyzikálním prostoru. Tyto představy nám mohou být pouze vodítkem při logickém odvozování vět či inspirací při definici dalších pojmů – v jiných situacích na obsah podkapitoly1.1.1 „zapomeňme“.

Definice 1.1.1 Mějme dánu neprázdnou množinu $\mathbf{A}$, n-rozměrný vektorový prostor $\mathbf{V}$ nad tělesem T a zobrazení $f : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ s následujícími vlastnostmi:

1. $\forall X, YZ \in \mathbf{A} : \quad f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z),$
2. $\exists P \in \mathbf{A}\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}\ \exists! X \in \mathbf{A} : \quad f(P, X) = \mathbf{x}.$

Pak se uspořádaná trojice $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$ nazývá *n-rozměrný afinní prostor nad tělesem* T.

Množina $\mathbf{A}$ se nazývá *nosič afinního prostoru* $\mathcal{A}$ a její prvky se nazývají *body afinního prostoru* $\mathcal{A}$. Vektorový prostor $\mathbf{V}$ se nazývá *zaměření afinního prostoru* $\mathcal{A}$ a jeho prvky *vektory afinního prostoru* $\mathcal{A}$.

Uspořádaná dvojice bodů, která je vzorem jistého vektoru v zobrazení f se nazývá *umístěním* tohoto vektoru.

Označení 1.1.2

- Pro vyjádření skutečnosti, že afinní prostor $\mathcal{A}$ má dimenzi n budeme užívat zápisu $\dim \mathcal{A} = n$, můžeme rovněž připojit k označení afinního prostoru $\mathcal{A}$ jeho dimenzi formou dolního indexu – $\mathcal{A}_n$.

- Body afinního prostoru budeme značit velkými latinskými písmeny $B, C, X, Z, \ldots$, vektory afinního prostoru pak malými tučnými latinskými písmeny - $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{e}, \ldots$, skaláry z tělesa T pouze obyčejnými latinskými písmeny – $g, t, a, \ldots$.

- Nosič (množinu bodů) afinního prostoru $\mathcal{A}$ budeme značit $B(\mathcal{A})$, jeho zaměření pak $V(\mathcal{A})$.

- Nebude-li řečeno jinak, budeme nadále mlčky předpokládat, že $\mathbf{A}$ značí množinu bodů, $\mathbf{V}$ zaměření afinního prostoru $\mathcal{A}$ a f značí příslušné zobrazení $\mathbf{A}^2 \to \mathbf{V}$.

Poznámka 1.1.3 Díky volbě základních pojmů a formulaci axiomů je možné v analytické teorii afinních prostorů velmi efektivně využívat aparátu teorie vektorových prostorů. Autorem této myšlenky je již zmíněný H. Weyl, který tuto myšlenku představil r. 1918 (viz [17]).

Poznámka 1.1.4 k definici 1.1.1

- Je-li X bodem afinního prostoru $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$, pak se namísto korektního zápisu této skutečnosti ve formě $X \in \mathbf{A}$ často píše $X \in \mathcal{A}$.
- Zdůrazněme, že afinní prostor je uspořádanou trojicí – není tedy jednoznačně určen např. zadáním jen množiny bodů $\mathbf{A}$ (viz příklady).
- V tomto textu se pojem *prostor* bude vyskytovat ve dvou významech – jako *afinní prostor* a jako *vektorový prostor* (zaměření afinního prostoru). Bude-li ze souvislosti zřejmé, o jaký prostor se jedná, budeme hovořit toliko o *prostoru*.

Povšimněme si nyní podmínky 2 z definice 1.1.1.

Označení 1.1.5 Buď $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$ afinní prostor. Pro libovolně zvolený $P \in \mathbf{A}$ definujme zobrazení $f_P : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ předpisem:

$$\forall X \in \mathbf{A} : \quad f_P(X) = f(P, X). \tag{1.4}$$

Tohoto zobrazení budeme užívat jen v případech, kdy to bude účelné.

Platnost následující věty je zřejmá.

Věta 1.1.6 *V definici 1.1.1 lze výrok* $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}\ \exists! X \in \mathbf{A}\colon f(P, X) = \mathbf{x})$ *v podmínce 2 nahradit následujícím výrokem:*
Zobrazení $f_P : \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ *definované vztahem (1.4) je bijekcí* $\mathbf{A}$ *na* $\mathbf{V}$.

Důsledek 1.1.7 *Buď* $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$ *afinní prostor. Pak platí:*

1. *Množiny* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{V}$ *mají touž mohutnost.*[8]
2. *Afinní prostor dimenze* 0 *je jednobodová množina.*

[8] Vzhledem k tomu, že vektorový prostor je vždy neprázdný, vyplývá odtud, že požadavek $\mathbf{A} \neq \emptyset$ je v definici 1.1.1 nadbytečný.

Definice 1.1.8 Afinní prostor dimenze 1 se nazývá *(afinní) přímka*, afinní prostor dimenze 2 se nazývá *(afinní) rovina*[9].

Je-li podmínka 2 definice 1.1.1 splněna pro některý bod P, bude platit i pro další body?

Buď $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$ některý afinní prostor a nechť P je bod, pro nějž platí tvrzení uvedené v podmínce 2 definice 1.1.1, tj.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}\ \exists! X \in \mathbf{A} :\ f(P, X) = \mathbf{x}. \tag{1.5}$$

Uvažujme libovolný bod $Q \in \mathbf{A}$. Zvolme nyní libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ a hledejme $Y \in \mathbf{A}$ s vlastností $\mathbf{u} = f(Q, Y)$,
Užitím podmínky 1 z definice 1.1.1 lze psát $f(Q,Y) = f(Q,P) + f(P,Y)$, takže dostáváme: $\mathbf{u} = f(Q,Y) \Leftrightarrow \mathbf{u} = f(Q,P) + f(P,Y) \Leftrightarrow f(P,Y) = \mathbf{u} - f(Q,P)$, konečně, položíme-li $\mathbf{x} = \mathbf{u} - f(Q,P)$, vyplývá odtud s ohledem na (1.5) existence hledaného bodu Y.

Platí tedy:

Věta 1.1.9 *Buď $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$ afinní prostor. Pak platí:*

$$\forall P \in \mathbf{A}\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}\ \exists! X \in \mathbf{A} : \quad f(P, X) = \mathbf{x}.$$

Jaký je důsledek této věty pro množinu zobrazení f_P dle (1.4)?

Příklad 1.1.10 Buď dána trojice $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$, kde

1. $\mathbf{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = e^x\},\ \mathbf{V} = \mathbb{R}$ a

$$\forall X, U \in \mathbf{A},\ X = (x,y),\ U = (u,v) \in \mathbf{A} :\ f(X,U) = u - x.$$

2. $\mathbf{A} = \mathbb{R}^n, \mathbf{V} = \mathbb{R}^n$,

$$\forall X, Y \in \mathbf{A},\ X = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) :$$

$$f(X,Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \cdots, y_n - x_n)$$

3. $\mathbf{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = |y|\},\ \mathbf{V} = \mathbb{R}$ a

$$\forall X, U \in \mathbf{A},\ X = (x,y),\ U = (u,v) \in \mathbf{A} :\ f(X,U) = u - x.$$

[9] O tom, že tyto pojmy odpovídají naší představě o přímce či rovině, se přesvědčíme později – např. v podkapitole 1.3.

4. $\mathbf{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = |y|\}, \quad \mathbf{V} = \mathbb{R}$ a

$$\forall X, U \in \mathbf{A},\ X = (x,y),\ U = (u,v) \in \mathbf{A}:\ f(X,U) = v - y.$$

V jednotlivých případech ověřte, zda $\mathcal{A}$ je afinním prostorem.

Řešení:
Musíme zjistit, zda $\mathcal{A}$ vyhovuje definici 1.1.1. Zřejmě ve všech případech $\mathbf{A} \neq \emptyset$, $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ a f je zobrazení $\mathbf{A}^2 \to \mathbf{V}$. Postačí tedy ověřit, zda f má vlastnosti 1, 2 z definice 1.1.1.[10]

Případ č.1:

Ad 1: Zvolme libovolně body $X = (x,y),\ U = (u,v),\ R = (r,s)$.[11] Pak $f(X,U) = u - x, \quad f(U,R) = r - u$ a $f(X,R) = r - x$, takže rovnost

$$f(X,U) + f(U,R) = f(X,R)$$

je zcela evidentní.

Ad 2: Buď $P = (p,q)$ některý bod. Zvolme libovolný vektor $w \in \mathbb{R}$, ($\mathbf{V} = \mathbb{R}$), a hledejme $X = (x,y) \in \mathbf{A}$ řešící rovnici

$$f(P,X) = w.$$

Z definice zobrazení f plyne $f(P,X) = x - p$. Musí tedy současně platit $y = e^x$ a $x - p = w$, čemuž evidentně vyhovuje jediná dvojice $(x,y):\ x = p + w\ \wedge\ y = e^{p+w}$. Existuje tudíž jediný bod X, pro nějž je $f_P(X) = w$, a tedy f_P je bijekcí $\mathbf{A}$ na $\mathbf{V}$.[12]

Zjistili jsme, že $\mathcal{A}$ je afinním prostorem dimenze 1 ($\dim \mathbf{V} = 1$). Je tedy příkladem přímky (vzhledem k našim dosavadním představám poněkud netradičním – načrtněte si množinu $\mathbf{A}$!).

Případ č.2:

Ad 1: Zvolíme-li libovolné body $X, Y, Z \in \mathbf{A}$, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \cdots \cdots, y_n),\ Z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ je platnost 1 zřejmá.

Ad 2: Buď $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathbf{A}$. Z definice zobrazení f obdržíme:
$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \Rightarrow f(P,X) = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, \cdots, x_n - p_n)$. Zvolíme-li libovolný vektor $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$, ($\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$), $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$, pak $f(P,X) = \mathbf{w}$ je ekvivalentní rovnici

$$(x_1 - p_1, x_2 - p_2, \cdots, x_n - p_n) = (w_1, w_2, \cdots, w_n),$$

[10] Ověřování podmínky 2 lze nahradit zjišťováním bijektivity zobrazení f_P (srv. věta 1.1.6).
[11] Zápis $X = (x,y)$ nemá nic společného se souřadnicemi bodu! Viz příklad 1.2.10.
[12] Jak vidíme je podmínka 2 splněna opravdu pro libovolný výběr bodu P (srv. věta 1.1.9).

kterou evidentně řeší jediná n-tice $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ představující hledaný bod X.

Zkoumaná struktura $\mathcal{A}$ je afinním prostorem a protože $\dim \mathbf{V} = n$, je jeho dimenze rovna n.[13] Načrtneme-li si pro $n = 1, 2$ či 3 příslušnou množinu bodů (nosič), dostáváme naopak velmi „tradiční“ představu o prostoru dané dimenze.

Případ č.3:

Ad 1: Zvolíme-li libovolně body $X = (x, y), U = (u, v), R = (r, s)$ je zřejmě rovnost $f(X, U) + f(U, R) = f(X, R)$ opět splněna.

Ad 2: Buď $P = (p, q)$ některý bod. Můžeme psát:

$$X = (x, y) \Rightarrow f(P, X) = x - p.$$

Zvolme libovolný vektor $w \in \mathbb{R}$, ($\mathbf{V} = \mathbb{R}$), a hledejme $X = (x, y) \in \mathbf{A}$ řešící rovnici $f(P, X) = w$.
Musí tedy současně platit $x = |y|$ a $x - p = w$. Této soustavě rovnic však vyhovují obecně dvě dvojice: $(p + w, p + w)$ a $(p + w, -p - w)$, a tudíž f_P není bijekcí pro žádnou volbu P – $\mathcal{A}$ proto afinním prostorem není.

Případ č.4:

Analogickým způsobem zjistíme, že jde o jednorozměrný afinní prostor, a to i přes to, že má stejný nosič (i zaměření), jako struktura v případě 3 (srv. pozn. 1.1.4).

Všimněme si nyní věty 1.1.9. Tato věta říká, že zvolíme-li libovolně bod X a vektor $\mathbf{u}$, existuje jediný bod Y tak, že platí $f(X, Y) = \mathbf{u}$.

Získáváme tak *zobrazení* $\mathbf{A} \times \mathbf{V}$ *do* $\mathbf{A}$ definované takto:

$$(X, \mathbf{u}) \mapsto Y \Leftrightarrow f(X, Y) = \mathbf{u}. \tag{1.6}$$

Nyní zavedeme další označení a pojmenování pro vektor $f(X, Y)$ a rovněž zavedeme označení i název pro bod přiřazený dvojici $(X, \mathbf{u})$ právě popsaným postupem.

Definice 1.1.11 Buď $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$ afinní prostor .

1. Pro libovolnou uspořádanou dvojici bodů $X, Y \in \mathbf{A}$ nazýváme vektor $f(X, Y)$ *rozdílem bodů X a Y* a značíme jej $Y - X$.
   Afinní prostor $\mathcal{A}$ budeme také značit $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, -)$.

2. Pro libovolný bod $X \in \mathbf{A}$ a libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ nazýváme bod Y, pro nějž platí $\mathbf{u} = f(X, Y)$, *součtem bodu X a vektoru* $\mathbf{u}$ a značíme jej $X + \mathbf{u}$. Namísto $X + (-\mathbf{u})$ budeme psát jen $X - \mathbf{u}$.

[13] Právě zkonstruovaný afinní prostor se někdy nazývá *n-rozměrný souřadnicový afinní prostor nad* $\mathbb{R}$. Zřejmě uvedená struktura zůstává afinním prostorem i po náhradě $\mathbb{R}$ libovolným komutativním tělesem T – pak by šlo o afinní prostor nad T.

Uvedený afinní prostor má značné využití.

Poznámka 1.1.12 Právě uvedená definice 1.1.11 v části 1 jen *přeznačuje* dosud užívané zobrazení $f : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ na „–“. Vedle (či spíše namísto) zápisu $\mathbf{u} = f(X, Y)$ tak budeme psát $\mathbf{u} = Y - X$. Nejde však o žádné nové zobrazení.

V odstavci 2 však definice *zavádí nové* zobrazení : $\mathbf{A} \times \mathbf{V} \to \mathbf{A}$, a sice zobrazení definované relací (1.6).[14]

Uvedená symbolika $+, -$ se vzápětí ukáže jako velmi názorná, Jde však *pouze o symboliku* – např. čemu je roven rozdíl $X - X$, či jaký je je vztah mezi vektory $Y - X$ a $-(X - Y)$, zatím nevíme.[15]

Musíme si rovněž uvědomit, že stejných symbolů „+“ i „–“ užíváme nyní ve *dvou různých významech*: pro operace mezi vektory a pro výše zmíněná zobrazení, a to i v témže zápisu. Např. $\mathbf{x} = \mathbf{u} - (Y - X)$, $B = C + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ či $W = X + ((Y - Z) - \mathbf{y})$ a podobně. K nedorozumění ovšem dojít nemůže.

Vhodnost volby názvosloví „rozdíl bodů“ a „součet bodu a vektoru“ vyplyne rovněž z vlastností *souřadnic bodů a vektorů* v následující podkapitole (věta 1.2.8).

Věta 1.1.13 *Pro libovolné body K, L, M, N a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ afinního prostoru $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, -)$ platí:*

1. $K - K = \mathbf{o}$,
2. $-(K - L) = (L - K)$,
3. $(K + \mathbf{u}) - L = (K - L) + \mathbf{u}$,
4. $K - (L + \mathbf{u}) = (K - L) - \mathbf{u}$,
5. $(K + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = K + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$,
6. $(K - L) + (M - N) = (K - N) + (M - L)$,
7. $(K + \mathbf{u}) - (L + \mathbf{v}) = (K - L) + (\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

[14]Mezi oběma zobrazeními je vzájemně jednoznačný vztah daný relací

$$Y = X + \mathbf{u} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{u} = Y - X.$$

Zadáním $- : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}$ tedy zkonstruujeme $+ : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \to \mathbf{A}$ a naopak. V některé literatuře se k definici afinního prostoru užívá právě součtu bodu a vektoru.

[15]Ve větě 1.1.13 ukážeme, že uvedené označení umožní „úpravy“ podobných výrazů analogicky práci s výrazy algebraickými. Vždy si však musíme uvědomovat skutečný význam uvedených symbolů a povolenou syntaxi jejich zápisu. Podotkněme, že *nejsou definovány zápisy* typu $\mathbf{u} - X, \mathbf{u} + X$ a podobně.

Důkaz:

Ad 1:

Uvažme relaci 1 z definice 1.1.1 ve znění 1 z definice 1.1.11:
$\forall X, Y, Z \in \mathbf{A}: \ (Y - X) + (Z - Y) = (Z - X)$. Položíme-li $Y = Z = K$ můžeme psát: $(K - X) + (K - K) = (K - X)$. Ve $\mathbf{V}$ však existuje pouze jeden vektor $\mathbf{a}$ s vlastností $\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{x}$, a to vektor $\mathbf{o}$. Tudíž $(K - K) = \mathbf{o}$.

Ad 2:

Užitím 1 z definice 1.1.1 lze psát: $(K - L) + (L - K) = (L - L)$, s přihlédnutím k 1 věty 1.1.13 tedy $(K - L) + (L - K) = \mathbf{o}$, což značí, že $(L - K)$ je opačný vektor k $(K - L)$.

Ad 3:

Označme $F = K + \mathbf{u}$, tj. $\mathbf{u} = F - K$ (proč?). Pak dostáváme:

$$(K + \mathbf{u}) - L = F - L \overset{(a)}{=} (K - L) + (F - K) \overset{(b)}{=} (K - L) + \mathbf{u},$$

kde (a) značí užití 1 z definice 1.1.1 a (b) faktu $\mathbf{u} = F - K$.

Ad 4:

Označme $F = L + \mathbf{u}$, tj. $\mathbf{u} = F - L$. Obdržíme tak:

$$K - (L + \mathbf{u}) = K - F \overset{(a)}{=} (L - F) + (K - L) \overset{(b)}{=} -(F - L) + (K - L) \overset{(c)}{=}$$

$$= (-\mathbf{u}) + (K - L) = (K - L) - \mathbf{u},$$

k úpravě (a) jsme užili 1 z definice 1.1.1, k úpravě (b) již dokázaného 2 z věty 1.1.13 a k (c) faktu $\mathbf{u} = F - L$.

Ad 5:

Položíme-li $H = (K + \mathbf{u}) + \mathbf{v}$, plyne odtud:

$$\mathbf{v} = H - (K + \mathbf{u}) \overset{(a)}{\Rightarrow} \mathbf{v} = (H - K) - \mathbf{u} \Rightarrow (H - K) = \mathbf{u} + \mathbf{v} \overset{(b)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow H = K + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \Rightarrow (K + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = K + (\mathbf{u} + \mathbf{v}),$$

přičemž pro implikaci (a) jsme užili bod 4 věty 1.1.13, pro (b) pak 2 z definice 1.1.11.

Ad 6:

$$(K - L) + (M - N) \overset{(a)}{=} (K - L) + ((L - N) + (N - L)) + (M - N) =$$

$$= ((K - L) + (L - N)) + ((N - L) + (M - N)) \overset{(b)}{=} (K - N) + (M - L),$$

kde v kroku (a) jsme užili bodu 2 věty 1.1.13 a v kroku (b) 1 z definice 1.1.1 spolu s komutativitou sčítání ve $\mathbf{V}$.

Ad 7:

Položme $F = L + \mathbf{v}$. Postupně obdržíme:

$$(K + \mathbf{u}) - (L + \mathbf{v}) = (K + \mathbf{u}) - F \overset{(a)}{=} (K - F) + \mathbf{u} =$$

$$= (K - (L + \mathbf{v})) + \mathbf{u} \overset{(b)}{=} ((K - L) - \mathbf{v}) + \mathbf{u} = (K - L) + \mathbf{u} - \mathbf{v},$$

přičemž v (a) byl užit bod 3 věty 1.1.13 a v (b) bod 4 věty 1.1.13. $\square$

Z 1, 5 a 6 věty 1.1.13 bychom matematickou indukcí dokázali (proveďte!):

Důsledek 1.1.14

1. *Pro libovolný bod K a libovolné vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k$ afinního prostoru $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, -)$ platí:*

$$K + (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{u}_k) = (\cdots((K + \mathbf{u}_1) + \mathbf{u}_2) + \cdots + \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{u}_k,$$

2. *Pro libovolné body $M_1, M_2, \cdots, M_k$ afinního prostoru $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, -)$ platí:*

$$(M_2 - M_1) + (M_3 - M_2) + \cdots + (M_k - M_{k-1}) = (M_k - M_1).$$

Označení 1.1.15 Z bodu 1 důsledku 1.1.14 plyne, že uvedený součet je nezávislý na uzávorkování a budeme jej (pro libovolné $k \in \mathbb{N}$) bez obav z nedorozumění psát:

$$K + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{u}_k.$$

1.2 Afinní soustava souřadnic

Pojem soustavy souřadnic je v analytické geometrii pojmem zcela zásadním. Dokážeme-li každému bodu afinního prostoru vhodným způsobem přiřadit uspořádanou n-tici skalárů *(souřadnice)*, můžeme pak usilovat o popis každého geometrického útvaru pomocí jisté výrokové formy *(analytického vyjádření)*, jejímiž proměnnými jsou právě souřadnice, přičemž této formě vyhovují souřadnice právě těch bodů, které s daným útvarem incidují. To je, krátce řečeno, princip analytického popisu geometrických útvarů, jak jej v zárodečné formě nacházíme již u Descarta.

Čtenáři je z lineární algebry znám pojem *souřadnice vektoru*, s jeho využitím nyní zavedeme v afinním prostoru pojem *souřadnice bodu*.

Definice 1.2.1 Buď $\mathcal{A}_n = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, -)$ afinní prostor. Nechť P je bod z $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_0 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ báze jeho zaměření $\mathbf{V}$. Pak uspořádanou $(n+1)$-tici

$$\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$$

nazýváme *afinní báze (repér) prostoru $\mathcal{A}_n$*, bod P pak *počátek afinní báze*.

Označení 1.2.2 Afinní báze budeme značit velkými psacími písmeny – $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \dots$

Příslušnou bázi zaměření afinního prostoru budeme značit připojením dolního indexu 0 k označení afinní báze - $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0, \mathcal{D}_0, \dots$

Symbolem $\mathcal{B} = \langle P; \mathcal{B}_0 \rangle$ budeme značit skutečnost, že afinní báze $\mathcal{B}$ je tvořena počátkem P a bází zaměření $\mathcal{B}_0$.

Poznámka 1.2.3 V tomto textu se pojem *báze* bude vyskytovat ve dvou významech – jako *báze afinního prostoru* a *báze vektorového prostoru* (např. zaměření afinního prostoru). Bude-li ze souvislosti zřejmé, o jaký význam se jedná, budeme hovořit jen o *bázi*.

Uvažujme afinní prostor $\mathcal{A}_n = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, -)$. Zvolme dále některou afinní bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$.

Buď nyní X libovolný bod z $\mathcal{A}$. Tomuto bodu dokážeme nyní vzájemně jednoznačně přiřadit vektor $\mathbf{x}$ z $\mathbf{V}$, a to

$$\mathbf{x} = X - P \tag{1.7}$$

(jde o obraz bodu X v zobrazení f_P – srv. věta 1.1.6). Vektor $\mathbf{x}$ lze právě jedním způsobem psát ve tvaru lineární kombinace vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ (proč?):

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n, \tag{1.8}$$

čímž je mu vzájemně jednoznačně přiřazena uspořádaná n-tice $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ z T_n (jde o souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ v soustavě souřadnic vektorového prostoru $\mathbf{V}$ určené bází $\mathcal{B}_0$. Tuto soustavu souřadnic označme $\sigma_{\mathcal{B}_0}$).[16]

S ohledem na definici 1.1.11 dostáváme z relací (1.7) a (1.8):

$$X = P + (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n)$$

a po užití důsledku 1.1.14 (a označení 1.1.15) lze pro X psát:

$$X = P + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n, \tag{1.9}$$

čímž dostáváme zobrazení $\mathcal{S}_{\mathcal{B}} : \mathbf{A} \to T^n$ přiřazující bodu X uspořádanou n-tici $(x_1, x_2, \cdots \cdots, x_n)$ z T_n, která splňuje (1.9).

[16] Jak víme, je $\sigma_{\mathcal{B}_0}$ izomorfizmem vektorového prostoru $\mathbf{V}$ na aritmetický vektorový prostor T^n.

Fakt, že vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ má v bázi $\mathcal{B}_0$ souřadnice $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ – tj. platí $\sigma_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{y}) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ – budeme zapisovat takto:

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)_{\mathcal{B}_0}$$

Bude-li zřejmé, o jakou bázi se jedná, budeme její označení vynechávat.
(V lineární algebře bývá pro výše uvedený fakt užíván také zápis

$$\{\mathbf{y}\}_{\mathcal{B}_0} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)).$$

Evidentně platí,[17] že $\mathcal{S}_{\mathcal{B}} = f_P \circ \sigma_{\mathcal{B}_0}$ (viz diagram na obr. 1.2.1), a tudíž $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ je bijekcí $\mathbf{A}$ na T^n.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "\mathcal{S}_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "f_P"'] & T^n \\
\mathbf{V}_n \arrow[ur, "\sigma_{\mathcal{B}_0}"'] &
\end{tikzcd}$$

Obr. 1.2.1

Následující definice 1.2.4 je tudíž korektní a dále uvedená věta 1.2.7 platná[18].

Definice 1.2.4 Buď $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ báze afinního prostoru $\mathcal{A}_n = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, -)$. Pak zobrazení $\mathcal{S}_{\mathcal{B}} : \mathbf{A} \to T^n$ přiřazující libovolnému bodu X uspořádanou n-tici $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ z T_n splňující (1.9) se nazývá *afinní soustava souřadnic (afinního prostoru $\mathcal{A}_n$) určená bází $\mathcal{B}$*, složka x_i uvedené uspořádané n-tice se nazývá *i-tá souřadnice bodu X vzhledem k afinní bázi $\mathcal{B}$.*[19]

Položíme-li $\forall i, 1 \leq i \leq n, \mathcal{X}_i = f_P^{-1}([\mathbf{e}_i])$, pak se množiny bodů $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \cdots, \mathcal{X}_n$ nazývají *souřadnicové osy afinní soustavy souřadnic $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$.*[20] Pro bod P budeme také užívat názvu *počátek soustavy souřadnic $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$.*

[17] V této učebnici budeme *složení $p \circ q$ zobrazení* $p : I \to J$ a $q : J \to K$ definovat relací:

$$\forall \alpha \in I; \quad (p \circ q)(\alpha) = q(p(\alpha)).$$

[18] Odtud a z věty 1.2.8 plyne, že afinní soustava souřadnic je zobrazením, které libovolný afinní prostor nad daným tělesem T *izomorfně* (tj. včetně jeho struktury podprostorů a relace incidence) převádí na *souřadnicový afinní prostor nad T téže dimenze* (viz případ 2. v příkladu 1.1.10); činíme tak důležitý závěr, že každé dva afinní prostory nad týmže tělesem jsou izomorfní, právě když mají touž dimenzi. To má mimochodem i ten důsledek, že axiomatická teorie afinních prostorů může být považována za *úplnou*, tj. neexistuje v ní nerozhodnutelný výrok.

[19]
- Užívá se též obratů *v bázi $\mathcal{B}$* či *nad bází $\mathcal{B}$*.
- Čtenář se může rovněž setkat s ekvivalentním pojmem *lineární soustava souřadnic*; důvodem pro takové pojmenování je např. platnost věty 1.2.8 – jiné způsoby zavedení souřadnic bodu (např. čtenáři patrně známé polární souřadnice v euklidovské rovině či sférické a cylindrické souřadnice v třírozměrném euklidovském prostoru) totiž tyto vlastnosti nemají.

[20] Evidentně $P \in \mathcal{X}_i, 1 \leq i \leq n$, (čemu je rovno $f_P(P)$?).
V podkapitole 1.3 zavedeme pojem *afinní podprostor* a bude tak zřejmé, že $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \cdots, \mathcal{X}_n$ jsou *přímky* procházející bodem P, směrový vektor i-té z nichž je $\mathbf{e}_i$.
V tuto chvíli bychom museli užít klopotné konstrukce

$$\mathcal{X}_i = (f_P^{-1}([\mathbf{e}_i]), [\mathbf{e}_i], f|(f_P^{-1}([\mathbf{e}_i]))^2), \ \forall i, 1 \leq i \leq n.$$

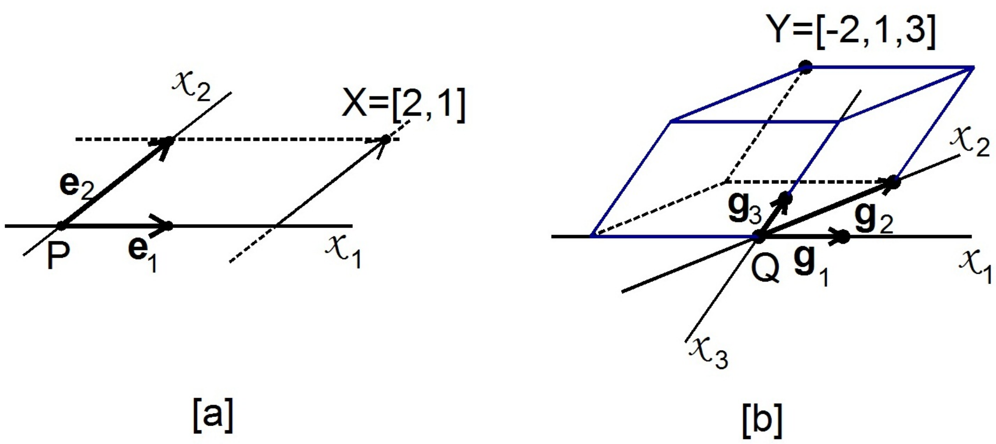
Označení 1.2.5 Buď $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ afinní báze prostoru $\mathcal{A}_n$. Skutečnost, že bod $X \in \mathcal{A}$ má v bázi $\mathcal{B}$ souřadnice $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ – tj. platí $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(X) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ – budeme označovat takto[21]:

$$X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}$$

Bude-li zřejmé, o jakou afinní bázi se jedná, budeme její označení vynechávat.

Poznámka 1.2.6 Počátek P afinní báze $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ má zřejmě v bázi $\mathcal{B}$ souřadnice $[0, \cdots, 0]$, body $P + \mathbf{e}_1, P + \mathbf{e}_2, \cdots, P + \mathbf{e}_n$ pak po řadě $[1, 0, \cdots, 0]$, $[0, 1, 0, \cdots, 0]$, $\cdots$, $[0, 0, \cdots, 0, 1]$ (proč?).

Obrázek 1.2.2 [a] přibližuje konstrukci souřadnic bodu X v $\mathcal{A}_2$ vzhledem k bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ a [b] souřadnic bodu Y v $\mathcal{A}_3$ vzhledem k bázi $\mathcal{C} = \langle Q; \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3 \rangle$. Patrně je tato konstrukce v souladu s naší představou o pojmu souřadnic v rovině a prostoru.



Obr. 1.2.2

Věta 1.2.7 *Buď $\mathcal{B}$ libovolná afinní báze prostoru $\mathcal{A}$. Pak platí:*

1. *Ke každému bodu $X \in \mathcal{A}$ existuje právě jedna uspořádaná n-tice $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in T^n$ s vlastností $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}$.*
2. *Ke každé uspořádané n-tici $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in T^n$ existuje právě jeden bod $X \in \mathcal{A}$ s vlastností $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}$.*

Nyní prozkoumejme, jaké souřadnice bude mít vektor rovný rozdílu bodů a bod rovný součtu bodu a vektoru. Znovu se potvrdí názornost symboliky zavedené v definici 1.1.11.

Zvolme v afinním prostoru $\mathcal{A}$ některou bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$.

[21] Uvědomme si však, že symbol „=“ zde neznamená rovnost! (stejně jako v případě souřadnic vektoru – viz výše).

(i) Nechť X, Y jsou libovolné body z $\mathcal{A}$, $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}$ a $Y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]_{\mathcal{B}}$, což (dle (1.9)) značí:

$$X = P + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \ \wedge \ Y = P + y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n.$$

Odtud pro vektor $(Y - X)$ postupně dostáváme:

$$Y - X = (P + y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n) - (P + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \stackrel{(a)}{=}$$

$$= (P + (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n)) - (P + (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n)) \stackrel{(b)}{=}$$

$$= (P - P) + (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n) - (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \stackrel{(c)}{=}$$

$$= \mathbf{o} + (y_1 - x_1)\mathbf{e}_1 + (y_2 - x_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (y_n - x_n)\mathbf{e}_n,$$

přičemž v kroku (a) jsme užili označení 1.1.15, v (b) vlastnosti 7 věty 1.1.13 a v kroku (c) jednak vlastnosti 1 věty 1.1.13 a dále pravidla vektorové algebry.
Obdrželi jsme tedy: $(Y - X) = (y_1 - x_1)\mathbf{e}_1 + (y_2 - x_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (y_n - x_n)\mathbf{e}_n$, což pro jeho souřadnice v bázi $\mathcal{B}_0$ znamená

$$(Y - X) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \cdots, y_n - x_n)_{\mathcal{B}_0}.$$

(ii) Nechť X je libovolný bod z $\mathcal{A}$ a $\mathbf{u}$ libovolný vektor z $\mathbf{V}$. Nechť $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)_{\mathcal{B}_0}$.
Označíme $Z = X + \mathbf{u}$ a budeme hledat vyjádření jeho souřadnic pomocí souřadnic bodu X a vektoru $\mathbf{u}$. Je-li $Z = [z_1, z_2, \cdots, z_n]_{\mathcal{B}}$, pak s využitím odstavce (i) lze psát:

$$(Z - X) = (z_1 - x_1, z_2 - x_2, \cdots, z_n - x_n)_{\mathcal{B}_0},$$

a jelikož $Z - X = \mathbf{u}$ (proč?), dostáváme

$$(u_1, u_2, \cdots, u_n) = (z_1 - x_1, z_2 - x_2, \cdots, z_n - x_n)$$

a odtud pro souřadnice $z_1, \cdots, z_n$ bodu Z plyne:

$$Z = [x_1 + u_1, x_2 + u_2, \cdots, x_n + u_n]_{\mathcal{B}}.$$

Shrňme nalezené výsledky:

Věta 1.2.8 *Buď $\mathcal{B}$ libovolná báze afinního prostoru $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, -)$. Pak platí:*
$\forall X, Y \in \mathcal{A},\ X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}},\ Y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]_{\mathcal{B}},$
$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)_{\mathcal{B}_0}:$

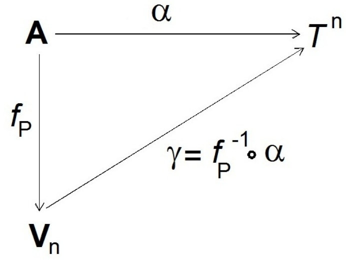
$$(Y - X) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \cdots, y_n - x_n)_{\mathcal{B}_0},$$

$$(X + \mathbf{u}) = [x_1 + u_1, x_2 + u_2, \cdots, x_n + u_n]_{\mathcal{B}}$$

Každá afinní soustava souřadnic v $\mathcal{A}_n$ je *zobrazením* $\mathbf{A} \to T^n$. Uvažme nyní libovolné zobrazení $\alpha : \mathbf{A} \to T^n$ a tažme se, jaké podmínky musí splňovat, aby bylo afinní soustavou souřadnic určenou jistou bází $\mathcal{B}$ – zobrazení α bude afinní soustavou souřadnic, právě když bude existovat afinní báze $\mathcal{B}$, pro niž $\alpha = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$.

(i) Předpokládejme, že α afinní soustavou souřadnic je a nechť $\mathcal{B} = \langle P, \mathcal{B}_0 \rangle$ je příslušná afinní báze. Zobrazení $\sigma_{\mathcal{B}_0}$ (pro něž platí $\sigma_{\mathcal{B}_0} = f_P^{-1} \circ \alpha$ – viz úvahy před definicí 1.2.4), je izomorfizmem $\mathbf{V} \to T^n$ a bod P je právě ten, pro nějž platí $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(P) = (0, \cdots, 0)$.

(ii) Buď nyní $\alpha : \mathbf{A} \to T^n$ některé zobrazení takové, že existuje bod $P \in \mathcal{A}$ s vlastností $\alpha(P) = (0, \cdots, 0)$ a zobrazení $\gamma : \mathbf{V}_n \to T^n$, $\gamma = f_P^{-1} \circ \alpha$, indukované zobrazením α (viz obr. 1.2.3) je izomorfizmem $\mathbf{V}$ na T^n. Hledejme afinní bázi $\mathcal{B}$ tak, aby $\alpha = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$.



Obr. 1.2.3

Jejím počátkem bude zřejmě bod P (proč?).
Dále nechť $\mathbf{j}_i, 1 \leq i \leq n$, je i-tý bázový vektor tzv. standardní báze v T^n (jde o aritmetický vektor, jehož všechny složky s výjimkou i-té jsou rovny 0 a i-tá je rovna 1). Položíme-li dále pro všechna $i, 1 \leq i \leq n$, $\mathbf{e}_i = \gamma^{-1}(\mathbf{j}_i)$, dostáváme, vzhledem k tomu, že γ je izomorfizmem, soustavu n lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \in \mathbf{V}$, tedy bázi ve $\mathbf{V}$ (zdůvodněte!)

Získáváme tak afinní bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$. Ukážeme, že α je soustava souřadnic touto bází určená.
Buď $X \in \mathcal{A}$ libovolný bod. Konstruujme jeho obraz v afinní soustavě souřadnic $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$. Označíme-li $\mathbf{x} = f_P(X)$, lze psát

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Pak (srv. úvahy před definicí 1.2.4):

$$\mathcal{S}_{\mathcal{B}}(X) = (f_P \circ \sigma_{\mathcal{B}_0})(X) = \sigma_{\mathcal{B}_0}(f_P(X)) = \sigma_{\mathcal{B}_0}(\mathbf{x}) =$$

$$= \sigma_{\mathcal{B}_0}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Současně (užijeme zejm. zavedení vektorů $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ a předpoklad, že γ je izomorfizmus):

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1\mathbf{j}_1 + x_2\mathbf{j}_2 + \cdots + x_n\mathbf{j}_n = x_1\gamma(\mathbf{e}_1) + x_2\gamma(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n\gamma(\mathbf{e}_n) =$$

$$= \gamma(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) =$$

$$= \gamma(\mathbf{x}) = (f_P^{-1} \circ \alpha)(\mathbf{x}) = \alpha(f_P^{-1}(\mathbf{x})) = \alpha(X),$$

odkud je patrno, že $\alpha = \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ – tj. α je soustavou souřadnic určenou bází $\mathcal{B}$.

Právě získané poznatky shrneme do věty (zdůvodněte druhou část tvrzení!):

Věta 1.2.9 *Buď $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, -)$ afinní prostor, α nechť je libovolné zobrazení $\mathbf{A}$ do T^n. Zobrazení α je afinní soustavou souřadnic, právě když*

1. *existuje bod $P \in \mathcal{A}$ s vlastností $\alpha(P) = (0, \cdots, 0)$,*
2. *zobrazení $f_P^{-1} \circ \alpha$ je izomorfizmem $\mathbf{V}$ na T^n.*[22]

Zobrazení α je v tomto případě afinní soustavou souřadnic vzhledem k afinní bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\rangle$ dané relacemi

(i) $P = \alpha^{-1}(0, \cdots, 0)$,

(ii) $\mathbf{e}_i = (\alpha^{-1} \circ f_P)(\mathbf{j}_i),\ 1 \leq i \leq n$, *kde $\mathbf{j}_i$ je i-tý vektor standardní báze v T^n.*[23]

Příklad 1.2.10 Buď dána trojice $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$, kde

$$\mathbf{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = e^x\},\ \mathbf{V} = \mathbb{R} \quad \text{a}$$

$$\forall X, U \in \mathbf{A},\ X = (x, y),\ U = (u, v) \in \mathbf{A}:\ f(X, U) = u - x.$$

Dále je dáno zobrazení $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda je α afinní soustavou souřadnic a v kladném případě nalezněte příslušnou afinní bázi.

1. $X = (x, y): \quad \alpha(X) = \ln y,$

[22] V námi preferované symbolice (zavedené definicí 1.1.11) zní funkční předpis pro dotčené zobrazení:

$$\mathbf{x} \mapsto \alpha(P + \mathbf{x}).$$

[23] Užijeme-li opět symboliky dle definice 1.1.11, relace pro $\mathbf{e}_i$ zní:

$$\mathbf{e}_i = (\alpha^{-1}(\mathbf{j}_i) - P),\ 1 \leq i \leq n.$$

2. $X = (x, y): \quad \alpha(X) = y - 1.$

Řešení:
Postupujeme podle věty 1.2.9.

Případ č.1:

- Nejprve hledáme bod $P \in \mathbf{A}$, pro nějž $\alpha(P) = 0$.
  Označme $P = (p, q)$. Pak $\alpha(P) = \ln q$ a platí, že $\alpha(P) = 0$, jestliže $q = 1$. Dvojice $(0, e^0)$ náleží $\mathbf{A}$ – tudíž $P = (0, 1)$.
- Nyní je třeba nalézt funkční předpis pro zobrazení $f_P^{-1} \circ \alpha$ množiny $\mathbf{A}$ do $T^1 = \mathbb{R}$. Buď v libovolný prvek z $\mathbf{V} = \mathbb{R}$. Pak lze psát:
  $$(f_P^{-1} \circ \alpha)(v) = \alpha(f_P^{-1}(v)), \tag{1.10}$$
  čemu je však rovno $f_P^{-1}(v)$?
  Položme $f_P^{-1}(v) = X$, $X = (x, y)$. Pak zřejmě lze psát (užijeme definici inverzního zobrazení a posléze definici zobrazení f_P a f): $f_P^{-1}(v) = X \Leftrightarrow f_P(X) = v \Leftrightarrow f(P, X) = v \Leftrightarrow f((0, 1)(x, y)) = v \Leftrightarrow x = v \Leftrightarrow X = (v, e^v)$, tj. $f_P^{-1}(v) = (v, e^v)$.
  Zjištěné dosadíme do (1.10) a obdržíme:
  $$(f_P^{-1} \circ \alpha)(v) = \alpha((v, e^v)) = \ln(e^v) = v,$$
  a díky tomu, že zobrazení $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ dané předpisem $v \mapsto v$, je automorfizmem $\mathbb{R}$ jakožto vektorového prostoru, je *zkoumané zobrazení α afinní soustavou souřadnic v $\mathcal{A}$*.

Nalezněme nyní bázi $\mathcal{B}$, které tato soustava souřadnic odpovídá. Její počátek – bod P – jsme již určili. Její (jediný) bázový vektor v z $\mathbf{V} = \mathbb{R}$ je dán podmínkou

$$v = (\alpha^{-1} \circ f_P)(1), \text{ neboli } (f_P^{-1} \circ \alpha)(v) = (1),$$

odkud s využitím výše odvozeného předpisu pro zobrazení $f_P^{-1} \circ \alpha$ plyne: $v = 1$.
Zjistili jsme, že $\mathcal{B} = \langle (0, 1); 1 \rangle$.

Ukažme, že např. bod $X = (2, e^2)$ má opravdu v bázi $\mathcal{B}$ souřadnici $\alpha(X)$, tj., že $X = [2]_{\mathcal{B}}$ ve smyslu definice1.2.4, tedy že platí:

$$X = P + 2v,$$

neboli[24]

$$(2, e^2) = (0, 1) + 2.$$

Vzhledem k tomu, že $B = C + \mathbf{x}$, právě když $\mathbf{x} = B - C = f(C, B)$, postačí ověřit, zda $2 = f((0, 1)(2, e^2))$, což je však splněno.

[24] Zde je dobře vidět, že „+“ je opravdu jen symbolem.

Případ č.2:
Postupujeme zcela stejným způsobem.

- Nalezení bodu $P \in \mathbf{A}$, pro nějž $\alpha(P) = 0$.
  Označme $P = (p, q)$. Pak $\alpha(P) = q - 1$, tj. $\alpha(P) = 0$ pokud $q = 1$. Dvojice $(0, e^0)$ náleží $\mathbf{A}$ – tudíž opět $P = (0, 1)$.
- zobrazení $f_P^{-1} \circ \alpha$ množiny $\mathbf{A}$ do $T^1 = \mathbb{R}$.
  Zvolme libovolný prvek $v \in \mathbf{V} = \mathbb{R}$. Pak lze psát:
  $$(f_P^{-1} \circ \alpha)(v) = \alpha(f_P^{-1}(v)). \tag{1.11}$$
  Položíme-li $f_P^{-1}(v) = X, X = (x, y)$, obdržíme shodně jako výše:
  $$(f_P^{-1})(v) = (v, e^v),$$
  což dosadíme-li do (1.11) dává:
  $$(f_P^{-1} \circ \alpha)(v) = \alpha(v, e^v) = e^v - 1.$$
  Zobrazení $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ přiřazující prvku v prvek $e^v - 1$ však není homomorfizmem vektorových prostorů a tudíž α *není afinní soustavou souřadnic v* $\mathcal{A}$.

Ze zavedení soustavy souřadnic vyplývá, že se změnou báze se obecně změní i souřadnice daného bodu. Nalezněme nyní vztah mezi souřadnicemi téhož bodu v různých afinních bázích.

Nechť v $\mathcal{A}_n$ jsou zvoleny dvě báze:

$$\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle, \mathcal{C} = \langle Q; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n \rangle$$

Protože $Q \in \mathcal{A}$, existují jeho souřadnice vůči bázi $\mathcal{B}$, podobně existují souřadnice vektorů $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ v bázi $\mathcal{B}_0$:

$$\begin{gathered} Q = [b_1, b_2, \cdots, b_n]_{\mathcal{B}}, \\ \mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})_{\mathcal{B}_0}, \quad 1 \leq i \leq n. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Zvolme nyní libovolný bod $X \in \mathcal{A}$ a nechť k uvedeným bázím platí:

$$X = [x_1, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}} \wedge X = [y_1, \cdots, y_n]_{\mathcal{C}},$$

to jest

$$X = P + \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j, \tag{1.13}$$

$$X = Q + \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{a}_i. \tag{1.14}$$

Dosadíme-li ze vztahů (1.12) za Q a vektory $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$[25] do vyjádření (1.14) bodu X, dostáváme:

$$\begin{aligned}
X = Q + \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{a}_i &= \left(P + \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{e}_j\right) + \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{e}_j\right) = \\
&= \left(P + \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{e}_j\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (y_i a_{ij} \mathbf{e}_j) = \\
&= \left(P + \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{e}_j\right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i\right) \mathbf{e}_j \overset{(a)}{=} \\
&= P + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{e}_j + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i\right) \mathbf{e}_j\right) = \\
&= P + \left(\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(b_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i\right)}_{x_j} \mathbf{e}_j\right),
\end{aligned}$$

kde v kroku (a) bylo užito vlastnosti 5 z věty 1.1.13,[26] (v ostatních pak známých vlastností sumačních znaků a vlastností vektorů).

Z finálního vyjádření bodu X, z relace (1.13), definice (1.9) afinních souřadnic a věty 1.2.7 o jejich jednoznačnosti plyne, že označený výraz musí být roven j-té souřadnici bodu X vzhledem k bázi $\mathcal{B}$, tedy skaláru x_j.

Ukázali jsme tedy, že pro všechna j, $1 \le j \le n$, platí:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i + b_j \tag{1.15}$$

Věta 1.2.11 *Buďte $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$, $\mathcal{C} = \langle Q; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n \rangle$, libovolné afinní báze prostoru $\mathcal{A}_n$ a nechť*

$$Q = [b_1, b_2, \cdots, b_n]_{\mathcal{B}},$$

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})_{\mathcal{B}_0}, \quad 1 \le i \le n.$$

Pak pro každý bod $X \in \mathcal{A}_n$, $X = [x_1, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}$, platí: $X = [y_1, \cdots, y_n]_{\mathcal{C}}$, právě když skaláry $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ vyhovují relacím (1.15).

[25] Tedy $Q = P + \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{e}_j$, $\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{e}_j$, $1 \le i \le n$.

[26] **Dohoda:** Nadále již budeme větu 1.1.13 užívat zcela samozřejmě a nebudeme (zpravidla) na její aplikaci již zvláště upozorňovat.

O soustavě rovností (1.15) často hovoříme jako o *transformačních rovnicích afinní soustavy souřadnic určené bází $\mathcal{B}$ v soustavu souřadnic určenou bází $\mathcal{C}$.*

Čtenáři je jistě znám pojem *matice přechodu mezi bázemi vektorového prostoru*. Označme $\mathbf{P}_0$ matici přechodu od $\mathcal{B}_0$ k $\mathcal{C}_0$. [27] Pak zřejmě lze relaci (1.15) psát maticově (prověřte!):

$$(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n)\mathbf{P}_0 + (b_1, \cdots, b_n).$$

Zaveďme nyní *matici přechodu mezi afinními bázemi* $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

Definice 1.2.12 Buďte $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$, $\mathcal{C} = \langle Q; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n \rangle$, afinní báze prostoru $\mathcal{A}_n$ a nechť

$$Q = [b_1, b_2, \cdots, b_n]_{\mathcal{B}},$$

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})_{\mathcal{B}_0}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Pak matici $\mathbf{P}$ typu $(n+1) \times n+1)$ definovanou takto:

1. na pozici (i, j) pro $1 \leq i, j \leq n$ je prvek a_{ij},
2. na pozici $(n+1, j)$ pro $1 \leq j \leq n$ je prvek b_j,
3. na pozici $(n+1, n+1)$ je 1,
4. na pozici $(i, n+1)$ pro $1 \leq i \leq n$ je 0,

nazýváme *matice přechodu od afinní báze $\mathcal{B}$ k afinní bázi $\mathcal{C}$.*

Poznámka 1.2.13 Matice $\mathbf{P}$ má zřejmě následující tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} & \mathbf{P}_0 & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \end{matrix} \\ b_1 & \cdots & b_n & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{kde} \quad \mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Je zřejmě maticí regulární (proč?).

Poznámka 1.2.14 Transformační rovnice (1.15) lze maticově psát následujícím způsobem (rozepište si!), který je analogický vztahu pro transformace souřadnic vektorů:

$$(x_1, \cdots, x_n, 1) = (y_1, \cdots, y_n, 1)\mathbf{P}. \tag{1.16}$$

[27] Jde o matici $\mathbf{P}_0 = (a_{ij})_{n \times n}$, jejíž prvky udává vztah (1.12).

Příklad 1.2.15 Nechť je dán afinní prostor $\mathcal{A}_3$ a v něm afinní báze $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ takto:

$$\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle, \mathcal{C} = \langle Q; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle,$$

přičemž platí:

$$P = [1, 0, -1]_{\mathcal{C}}, \; \mathbf{e}_1 = (2, 0, 1)_{\mathcal{C}_0}, \; \mathbf{e}_2 = (1, 1, 0)_{\mathcal{C}_0}, \; \mathbf{e}_1 = (0, -1, 1)_{\mathcal{C}_0}.$$

Napište transformační rovnice pro přechod od soustavy souřadné dané bází $\mathcal{B}$ k soustavě dané bází $\mathcal{C}$.

Řešení:

K nalezení rovnic pro přechod od $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ k $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ je třeba znát souřadnice prvků báze $\mathcal{C}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ (viz věta 1.2.11).

Jednou z možností je tedy postupem známým z lineární algebry nalézt prvky a_{ij} s vlastností

$$\mathbf{a}_i = a_{i1}\mathbf{e}_1 + a_{i2}\mathbf{e}_2 + a_{i3}\mathbf{e}_3, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Známým postupem bychom pak zjistili (proveďte!), že:

$$\mathbf{a}_1 = (1, -1, -1)_{\mathcal{B}_0}, \; \mathbf{a}_2 = (-1, 2, 1)_{\mathcal{B}_0}, \; \mathbf{a}_1 = (-1, 2, 2)_{\mathcal{B}_0}.$$

Transformační rovnice (1.15) tedy znějí ($[x_1, x_2, x_3]$ jsou souřadnice vůči $\mathcal{B}$, $[y_1, y_2, y_3]$ vůči $\mathcal{C}$):

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_2 - y_3 + b_1 \\ x_2 &= -y_1 + 2y_2 + 2y_3 + b_2 \\ x_3 &= -y_1 + y_2 + 2y_3 + b_3 \end{aligned}$$

Je tedy již jen třeba nalézt konstanty b_1, b_2, b_3, což lze provést např. tak, že využijeme znalosti souřadnic některého bodu v obou soustavách – tímto je bod P, pro nějž současně platí (proč?):

$$P = [1, 0, -1]_{\mathcal{C}} = [0, 0, 0]_{\mathcal{B}}.$$

Dosazením do rovnic zjistíme, že $b_1 = -2, b_2 = 3$ a $b_3 = 3$.

Lze také postupovat jinak – zřejmě můžeme ihned napsat transformační rovnice pro přechod soustavy souřadnic určené bází $\mathcal{C}$ k soustavě určené bázi $\mathcal{B}$ ($[x_1, x_2, x_3]$ jsou opět souřadnice vůči $\mathcal{B}$, $[y_1, y_2, y_3]$ vůči $\mathcal{C}$):

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 + 1 \\ y_2 &= x_2 - x_3 \\ y_3 &= x_1 + x_3 - 1 \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

Nalézt předpis pro přechod inverzní, tj. od $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ k $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$, znamená vyjádřit x_1, x_2, x_3 pomocí y_1, y_2, y_3, neboli pohlížet na (1.17) jako na soustavu lineárních rovnic o neznámých x_1, x_2, x_3 (y_1, y_2, y_3 představují parametry rovnic) a tuto vyřešit. Matice této soustavy zní:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & 1 & 0 & y_1 - 1 \\ 0 & 1 & -1 & y_2 \\ 1 & 0 & 1 & y_3 + 1 \end{array}\right)$$

známým způsobem nalezneme její řešení ve tvaru:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_2 - y_3 - 2 \\ x_2 &= -y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 3 \\ x_3 &= -y_1 + y_2 + 2y_3 + 3 \end{aligned}$$

což právě jsou hledané rovnice.

1.3 Podprostory afinního prostoru

V této podkapitole zavedeme pro jisté podmnožiny bodů afinního prostoru (tj. jisté prostorové útvary) název *podprostor*. Všimneme si jeho analytického vyjádření a v podkapitole 1.4 i možných vzájemných poloh různých podprostorů.

1.3.1 Definice podprostoru afinního prostoru

Definice 1.3.1 Buď $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, -)$ afinní prostor. Nechť R je bod z $\mathcal{A}$ a $\mathbf{W}$ je podprostor ve $\mathbf{V}$. Pak se množina $\mathcal{M}$ označovaná $\mathcal{M} = \{R, \mathbf{W}\}$ a definovaná vztahem

$$\mathcal{M} = \{X \in \mathbf{A} : \ (X - R) \in \mathbf{W}\}$$

nazývá *podprostor afinního prostoru $\mathcal{A}$ určený bodem R a zaměřením $\mathbf{W}$. Dimenzí podprostoru $\mathcal{M}$* rozumíme dimenzi jeho zaměření.

Zaměření podprostoru $\mathcal{M}$ budeme značit symbolem $V(\mathcal{M})$.
Pro skutečnost, že $\mathcal{M}$ je podprostorem afinního prostoru $\mathcal{A}$, budeme užívat zápis $\mathcal{M} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$.[28]

Poznámka 1.3.2 Kromě názvu *podprostor afinního prostoru* budeme též užívat názvu *afinní podprostor*.

Nebude-li hrozit nebezpečí záměny s podprostorem vektorového prostoru (např. zaměření), budeme užívat též jen pojmu *podprostor*.

Označení 1.3.3 Je-li $\mathcal{M}$ afinní podprostor určený bodem R, jehož zaměření má bázi $\langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \rangle$, budeme $\mathcal{M}$ rovněž označovat

$$\mathcal{M} = \{R; \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\}.$$

Poznámka 1.3.4 Podmínku pro incidenci bod X s afinním podprostorem $\mathcal{M} = \{R, \mathbf{W}\}$ lze evidentně vyjádřit takto (proč?):

$$X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow (\exists \mathbf{x} \in \mathbf{W} : \ X = R + \mathbf{x})$$

[28] Krom pojmu *afinní podprostor* se někdy užívá pojmu *lineární podprostor* či *lineární varieta* afinního prostoru.

Příklad 1.3.5 Buď dán podprostor $\mathcal{M}$ ve zvolené soustavě souřadnic reálného prostoru $\mathcal{A}_4$ takto (jde o rovinu):

$$\mathcal{M} = \{R, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\},$$
$$R = [1, 2, 3, 4], \mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (2, 0, 0, 3).$$

Dále jsou dány body $X = [0, 3, 3, 1], Y = [2, 3, 3, 7]$. Rozhodněte o jejich incidenci s prostorem $\mathcal{M}$.
Řešení:
V souladu s definicí 1.3.1 je třeba zjistit, zda vektor $X - R$, resp. $Y - R$ náleží do zaměření $V(\mathcal{M}) = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$. Vzhledem k tomu, že $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou lineárně nezávislé, bude bod X náležet do $\mathcal{M}$ právě když budou vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, X - R$ lineárně závislé (podobně bod Y.)
Lineární závislost uvedených vektorů vyšetříme např. stanovením hodnosti matice sestavené z jejich souřadnic.
Protože $X - R = (-1, 1, 0, -3)$, jedná se o matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pro její hodnost platí $h(\mathbf{A}) \leq 3$, přičemž $h(\mathbf{A}) = 3$ nastane pokud jsou vyšetřované vektory lineárně nezávislé a $h(\mathbf{A}) < 3$, jsou-li lineárně závislé.
V tomto případě zjistíme, že $h(\mathbf{A}) = 2$, tudíž bod X náleží $\mathcal{M}$. Pro bod Y zjistíme podobně, že hodnost matice je 3, tudíž $Y \notin \mathcal{M}$.
V dalších příkladech ukážeme jiné postupy řešení tohoto problému.

Definovaný afinní podprostor je určitou podmnožinou v množině $\mathbf{A}$ bodů afinního prostoru $\mathcal{A}$. Je ovšem otázkou, zda je též afinní prostorem, tj. strukturou ve smyslu definice 1.1.1. Nechť tedy $\mathcal{M} = \{R, \mathbf{W}\}$ je podprostorem afinního prostoru $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$.

Protože $\mathbf{o} \in \mathbf{W}$, platí, že $R \in \mathcal{M}$, tudíž $\mathcal{M} \neq \emptyset$.
Nalezněme nyní zobrazení $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbf{W}$, které by mělo vlastnosti 1, 2 z definice 1.1.1. Označme $\bar{f}$ restrikci f na $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, tj. platí

$$\forall X, Y \in \mathcal{M} : \quad \bar{f}(X, Y) = f(X, Y).$$

Vzhledem k tomu, že z $X, Y \in \mathcal{M}$ plyne $f(R, X) \in \mathbf{W} \wedge f(R, Y) \in \mathbf{W}$, dostáváme

$$\bar{f}(X, Y) = f(X, Y) = f(X, R) + f(R, Y) = -f(R, X) + f(R, Y) \in \mathbf{W},$$

což značí, že $\bar{f}$ je zobrazení $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ do $\mathbf{W}$.

Jelikož $\bar{f}$ je jen restrikcí f, je zřejmé, že splňuje podmínku 1 z definice 1.1.1.

Ověřme dále platnost podmínky 2. Buď $\mathbf{x}$ libovolný vektor z $\mathbf{W}$. Bod $X = R + \mathbf{x}$ ovšem náleží $\mathcal{M}$ (proč?), a protože

$$\mathbf{x} = f(R, (R + \mathbf{x})) = f(R, X) = \bar{f}(R, X),$$

znamená to splnění podmínky 2.

Souhrnně řečeno, ukázali jsme, že $(\mathcal{M}, \mathbf{W}, \bar{f})$ je afinním prostorem, jehož množinou bodů je $\mathcal{M}$ a zaměřením $\mathbf{W}$.

Věta 1.3.6 *Každý afinní podprostor je současně afinním prostorem.*

Je-li $\mathcal{M} = \{R, \mathbf{W}\}$ afinním podprostorem prostoru $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$, pak je afinním prostorem $(\mathcal{M}, \mathbf{W}, f|\mathcal{M} \times \mathcal{M})$.[29]

Důsledek 1.3.7 *Všechny pojmy zaváděné pro afinní prostory lze přenést do jeho podprostorů (aniž by je bylo nutno znova definovat). Všechny věty platné pro afinní prostory platí i pro jejich podprostory (a není je tedy nutno zvlášť vyslovovat ani dokazovat).*

Důsledek 1.3.8 *Afinní podprostor dimenze 1 je přímkou.*[30]*Afinní podprostor dimenze 2 je rovinou.*

Definice 1.3.9 Každý afinní podprostor prostoru $\mathcal{A}$, jehož dimenze je rovna $(\dim \mathcal{A} - 1)$, se nazývá *nadrovina afinního prostoru $\mathcal{A}$.*

Důsledek 1.3.10 *Nadrovinou na přímce je jednobodová množina, nadrovinou v rovině je přímka a nadrovinou ve 3-rozměrném prostoru je rovina.*[31]

Povšimneme-li si definice afinního podprostoru, naskýtá se otázka, které body lze vzít za určující bod podprostoru a také, zda je zaměření podprostoru tímto podprostorem určeno jednoznačně.

Uvažujme podprostor $\mathcal{M} = \{R, \mathbf{W}\} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$.

(i) Buď K další bod určující $\mathcal{M}$, tj. $\mathcal{M}$=$\{R, \mathbf{W}\}$=$\{K, \mathbf{W}\}$. Evidentně $K \in \mathcal{M}$ (proč?).

---

[29] Díky této skutečnosti nemusíme nijak odlišovat znak pro rozdíl bodů/součet bodu a vektoru v $\mathcal{A}$ a v $\mathcal{M}$.

[30]
- Každý generátor zaměření přímky nazýváme *směrovým vektorem* této přímky.
- Jsou-li $X, Y \in \mathcal{A}, X \neq Y$, pak přímku $\{X, Y - X\}$ značíme též vžitým způsobem $\overleftrightarrow{XY}$.

[31] Odtud právě pojem nadrovina vznikl.

(ii) Buď K libovolný bod z $\mathcal{M}$ (tj. $K - R \in \mathbf{W}$). Zkonstruujme $\mathcal{P} = \{K, \mathbf{W}\}$ a zkoumejme vztah množin $\mathcal{M}$ a $\mathcal{P}$. Pro libovolný bod X lze psát:

$$X \in \mathcal{M} \Rightarrow X - R \in \mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{W} \ni (\underbrace{(X - R)}_{\in \mathbf{W}} - \underbrace{(K - R)}_{\in \mathbf{W}}) =$$
$$= (X - R) + (R - K) = X - K \Rightarrow X \in \mathcal{P},$$

čili $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$. Obrácená inkluze se ukáže analogicky – tedy $\mathcal{M} = \mathcal{P}$.

Věta 1.3.11 *Množina bodů, z nichž lze vybrat určující bod afinního podprostoru je rovna množině bodů tohoto podprostoru.*[32]

Nyní mějme dány $\mathcal{M} = \{R, \mathbf{W}\} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$ a $\mathcal{P} = \{T, \mathbf{U}\} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$, pro nějž $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$. Především dle věty 1.3.11: $\mathcal{P} = \{R, \mathbf{U}\}$.
Pro libovolný vektor $\mathbf{x}$ lze psát:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{W} \Rightarrow (R + \mathbf{x}) \in \mathcal{M} \Rightarrow (R + \mathbf{x}) \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathbf{U} \ni ((R + \mathbf{x}) - R) = \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{U},$$

neboli $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}$.

Věta 1.3.12 *Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{P} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$. Je-li $\mathcal{M}$ částí $\mathcal{P}$, pak $V(\mathcal{M})$ je částí $V(\mathcal{P})$.*

Z vět 1.3.11 a 1.3.12 dostáváme odpověď na výše položenou otázku.

Důsledek 1.3.13 *Afinní podprostor $\{R, \mathbf{W}\}$ se rovná podprostoru $\{T, \mathbf{U}\}$, právě když $R \in \{T, \mathbf{W}\}$ a $\mathbf{W} = \mathbf{U}$.*

1.3.2 Parametrické rovnice podprostoru afinního prostoru

Uvažujme afinní podprostor $\mathcal{M} = \{R, \mathbf{W}\}$ prostoru $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, -)$. Nechť $\mathbf{W}$ má bázi $[\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k]$. Pak (v souladu s důsledkem 1.3.7 věty 1.3.6) tvoří $\mathcal{D} = \langle R; \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \rangle$ afinní bázi $\mathcal{M}$ a tudíž pro každý bod $X \in \mathcal{A}$ platí (viz relace (1.9)):

$$X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \exists t_1, \cdots, t_k \in T : \; X = R + t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k,$$

přičemž skaláry $t_1, \cdots, t_k$ určují bod X jednoznačně, jakož i bod X určuje jednoznačně skaláry $t_1, \cdots, t_k$ (srv. věta 1.2.7).[33]

[32]Symbolicky: $(\{K, \mathbf{W}\} = \{R, \mathbf{W}\}) \Leftrightarrow (K \in \{R, \mathbf{W}\})$.
[33]uvedená fakta lze také odvodit přímo z poznámky 1.3.4 (promyslete si)

Věta 1.3.14 *Buď $\mathcal{M} = \{R; \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\}$ afinní podprostor prostoru $\mathcal{A}$. Pak platí, že bod X náleží podprostoru $\mathcal{M}$, právě když*

$$\exists t_1, \cdots, t_k \in T: \; X = R + t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k. \tag{1.18}$$

Přitom při zvolené afinní bázi podprostoru $\mathcal{M}$ je uspořádaná k-tice $t_1, \cdots, t_k \in T^k$ bodem X určena jednoznačně a naopak.[34]

Definice 1.3.15 Buď $\mathcal{M}_k = \{R; \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\}$ afinní podprostor prostoru $\mathcal{A}$. Zobrazení $T^k \to \mathcal{M}_k$ definované vztahem

$$(t_1, \cdots, t_k) \mapsto R + t_1\mathbf{u}_1 + \cdots + t_k\mathbf{u}_k \tag{1.19}$$

se nazývá *parametrické vyjádření podprostoru $\mathcal{M}$ vzhledem k dané afinní bázi podprostoru $\mathcal{M}$.*

Skaláry $t_1, \cdots, t_k \in T$ se nazývají *vnitřní souřadnice bodu X* popř. *parametry bodu X.*[35]

Poznámka 1.3.16 Parametrické vyjádření přímky $p = \{R, \mathbf{u}\}$ tudíž zní:

$$p: X = R + t\mathbf{u}, \quad t \in T,$$

parametrické vyjádření roviny $\rho = \{R, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$:

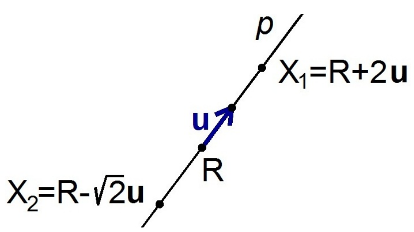
$$\rho: X = R + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad t, s \in T,$$

což je „důkazem“ toho, že námi zavedené pojmy *přímka, rovina* odpovídají jejich intuitivnímu chápání.[36] Mj. odtud vidíme, že všechny přímky nad týmž tělesem skalárů mají

[34] Povšimněte si, že samostatný afinní prostor $\mathcal{A}$ do vyjádření bodů podprostoru $\mathcal{M}$ vstupuje *pouze* prostřednictvím zobrazení $+, -$ (jde opět o důsledek věty 1.3.6).

[35] Jde o *souřadnice bodu X* v afinní soustavě souřadnic určené bází $\mathcal{M}$ jako afinního prostoru $\mathcal{M}$. Parametrické vyjádření je zřejmě inverzí k této *vnitřní* soustavě souřadnic (souřadnice se tradičně chápou jako objekt přiřazený bodu, kdežto v případě parametrického vyjádření se bod přiřazuje parametrům, což je ostatně běžné též např. v diferenciální geometrii).

[36] Situaci si pro přímku p můžeme znázornit takto:



stejnou mohutnost množiny bodů, která je rovna mohutnosti tohoto tělesa. (Zobecněte pro podprostory jiné dimenze!)

Je žádoucí umět vyjádřit souřadnice bodů jistého podprostoru pomocí souřadnic jeho určujících prvků (tj. bodu a báze zaměření).
Uvažujme nyní afinní podprostor $\mathcal{M} = \{R; \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\}$ prostoru $\mathcal{A}$.
Nechť je v prostoru $\mathcal{A}$ zvolena některá soustava souřadnic – např. afinní bází $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \cdots$ $\cdots, \mathbf{e}_n\rangle$, a nechť v ní platí:

$$\left.\begin{aligned} R &= [r_1, r_2, \cdots, r_n]_{\mathcal{B}} \\ \mathbf{u}_i &= (u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{in})_{\mathcal{B}_0}\,, \quad 1 \leq i \leq k. \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

Bod X náleží $\mathcal{M}$, právě když splňuje (1.18). Opakovanou aplikací věty 1.2.8 zjišťujeme, že (1.18) je pro $X = [x_1, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}$ ekvivalentní následujícímu systému rovností:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 + t_1u_{11} + t_2u_{21} + \cdots + t_ku_{k1} \\ x_2 &= r_2 + t_1u_{12} + t_2u_{22} + \cdots + t_ku_{k2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= r_n + t_1u_{1n} + t_2u_{2n} + \cdots + t_ku_{kn} \end{aligned} \tag{1.21}$$

Právě zjištěné skutečnosti vyjadřuje následující tvrzení.

Věta 1.3.17 *Buď $\mathcal{M} = \{R; \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\}$ afinní podprostor prostoru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \cdots$ $\cdots, \mathbf{e}_n\rangle$ některá afinní báze prostoru $\mathcal{A}$ a nechť bod R a vektory $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ mají souřadnice dle (1.20).*
Pak platí, že bod $X = [x_1, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}$ náleží podprostoru $\mathcal{M}$, právě když existují $t_1, \cdots, t_k \in T$ tak, že pro souřadnice bodu X platí (1.21).

Definice 1.3.18 Za předpokladů věty 1.3.17 se soustava rovností (1.21) nazývá *soustava parametrických rovnic podprostoru $\mathcal{M}$ vzhledem ke v něm zvolené bázi a bázi prostoru $\mathcal{A}$.*

Poznámka 1.3.19 Relace (1.21) vyjadřují vztah mezi *vnitřními souřadnicemi* bodu X a jeho *souřadnicemi v soustavě souřadnic v $\mathcal{A}$*. K odvození věty 1.3.17 bylo možné užít jistým způsobem věty 1.2.11 (promyslete si).

Poznámka 1.3.20 Vzhledem k tomu, že každý vektorový prostor nemá obecně bázi jedinou a vzhledem k větě 1.3.11 lze tvrdit, že *systém parametrických rovnic afinního podprostoru vzhledem k dané bázi není tímto podprostorem určen jednoznačně.*

Příklad 1.3.21 Buď dán podprostor $\mathcal{M}$ ve zvolené soustavě souřadnic reálného prostoru $\mathcal{A}_4$ takto (jde o rovinu):

$$\mathcal{M} = \{R; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\},$$
$$R = [1, 2, 3, 4,],\ \mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0),\ \mathbf{u}_2 = (2, 0, 0, 3).$$

Napište parametrické rovnice tohoto podprostoru.

Dále jsou dány body $X = [0, 3, 3, 1], Y = [2, 3, 3, 7]$. Rozhodněte o jejich incidenci s podprostorem $\mathcal{M}$.

Řešení:

Napsat parametrické rovnice (1.21) je mechanickou záležitostí:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + t_1 + 2t_2 \\ x_2 &= 2 + t_1 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= 4 \qquad\quad + 3t_2 \end{aligned} \quad ; \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Zjistěme s jejich využitím, zda body $X = [0, 3, 3, 1], Y = [2, 3, 3, 7]$ náleží $\mathcal{M}$ či nikoli. S ohledem na větu 1.3.17 to znamená zjistit, zda k danému bodu existují parametry t_1, t_2 tak, aby jeho souřadnice vyhovovaly parametrickým rovnicím.

Pro bod X to značí zjistit, zda následující soustava rovnic má či nemá v $\mathbb{R}$ řešení.

$$\begin{aligned} 1 + t_1 + 2t_2 &= 0 \\ 2 + t_1 \qquad\quad &= 3 \\ 3 \qquad\qquad\quad &= 3 \\ 4 \qquad\quad + 3t_2 &= 1 \end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že soustava má (jediné) řešení $t_1 = 1, t_2 = -1$, tj. $X \in \mathcal{M}$.

V případě bodu Y zjistíme, že soustava není řešitelná, $Y \notin \mathcal{M}$ (srv. příklad 1.3.5).

1.3.3 Obecné rovnice podprostoru afinního prostoru

Uvažujme afinní prostor $\mathcal{A}$ se zvolenou bází $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$.

Vyšetřujme nyní množinu $\mathcal{M}$ bodů $X \in \mathcal{A},\ X = [x_1, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}$, jejichž souřadnice jsou řešením soustavy lineárních rovnic[37]

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}, \text{ kde } \mathbf{M} \in T_{rn} \tag{1.22}$$

Označme $\mathbf{W}$ množinu vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)_{\mathcal{B}_0}$, jejichž souřadnice řeší homogenní soustavu rovnic přiřazenou k soustavě (1.22), tj. soustavu

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Jak víme, tvoří množina řešení soustavy (1.23) vektorový podprostor v T^n dimenze $n - h(\mathbf{M})$, a tudíž $\mathbf{W}$ je podprostorem ve $\mathbf{V}_n$ téže dimenze.

[37] T_{rn} označuje množinu matic $r \times n$ nad tělesem T.

Předpokládejme dále, že soustava (1.22) je řešitelná a označme $(r_1, \cdots, r_n)$ některé z jejích řešení. Jak je známo, je $(x_1, \cdots, x_n)$ řešením soustavy (1.22), právě když n-tice $(u_1, \cdots, u_n)$,

$$(u_1, \cdots, u_n) = (x_1, \cdots, x_n) - (r_1, \cdots, r_n),$$

je řešením přiřazené soustavy (1.23).

Budeme-li $(r_1, \cdots, r_n)$ považovat za souřadnice jistého bodu $R \in \mathcal{A}$ a $(u_1, \cdots, u_n)$ za souřadnice vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$, můžeme s přihlédnutím k větě 1.2.8, psát množinu $\mathcal{M}$ takto:

$$X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow (X - R \in \mathbf{W}),$$

což dle definice 1.3.1 znamená, že $\mathcal{M}$ je afinním podprostorem $\{R, \mathbf{W}\}$.

Věta 1.3.22 *Buď dána soustava lineárních rovnic o n neznámých, jejíž matice i matice rozšířená mají touž hodnost h. Pak body z $\mathcal{A}_n$, jejichž souřadnice ve zvolené bázi vyhovují dané soustavě, tvoří $(n-h)$-rozměrný afinní podprostor v $\mathcal{A}_n$. Zaměření tohoto podprostoru tvoří vektory, jejichž souřadnice ve zvolené bázi vyhovují přiřazené homogenní soustavě rovnic.*

Nyní jsme oprávněni vyslovit tuto definici:

Definice 1.3.23 Buď zvolena báze $\mathcal{B}$ afinního prostoru $\mathcal{A}_n$. Řešitelná soustava lineárních rovnic nad T

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & a_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1}x_1 & + & a_{r2}x_2 & + & \cdots & + & a_{rn}x_n & = & a_r \end{array}$$

se nazývá *soustava obecných rovnic afinního podprostoru $\mathcal{M}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$*, jestliže podprostor $\mathcal{M}$ je tvořen právě těmi body z $\mathcal{A}_n$, jejichž souřadnice vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ jsou řešením této soustavy rovnic a jsou-li rovnice této soustavy lineárně nezávislé.[38]

Poznámka 1.3.24 Počet r rovnic soustavy obecných rovnic k-rozměrného podprostoru afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ je tedy dán vztahem

$$r = n - k.$$

Bod (jednobodová množina) je v rovině dán dvěma, v 3-rozměrném prostoru pak třemi rovnicemi atd.

Přímka je tudíž v rovině dána rovnicí jedinou, v 3-rozměrném prostoru rovnicemi dvěma atd.

[38] Tj. žádáme, aby jejich počet byl *minimální*. Jde o požadavek pouze technického charakteru.

Rovina je v 3-rozměrném prostoru dána jednou rovnicí, v 4-rozměrném prostoru pak dvěma atd.

Nadrovina je dána rovnicí jedinou v prostoru libovolné dimenze.[39]

Poznámka 1.3.25 Soustava obecných rovnic afinního podprostoru vzhledem k dané bázi není tímto prostorem určena jednoznačně.[40]

Změní-li se báze afinního prostoru $\mathcal{A}$, změní se přirozeně i koeficienty soustavy obecných rovnic.

Mějme např. v jisté bázi $\mathcal{B}$ roviny $\mathcal{A}_2$ dánu přímku p obecnou rovnicí:

$$p : x + y - 2 = 0$$

a uvažujme další bázi $\mathcal{C}$, přičemž transformační rovnice pro přechod $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ znějí:

$$\begin{aligned} x &= 2x' + y' + 1 \\ y &= 3x' \end{aligned}$$

Jelikož $x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow (2x' + y' + 1) + 3x' - 2 = 0 \Leftrightarrow 5x' + y' - 1 = 0$, obecná rovnice přímky p v bázi $\mathcal{C}$ zní:

$$p : 5x' + y' - 1 = 0.$$

Tento postup „přímého dosazení“ z transformačních rovnic do soustavy obecných rovnic je neelegantní, zvláště v případě více rovnic a vyšší dimenze afinního prostoru rovněž pracný. Najděme proto *obecný vztah* mezi rozšířenými maticemi soustav obecných rovnic téhož afinního podprostoru v různých soustavách souřadnic afinního prostoru $\mathcal{A}$.

Buďte tedy $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ báze afinního prostoru $\mathcal{A}$ a nechť $\mathcal{M}$ je jistý afinní podprostor v $\mathcal{A}$. Vztah mezi soustavami souřadnic určenými bázemi $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ je v souladu s větou 1.2.11 dán transformačními rovnicemi ve tvaru

$$(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n)\mathbf{P}_0 + (b_1, \cdots, b_n). \tag{1.24}$$

Předpokládejme, že soustava obecných rovnic podprostoru $\mathcal{M}$ má vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ tvar (užijeme jejího maticového zápisu):

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}. \tag{1.25}$$

[39] Srv. též s větou 1.3.28 – např. přímku v $\mathcal{A}_3$ lze chápat jako průsečnici dvou různých rovin.

[40] Tato skutečnost je čtenáři jistě zřejmá z teorie řešení soustav lineárních rovnic.
Např. obě následující soustavy jsou soustavami obecných rovnic *téže* přímky $p \subset \mathcal{A}_3$ (proč?)

$$\begin{array}{rcl} 2x + y \phantom{{}+z} + 1 &=& 0 \\ y + z \phantom{{}+1} &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2x + y \phantom{{}+z} + 1 &=& 0 \\ 2x + 2y + z + 1 &=& 0 \end{array}.$$

Buď X libovolný bod z $\mathcal{A}$, $X = [x_1, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}$, $X = [y_1, \cdots, y_n]_{\mathcal{C}}$. Pak můžeme s ohledem na (1.24) a (1.25) psát:

$$X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{M} \left(\mathbf{P}_0^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\mathbf{M}\mathbf{P}_0^T\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} - \mathbf{M} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right).$$

Platí tudíž následující věta:

Věta 1.3.26 *Buď $\mathcal{M}$ podprostor afinního prostoru $\mathcal{A}$. Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ je libovolná dvojice afinních bází prostoru $\mathcal{A}$ a nechť $\mathbf{P}$ je matice přechodu od afinní báze $\mathcal{B}$ k afinní bázi $\mathcal{C}$.*[41] *Je-li*

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}$$

soustava obecných rovnic podprostoru $\mathcal{M}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$, pak

$$\left(\mathbf{M}\mathbf{P}_0^T\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} - \mathbf{M} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right).$$

je soustava rovnic tohoto podprostoru vzhledem k bázi $\mathcal{C}$.

Zatím jsme však nevyřešili otázku, zda vůbec ke každému afinnímu podprostoru soustava obecných rovnic existuje (a to přirozeně vzhledem k libovolné afinní bázi).

S ohledem na předchozí větu (věta 1.3.26) však postačí ukázat existenci soustavy obecných rovnic podprostoru v bázi jediné (proč?).

Uvažujme některý afinní podprostor $\mathcal{M} = \{R; \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\} \subseteq\subseteq \mathcal{A}_n$. Množinu $\langle R; \mathbf{u}_1, \cdots \cdots, \mathbf{u}_k \rangle$ lze doplnit vektory $\mathbf{u}_{k+1}, \cdots, \mathbf{u}_n$ na afinní bázi $\mathcal{B} = \langle R; \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \cdots, \mathbf{u}_n \rangle$ prostoru $\mathcal{A}_n$. Bod $X \in \mathcal{A}_n$ má vůči této bázi jednoznačně určeny souřadnice – lze jej tedy jediným způsobem psát ve tvaru (viz věta 1.2.7)

$$X = R + x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_k\mathbf{u}_k + x_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \cdots + x_n\mathbf{u}_n. \tag{1.26}$$

V souladu s větou 1.3.14 náleží bod X podprostoru $\mathcal{M}$, právě když je roven součtu bodu R a jisté lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$, což je ovšem s ohledem na jednoznačnost

[41] Viz poznámka 1.2.13.

vyjádření (1.26) ekvivalentní tomu, že pro bod $X = [x_1, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}$ platí:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 0 \\ x_{k+2} &= 0 \\ &\cdots \\ x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Relace (1.27) evidentně představují soustavu obecných rovnic podprostoru $\mathcal{M}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ (srv. definice 1.3.23).

Platí tedy následující tvrzení:

Věta 1.3.27 *Ke každému afinnímu podprostoru $\mathcal{M} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$ existuje vzhledem k libovolné afinní bázi prostoru $\mathcal{A}$ soustava obecných rovnic tohoto podprostoru.*

Uvažujme jistý podprostor $\mathcal{M}_{n-r} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$, který je v určité bázi $\mathcal{B}$ dán soustavou obecných rovnic $(1), (2), \cdots, (r)$.

$$\begin{array}{ll} (1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_1 \\ (2) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (r) & a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = a_r \end{array}$$

Rovnici (i) lze pro $i = 1, \cdots, r$ považovat za obecnou rovnici jisté nadroviny ν_i, čímž obdržíme množinu nadrovin $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r$. Z definice 1.3.23 vyplývá pro libovolný bod $X \in \mathcal{A}$:

$$X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow X \in \nu_1 \wedge X \in \nu_2 \wedge \cdots \wedge X \in \nu_r \Leftrightarrow X \in \bigcap_{1 \le i \le r} \nu_i.$$

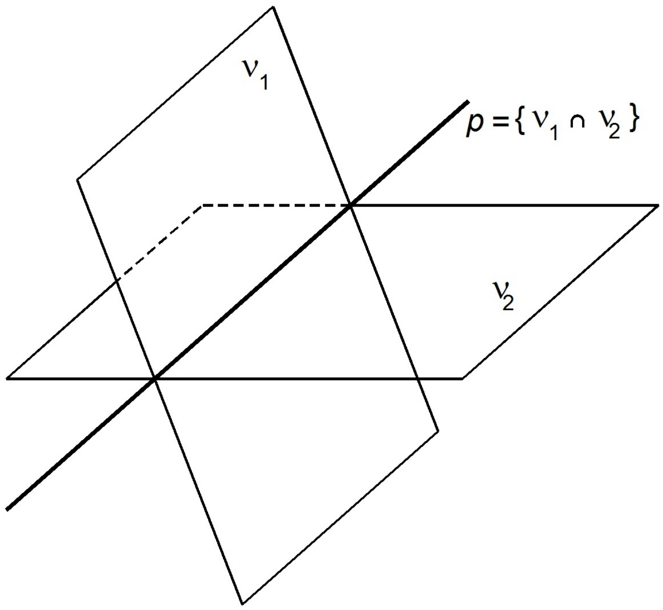
Platí tedy (a to i vzhledem k větě 1.3.27) následující tvrzení, které poskytuje „geometrickou“ interpretaci pojmu soustava obecných rovnic daného podprostoru.

Věta 1.3.28 *Ke každému k-rozměrnému afinnímu podprostoru $\mathcal{M}_k \subseteq\subseteq \mathcal{A}_n$ existuje alespoň jedna $(n-k)$-tice nadrovin prostoru $\mathcal{A}_n$ tak, že podprostor $\mathcal{M}_k$ je jejich průnikem.*

Obecné rovnice těchto nadrovin jsou lineárně nezávislé.

Následující obrázek (obr. 1.3.1) ilustruje tuto větu na příkladu přímky p jakožto průniku dvou různoběžných rovin (tj. nadrovin) ν_1, ν_2 v $\mathcal{A}_3$:

$$\begin{aligned} \nu_1 &: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \\ \nu_2 &: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_2 \end{aligned}$$



Obr. 1.3.1

Příklad 1.3.29 Buď dán podprostor $\mathcal{M}$ ve zvolené sosutavě souřadnic reálného prostoru $\mathcal{A}_4$ takto:

$$\mathcal{M} = \{R; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$$
$$R = [1,2,3,4],\ \mathbf{u}_1 = (1,1,0,0),\ \mathbf{u}_2 = (2,0,0,3).$$

Napište obecné rovnice tohoto podprostoru. Dále jsou dány body $X = [0,3,3,1], Y = [2,3,3,7]$. Rozhodněte o jejich incidenci s prostorem $\mathcal{M}$.
Řešení:
Je třeba najít soustavu lineárních rovnic tak, aby jejím řešením byla množina souřadnic právě všech bodů z $\mathcal{M}$.
Napíšeme-li parametrické rovnice podprostoru $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + t_1 + 2t_2 \\ x_2 &= 2 + t_1 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= 4 \qquad\ + 3t_2 \end{aligned} \tag{1.28}$$

musí představovat parametrické řešení hledané soustavy lineárních rovnic – nalézt rovnice hledané soustavy tedy znamená vyloučit parametr z rovnic (1.28). Z druhé rovnice vyjádříme $t_1 = x_2 - 2$, takže po dosazení do zbylých rovnic obdržíme:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_2 + 2t_2 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= 4 \qquad\ + 3t_2, \end{aligned}$$

nyní např. z první vyjádříme $t_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + 1)$, dosazení do zbylých dává soustavu obecných rovnic podprostoru $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_4 &= -11. \end{aligned}$$

Dále zjistíme, že souřadnice bodu X soustavě vyhovují – tj. $X \in \mathcal{M}$, zatímco souřadnice bodu Y nikoli – tj. $Y \notin \mathcal{M}$.

1.4 Vzájemná poloha podprostorů afinního prostoru

Zde si především povšimneme vzájemných poloh dvou afinních podprostorů. Při volbě názvů těchto poloh budeme vycházet z naší intuitivní představy o vzájemné poloze přímek, rovin ve fyzikálních prostorech dimenze 2 a 3.

1.4.1 Definice vzájemných poloh podprostorů afinního prostoru

Vyjdeme-li z naší intuitivní představy, bude přirozené označit přímku p za rovnoběžnou s přímkou q, mají-li kolineární směrové vektory. V prostoru dimenze 3 pokládáme přímku p za rovnoběžnou s rovinou α, leží-li směrový vektor přímky p v zaměření roviny α. V témže prostoru chápeme rovinu α jako rovnoběžnou s rovinou β, mají-li roviny α a β totéž zaměření. Všechny tyto případy jsou zřejmě pokryty následující (obecnější) definicí:

Definice 1.4.1 Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ afinní podprostory téhož prostoru $\mathcal{A}$. Řekneme, že podprostor $\mathcal{M}$ *je rovnoběžný s podprostorem* $\mathcal{N}$, což budeme značit $\mathcal{M} \parallel \mathcal{N}$, jestliže $V(\mathcal{M}) \subseteq V(\mathcal{N})$.

Poznámka 1.4.2 k definici 1.4.1

- Relace „býti rovnoběžný“ je zřejmě *reflexivní* a *tranzitivní relací* na množině všech podprostorů daného afinního prostoru. *Není* však obecně *symetrická* (proč?), a tudíž se nejedná obecně o relaci ekvivalence.

- Vzhledem k tomu, že $V(\mathcal{M}) \subseteq V(\mathcal{N})$ implikuje $V(\mathcal{M}) \supseteq V(\mathcal{N})$ (a v tomto případě tedy $V(\mathcal{M}) = V(\mathcal{N})$), právě když $\dim\mathcal{M} = \dim\mathcal{N}$, zjišťujeme, že relace „býti rovnoběžný“ je *symetrická* právě na množině všech podprostorů *téže dimenze* daného afinního prostoru[42] – je tedy na této množině relací *ekvivalence*.

- Nutnou podmínkou pro to, aby $\mathcal{M}$ byl rovnoběžný s $\mathcal{N}$, je $\dim\mathcal{M} \leq \dim\mathcal{N}$.

[42] Tj. na množině všech přímek, na množině všech rovin, na množině všech nadrovin apod. daného afinního prostoru.

- Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby $\mathcal{M} \parallel \mathcal{N}$ implikovalo $\mathcal{N} \parallel \mathcal{M}$, je $\dim\mathcal{M} = \dim\mathcal{N}$.

Uvážíme-li, že $\mathbf{U}_k \subseteq\subseteq \mathbf{W}_k$ implikuje $\mathbf{U}_k = \mathbf{W}_k$, pak bezprostředně z definice 1.4.1 (a podkapitoly 1.3.1) vyplývá:

Věta 1.4.3 *Buď $\mathcal{M} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$. Pak ke každému bodu $B \in \mathcal{A}$ existuje právě jeden podprostor $\mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$ tak, že $B \in \mathcal{N}$, $\mathcal{N} \parallel \mathcal{M}$ a $\dim\mathcal{N} = \dim\mathcal{M}$.*[43]

Úmluva 1.4.4 Je-li $\mathcal{M}$ rovnoběžný s $\mathcal{N}$ nebo $\mathcal{N}$ rovnoběžný s $\mathcal{M}$,[44] budeme říkat krátce, že *podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ jsou rovnoběžné.*

Poznámka 1.4.5 Úmluva 1.4.4 zavádí další relaci na množině všech podprostorů daného afinního prostoru – je sjednocením relace „být rovnoběžný“ definované v definici 1.4.1 a relace k ní inverzní. Takto zavedená relace je reflexivní a *symetrická*, avšak obecně není *tranzitivní*. Obě relace se zřejmě sobě rovnají na množině podprostorů *téže dimenze*.

Prozkoumejme nyní množinu společných bodů dvou rovnoběžných podprostorů.

Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$ a nechť $\mathcal{M} \parallel \mathcal{N}$. Předpokládejme, že $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ - existuje bod $B \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{N})$. S ohledem na větu 1.3.11 lze psát:

$$\mathcal{M} = \{B, V(\mathcal{M})\},\ \mathcal{N} = \{B, V(\mathcal{N})\},\ V(\mathcal{M}) \subseteq V(\mathcal{N}).$$

Pro libovolný bod $X \in \mathcal{A}$ pak obdržíme:

$$X \in \mathcal{M} \Rightarrow X - B \in V(\mathcal{M}) \Rightarrow X - B \in V(\mathcal{N}) \Rightarrow X \in \mathcal{N}$$

neboli

$$X \in \mathcal{N}.$$

Vyslovme získaný poznatek jako větu (jak souvisí s větou 1.3.12?):

Věta 1.4.6 *Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$. Jestliže $\mathcal{M} \parallel \mathcal{N}$ a $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$, pak $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.*

Definice 1.4.7 Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ afinní podprostory téhož prostoru $\mathcal{A}$. Řekneme, že *podprostor $\mathcal{M}$ inciduje s podprostorem $\mathcal{N}$*, jestliže $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Je-li $\mathcal{M}$ incidentní s $\mathcal{N}$ nebo $\mathcal{N}$ incidentní s $\mathcal{M}$, řekneme, že podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ *jsou incidentní.*

[43] Kolik existuje takových podprostorů dimenze menší než k?

[44] Tj. $(V(\mathcal{M}) \subseteq V(\mathcal{N}) \vee V(\mathcal{N}) \subseteq V(\mathcal{M}))$ neboli $(\mathcal{M} \parallel \mathcal{N} \vee \mathcal{N} \parallel \mathcal{M})$.
Symbolické označení v tomto případě zavádět nebudeme, neboť by mohlo dojít k nedorozumění.

Poznámka 1.4.8

- S ohledem na větu 1.3.12 je relace „být incidentní“ zřejmě podmnožinou relace „být rovnoběžný“.
- Nutnou podmínkou pro to, aby $\mathcal{M}$ byl incidentní s $\mathcal{N}$, je $\dim\mathcal{M} \leq \dim\mathcal{N}$.
- Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby se incidentní podprostory sobě rovnaly (tj. byly *totožné*) je rovnost jejich dimenzí.

Uvažujme nyní libovolné podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$. Pro jejich zaměření a množiny bodů existují zřejmě právě čtyři po dvou disjunktní možnosti:

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & (V(\mathcal{M}) \subseteq V(\mathcal{N}) \vee V(\mathcal{N}) \subseteq V(\mathcal{M})) \wedge \mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset \\ (ii) & (V(\mathcal{M}) \subseteq V(\mathcal{N}) \vee V(\mathcal{N}) \subseteq V(\mathcal{M})) \wedge \mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset \\ (iii) & (V(\mathcal{M}) \not\subseteq V(\mathcal{N}) \wedge V(\mathcal{N}) \not\subseteq V(\mathcal{M})) \wedge \mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset \\ (iv) & (V(\mathcal{M}) \not\subseteq V(\mathcal{N}) \wedge V(\mathcal{N}) \not\subseteq V(\mathcal{M})) \wedge \mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset \end{array}\right\} \tag{1.29}$$

V případech (i) a (ii) máme – s ohledem na větu 1.4.6 – vzájemnou polohu těchto podprostorů již pojmenovánu. Učiňme tak i v případech (iii), (iv) (opět s ohledem na naši intuitivní představu):

Definice 1.4.9 Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ afinní podprostory téhož prostoru $\mathcal{A}$. Řekneme, že *podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ jsou mimoběžné*, jestliže nejsou rovnoběžné a mají prázdný průnik.

Definice 1.4.10 Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ afinní podprostory téhož prostoru $\mathcal{A}$. Řekneme, že *podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ jsou různoběžné*, jestliže nejsou rovnoběžné a mají neprázdný průnik.

Užitím (1.29) a věty 1.4.6 dostáváme:

Věta 1.4.11 *Pro každé dva podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$ nastane právě jedna z následujících možností:*

(i) podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ jsou rovnoběžné a nemají žádné společné body,

(ii) podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ jsou incidentní,

(iii) podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ jsou mimoběžné,

(iv) podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ jsou různoběžné.

1.4.2 Průnik a spojení podprostorů afinního prostoru

Chápeme-li afinní podprostory jako podmnožiny v množině bodů afinního prostoru, můžeme samozřejmě sestrojit jejich průnik – tj. nalézt společné body uvažovaných podprostorů. Vzniká tak přirozená otázka, zda průnik afinních podprostorů je afinním podprostorem.

Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$. V případě $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ se o podprostor nejedná (proč?). Nechť $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ a nechť B je některý společný bod podprostorů. Pak:

$$\mathcal{M} = \{B; V(\mathcal{M}), \ \mathcal{N} = \{B; V(\mathcal{N})\}$$

a můžeme pro libovolný bod $X \in \mathcal{A}$ psát:

$$X \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N} \Leftrightarrow X \in \mathcal{M} \wedge X \in \mathcal{N} \Leftrightarrow X - B \in V(\mathcal{M}) \wedge X - B \in V(\mathcal{N}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X - B \in (V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N})) \Leftrightarrow X \in \{B, V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N})\},$$

čímž je dokázána následující věta:

Věta 1.4.12 *Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ afinní podprostory prostoru $\mathcal{A}$, B nechť je libovolný bod jejich průniku. Pak je průnik podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ afinním podprostorem v $\mathcal{A}$ a platí*

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{B, V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N})\}.$$

Definice 1.4.13 Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ afinní podprostory prostoru $\mathcal{A}$. Podprostor $\mathcal{S} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$, pro který platí

1. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S} \wedge \mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}$,
2. $\forall \mathcal{T} \subseteq\subseteq \mathcal{A}: \quad \mathcal{M} \subseteq \mathcal{T} \wedge \mathcal{N} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$,

se nazývá *spojením podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$* a značí se $\mathcal{M} + \mathcal{N}$.[45]

V případě, kdy navíc $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$, nazýváme jejich spojení *přímým* a značíme je $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$.

Naskýtá se otázka, je-li podprostor $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ určen podprostory $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jednoznačně – nechť $\mathcal{S}, \mathcal{R}$ jsou spojením podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$. Pak na základě definice 1.4.13 bude platit:

(i) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S} \wedge \mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}$,

(ii) $\forall \mathcal{T} \subseteq\subseteq \mathcal{A}: \ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{T} \wedge \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$,

(iii) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R} \wedge \mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}$,

[45] Evidentně $\mathcal{M} + \mathcal{N} = \mathcal{N} + \mathcal{M}$.

(iv) $\forall \mathcal{T} \subseteq\subseteq \mathcal{A}: \ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{T} \wedge \mathcal{N} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$

Užitím vlastnosti (i) a (iv) obdržíme $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, užitím (iii) a (ii) pak dostáváme $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$, takže zjišťujeme, že $\mathcal{S} = \mathcal{R}$.

Lemma 1.4.14 *Ke každým dvěma podprostorům afinního prostoru $\mathcal{A}$ existuje nejvýše jeden podprostor v $\mathcal{A}$, který je jejich spojením.*

Poznámka 1.4.15 Pro libovolné afinní podprostory téhož afinního prostoru zřejmě platí:[46]

- Spojení dvou afinních podprostorů je nejmenším (ve smyslu inkluze) z podprostorů obsahujících oba dané podprostory.
- Je-li průnik dvou podprostorů neprázdný, je největším z podprostorů obsažených v obou daných podprostorech.

Dosud je otevřenou otázkou, zda ke každým dvěma afinním podprostorům vůbec spojení existuje, a pokud ano, čím je určeno.

Intuitivně očekáváme, co např. bude spojením dvou různých přímek v rovině či spojením roviny a bodu, který v ní neleží, ve 3-rozměrném prostoru.

Nalezněme nyní podprostor, který je spojením dvou afinních podprostorů.

Uvažujme $\mathcal{M} = \{B; \mathbf{U}\}$, $\mathcal{N} = \{C; \mathbf{W}\}$. Jelikož $B, C \in \mathcal{M} + \mathcal{N}$, náleží $C - B$ do zaměření podprostoru $\mathcal{M} + \mathcal{N}$. Bude proto účelné vyšetřit vztah podprostoru $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ a $\mathcal{Q} = \{B, \mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B]\}$.

(i) Protože $\mathbf{U} \subseteq (\mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B])$, je $\mathcal{M} \parallel \mathcal{Q}$, a jelikož $B \in \mathcal{M} \cap \mathcal{Q}$, dostáváme odtud dle věty 1.4.6, že $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{Q}$.

(ii) Pro bod C lze psát: $C = B + (C - B)$, avšak $(C - B) \in \mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B]$, a proto $C \in \mathcal{Q}$. Ze stejných důvodů jako v (i) tedy obdržíme $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Q}$.

(iii) Buď $\mathcal{T}$ libovolný podprostor v $\mathcal{A}$ s vlastností $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq \mathcal{T}$. Pak dle věty 1.3.12 je $V(\mathcal{M}) \subseteq V(\mathcal{T}) \wedge V(\mathcal{N}) \subseteq V(\mathcal{T})$ a protože $B \in \mathcal{M}, C \in \mathcal{N}$, plyne z $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq \mathcal{T}$, že $C - B \in V(\mathcal{T})$, neboli $[C - B] \subseteq V(\mathcal{T})$, dostáváme následně:[47]

$$(\mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B]) \subseteq V(\mathcal{T}), \quad \text{čili} \quad \mathcal{Q} \parallel \mathcal{T}.$$

Vzhledem k tomu, že $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T}$, dostáváme $B \in \mathcal{T}$, takže $\mathcal{Q} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$, a tedy dle věty1.4.6 obdržíme $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{T}$.

[46] Druhá část je důsledkem vlastností průniku množin a věty 1.4.12.

[47] Z lineární algebry je známo, že pro libovolné vektorové podprostory $U, W \subseteq T$ platí: $U \subseteq T \wedge W \subseteq T \Rightarrow U + W \subseteq T$.

Ukázali jsme, že podprostor $\mathcal{Q}$ je spojením podprostorů $\mathcal{M}, \mathcal{N}$. S ohledem na lemma 1.4.14 tedy platí:[48]

Věta 1.4.16 *Ke každým dvěma podprostorům afinního prostoru $\mathcal{A}$ existuje právě jeden podprostor, který je jejich spojením.*

Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ afinní podprostory prostoru $\mathcal{A}$ a B, C nechť jsou libovolné body po řadě z $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$. Pak platí:

$$\mathcal{M} + \mathcal{N} = \{B, V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N}) + [C - B]\}.$$

Nalezněme nyní některé nutné a postačující podmínky pro to, aby průnik dvou podprostorů byl *neprázdný*.

(i) Pro libovolné $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$ můžeme psát:[49]

$$\begin{gathered}\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{A} : \ X \in \mathcal{M} \wedge X \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{u} \in V(\mathcal{M}), \mathbf{v} \in V(\mathcal{N}) : \ X = B + \mathbf{u} \wedge X = C + \mathbf{v} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{u} \in V(\mathcal{M}), \mathbf{v} \in V(\mathcal{N}) : \ B + \mathbf{u} = C + \mathbf{v} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{u} \in V(\mathcal{M}), \mathbf{v} \in V(\mathcal{N}) : \ C - B = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \\ \overset{(*)}{\Leftrightarrow} C - B \in V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N}),\end{gathered}$$

čímž nalézáme první nutnou a postačující podmínku neprázdného průniku.

(ii) Nechť máme zkoumané podprostory zadány následujícím způsobem:

$$\mathcal{M} = \{B; \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\}, \mathcal{N} = \{C; \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_h\}.$$

Uvážíme-li, že $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_h\}$ generuje $V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N})$ (viz lineární algebra), je podmínka nalezená v (i) zřejmě ekvivalentní tomu, že $C - B$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_h$.

(iii) Povšimněme si nyní vztahu mezi dimenzí $V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N})$ a dimenzí $V(\mathcal{M} + \mathcal{N})$ (k čemuž nás inspiruje (i) a věta 1.4.16).
Zřejmě můžeme psát:

$$V(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = (V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N}) + [C - B]) \supseteq V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N})$$

[48] Uvažujme dvě různé přímky p, q v rovině $\mathcal{A}_2$, nechť např. mají společný bod R – lze je tedy psát takto:

$$p = \{R, \mathbf{u}\}, q = \{R, \mathbf{v}\},$$

kde $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé – jinak by totiž $p = q$ (proč? – užijte větu 1.4.6). Pak užitím této věty dostáváme:

$$p + q = \{R, [\mathbf{u}] + [\mathbf{v}] + [\mathbf{o}]\} = \{R, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]\} = \{R, \mathbf{V}_2\} = \mathcal{A}_2,$$

což jsme intuitivně očekávali (ke stejnému závěru dojdeme podobně i v případě, kdy $p \cap q = \emptyset$).

[49] V ekvivalenci $(*)$ užijeme faktu, že vektorový podprostor obsahuje s každým svým vektorem i vektor k němu opačný.

takže

$$V(\mathcal{M}+\mathcal{N}) = V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N}) \Leftrightarrow C - B \in V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N}).$$

Zjišťujeme tak, že rovnost $\dim V(\mathcal{M}+\mathcal{N}) = \dim(V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N}))$ je ekvivalentní podmínce nalezené v (i).

Shrneme zjištěné poznatky do věty:

Věta 1.4.17 *Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ libovolné podprostory v $\mathcal{A}$, B, C nechť jsou libovolné body s vlastností $B \in \mathcal{M}, C \in \mathcal{N}$. Pak jsou následující podmínky navzájem ekvivalentní.*

1. *průnik podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je neprázdný;*
2. $C - B \in V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N})$*;*
3. $C - B$ *je lineární kombinací vektorů* $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_h$*, kde* $\langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \rangle$*, resp.* $\langle \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_h \rangle$*, je báze* $V(\mathcal{M})$*, resp.* $V(\mathcal{N})$*;*[50]
4. $\dim(\mathcal{M}+\mathcal{N}) = \dim(V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N}))$.

Poznámka 1.4.18 Z odstavce (iii) v odvození věty 1.4.17 plyne:[51]
Pro libovolné podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq\subsetneq \mathcal{A}$ nastává vždy právě jedna z následujících možností:

$$\dim V(\mathcal{M}+\mathcal{N}) = \dim(V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N})) \vee \dim V(\mathcal{M}+\mathcal{N}) = \dim(V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N})) + 1$$

Užitím věty 1.4.17 a věty 1.4.12 dále získáme kriterium *jednobodového průniku* dvou afinních podprostorů. Dva afinní podprostory $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ mají jednobodový průnik, právě když

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset \wedge \dim(V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N})) = 0.$$

Stačí tedy připojit ke (kterékoli) z nutných a postačujících podmínek pro neprázdnost $\mathcal{M}\cap\mathcal{N}$ ekvivalent požadavku $\dim(V(\mathcal{M})\cap V(\mathcal{N}))=0$. Tyto ekvivalenty, jak víme z lineární algebry, znějí např. takto (zdůvodněte!):

(i) $V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N}) = V(\mathcal{M}) \oplus V(\mathcal{N})$;

(ii) je-li $\langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \rangle$ báze $V(\mathcal{M})$ a $\langle \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_h \rangle$ báze $V(\mathcal{N})$, jsou vektory $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$, $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_h$ lineárně nezávislé;

(iii) $\dim V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N}) = \dim V(\mathcal{M}) + \dim V(\mathcal{N})$.

[50] Postačí, aby šlo o *množiny generátorů* (proč?).
[51] Konkrétně z relace $V(\mathcal{M}+\mathcal{N}) = (V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N}) + [C - B])$.

Platí proto následující věta:

Věta 1.4.19 *Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ libovolné podprostory v $\mathcal{A}$, B, C nechť jsou libovolné body s vlastností $B \in \mathcal{M}, C \in \mathcal{N}$. Pak jsou následující podmínky navzájem ekvivalentní.*

1. *průnik podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je jednobodový;*
2. *$C - B \in V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N})$ a $V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N}) = V(\mathcal{M}) \oplus V(\mathcal{N})$;*
3. *$C - B$ je lineární kombinací lineárně nezávislé množiny vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$, $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_h$, kde $\langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k \rangle$, resp. $\langle \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_h \rangle$, je bází $V(\mathcal{M})$, resp. $V(\mathcal{N})$;*
4. $\dim(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = \dim(V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N})) = \dim \mathcal{M} + \dim \mathcal{N}$.

Nalezněme nyní vztah mezi dimenzemi jednotlivých podprostorů, jejich spojení a jejich průniku, resp. průniku jejich zaměření.

Uvažujme nyní $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{M} = \{B, \mathbf{U}\}, \mathcal{N} = \{C, \mathbf{W}\}$. Musíme rozlišit případ neprázdného a prázdného průniku $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$.

(i) Nechť $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$. Z věty 1.4.17 plyne, že pak $C - B \in \mathbf{U} + \mathbf{W}$ a lze psát:[52]

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{M} + \mathcal{N}) &\overset{(a)}{=} \dim V(\mathcal{M} + \mathcal{N}) \overset{(b)}{=} \dim((\mathbf{U} + \mathbf{W}) + [C - B]) = \\ &= \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \overset{(c)}{=} \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \overset{(d)}{=} \\ &\overset{(d)}{=} \dim \mathcal{M} + \dim \mathcal{N} - \dim(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}),\end{aligned}$$

kde dále v rovnosti (b) užijeme větu 1.4.16, v (a), (d) definici dimenze afinního podprostoru, v (c) Grassmanovu formuli pro vektorové prostory a v (d) navíc větu 1.4.12.

(ii) $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Zde z věty 1.4.17 platí $C - B \notin \mathbf{U} + \mathbf{W}$ a analogickým způsobem jako v (i) lze odvodit:

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{M} + \mathcal{N}) &= \dim V(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = \dim((\mathbf{U} + \mathbf{W}) + [C - B]) = \\ &= \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + 1 = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) + 1 = \\ &= \dim \mathcal{M} + \dim \mathcal{N} - \dim(V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N})) + 1.\end{aligned}$$

Dokázali jsme tak následující větu:

[52] S přihlédnutím k definici dimenze afinního podprostoru a za použití Grassmanova vztahu pro vektorové podprostory.

Věta 1.4.20 *Pro libovolné podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ v $\mathcal{A}$ platí:*

1. *je-li $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$, pak*

$$\dim(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = \dim \mathcal{M} + \dim \mathcal{N} - \dim(\mathcal{M} \cap \mathcal{N});$$

2. *je-li $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$, pak*

$$\dim(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = \dim \mathcal{M} + \dim \mathcal{N} - \dim(V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N})) + 1.$$

Poznámka 1.4.21 Oba odstavce právě uvedené věty jsou zřejmě ekvivalencemi (proč? - viz Poznámka 1.4.18).

1.4.3 Některé konkrétní případy vzájemných poloh

V tomto odstavci vyšetříme vzájemné polohy některých konkrétních podprostorů (dvojice přímek, dvojice rovin, přímky a roviny, přímky a nadroviny). Jde o ilustrační příklady k vyložené teorii a umožní nám rovněž porovnat naše představy intuitivní s výsledky této teorie.

Pro účely tohoto odstavce zaveďme pro každé dva podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ následující označení:

$$s = \dim(V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N})), \ s' = \dim(\mathcal{M} + \mathcal{N}).$$

Na definice vzájemných poloh se nadále odvolávat nebudeme.

1.4.3.1 Vzájemná poloha dvou přímek v $\mathcal{A}_n$

Uvažujme dvě přímky $p = \{B; \mathbf{a}\}, q = \{C; \mathbf{b}\}$. Pak lze pro s, s' psát:

$$s = \dim[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \ s' = \dim[\mathbf{a}, \mathbf{b}, C - B].$$

Pro s mohou zřejmě nastat dva případy: $s = 1$, nebo $s = 2$ (druhý případ až v $\mathcal{A}_2$[53] – proč?).

(i) $\underline{s = 1}$ (tj. $\mathbf{a} = t\mathbf{b}, t \neq 0$) $\Rightarrow V(p) = V(q) \Rightarrow p, q$ jsou **rovnoběžné**, a tedy podle věty 1.4.11 či 1.4.6 buď nemají další společné body, nebo jsou **incidentní**, což vzhledem k rovnosti dimenzí značí **totožné** (srv. pozn. 1.4.8).

O průniku rozhodneme dle věty 1.4.17 – $p \cap q \neq \emptyset \Leftrightarrow s = s'$:

(a) $s' = 1 = s$ (tj. $C - B \in [\mathbf{a}]$) $\Rightarrow p = q$ jsou **totožné**,

(b) $s' = 2 \neq s$ (tj. $C - B \notin [\mathbf{a}]$) $\Rightarrow p = q$ jsou **rovnoběžné různé** (tento případ může nastat až v $\mathcal{A}_2$).

[53] Obratem „až v prostoru dimenze $\mathcal{A}_k$“ rozumíme „v prostoru dimenze k a vyšší“.

(ii) <u>s=2</u> (tj. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou lineárně nezávislé) $\Rightarrow V(p) \not\subset V(q)$ i $V(q) \not\subset V(p) \Rightarrow p, q$ nejsou rovnoběžné $\Rightarrow p, q$ jsou tedy buď **různoběžné**, nebo **mimoběžné** (viz věta 1.4.11)

Dále rozlišíme dle průniku (opět dle 1.4.17 $p \cap q \neq \emptyset \Leftrightarrow s = s'$):

(a) $s' = 2 = s$ (tj. $C - B \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$) $\Rightarrow p \cap q \neq \emptyset \Rightarrow p, q$ jsou **různoběžné**, průnikem je jediný bod (věta 1.4.20: $\dim p \cap q = 1 + 1 - s' = 2 - 2 = 0$)[54]

(b) $s' = 3 \neq s$ (tj. $C - B \notin [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$) $\Rightarrow p, q$ jsou **mimoběžné** (tento případ ovšem může nastat až v $\mathcal{A}_3$).

1.4.3.2 Vzájemná poloha přímky a k-rozměrného podprostoru v $\mathcal{A}_n$

Uvažme přímku $p = \{B; \mathbf{a}\}$ a k rozměrný podprostor $\mathcal{M} = \{C; \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_k\}$. Pak lze pro s, s' psát:

$$s = \dim[\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_k], \;\; s' = \dim[\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_k, C - B].$$

Protože vektory $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_k$ jsou lineárně nezávislé, bude $s \geq k$.

(i) $\underline{s = k}$ (tj. $V(p) \subseteq V(\mathcal{M})$) – buď je tedy přímka p **rovnoběžná** s $\mathcal{M}$ **bez společných bodů**, nebo p **inciduje** s $\mathcal{M}$ (tj. $p \subset \mathcal{M}$), což rozlišíme dle průniku:

(a) $s' = k = s$ (tj. $C - B \in [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_k]$) $\Rightarrow p \cap \mathcal{M} \neq \emptyset \Rightarrow p, \mathcal{M}$ jsou **incidentní,**

(b) $s' = k + 1 \neq s$ (tj. $C - B \notin [\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_k]$) $\Rightarrow p \cap \mathcal{M} = \emptyset \Rightarrow p, \mathcal{M}$ jsou **rovnoběžné bez společných bodů** (tento případ může nastat až v $\mathcal{A}_{k+1}$).

(ii) <u>s=k+1</u> (tj. $V(p) \not\subset V(\mathcal{M})$ a samozřejmě ani obráceně) $p, \mathcal{M}$ nejsou rovnoběžné a jsou tedy buď **různoběžné**, nebo **mimoběžné**.

(a) $s' = k + 1 = s$ (tj. $C - B \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_k]$) $\Rightarrow p \cap \mathcal{M} \neq \emptyset \Rightarrow p, \mathcal{M}$ jsou **různoběžné**, průnikem je jediný bod ($\dim p \cap \mathcal{M} = 1 + k - s' = 0$) – může nastat až v $\mathcal{A}_{k+1}$,

(b) $s' = k + 2 \neq s$ (tj. $C - B \notin [\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_k]$) $\Rightarrow p \cap \mathcal{M} = \emptyset \Rightarrow p, \mathcal{M}$ jsou **mimoběžné** (lze až v $\mathcal{A}_{k+2}$).

1.4.3.3 Vzájemná poloha přímky a nadroviny v $\mathcal{A}_n$

Uvažujme přímku $p = \{B; \mathbf{a}\}$ a nadrovinu $\nu = \{C; \mathbf{W}\}$. Pro s, s' platí:

$$s = \dim([\mathbf{a}] + \mathbf{W},)\; s' = \dim([\mathbf{a}] + \mathbf{W} + (C - B)).$$

Protože $\dim \mathbf{W}$ je $n - 1$, je $s \geq n - 1$.

(i) $\underline{s = n - 1}$ (tj. $\mathbf{a} \in \mathbf{W}$) $\Rightarrow$ přímka p je s nadrovinou ν buď **rovnoběžná bez společných bodů**, nebo p je **incidentní** s $\mathcal{M}$ (tj. $p \subset \nu$), což rozlišíme dle průniku:

[54] Zde (i dále) porovnejte s výsledkem dle věty 1.4.19.

(a) $s' = n - 1 = s$ (tj. $C - B \in \mathbf{W}$) $\Rightarrow p \cap \nu \neq \emptyset \Rightarrow p, \nu$ jsou **incidentní**,

(b) $s' = n \neq s$ (tj. $C - B \notin \mathbf{W}$) $\Rightarrow p \cap \nu = \emptyset \Rightarrow p, \nu$ jsou **rovnoběžné bez společných bodů**.

(ii) <u>s=n</u> (tj. $\mathbf{a} \notin \mathbf{W}$)) p, ν tedy nejsou rovnoběžné. Obecně je $s' = s$ nebo $s' = s + 1$, avšak druhá z možností není možná (proč?), proto tedy $s' = n = s$ (tj. $C - B \in (\mathbf{W} + [\mathbf{a}])$), z čehož plyne $p \cap \nu \neq \emptyset$ a p, ν jsou tedy **různoběžné**, přičemž mají společný **jediný bod** ($\dim p \cap \nu = 1 + (n-1) - s' = n - n = 0$).

Porovnejte získané výsledky s odstavcem 1.4.3.2.

1.4.3.4 Vzájemná poloha dvou rovin v $\mathcal{A}_n$

Uvažujme dvě roviny $\alpha = \{B; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, $\beta = \{C; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Pak lze pro s, s' psát:

$$s = \dim[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2], \ s' = \dim[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, C - B].$$

Protože dvojice $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ i $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ jsou lineárně nezávislé, je $s \geq 2$.

(i) <u>$s = 2$</u> – tj. $V(\alpha) = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = V(\beta) \Rightarrow \alpha, \beta$ jsou **rovnoběžné** a z analogických důvodů jako u dvou přímek, jsou buď α, β **bez společných bodů**, nebo jsou **totožné**.

Dále proto zkoumáme jejich průnik (opět dle věty 1.4.17):

(a) $s' = 2 = s$ (tj. $C - B \in [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$) $\Rightarrow \alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha, \beta$ jsou **totožné**,

(b) $s' = 3 \neq s$ (tj. $C - B \notin [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$) $\Rightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset \Rightarrow \alpha, \beta$ jsou **rovnoběžné – různé** (což může nastat až v $\mathcal{A}_3$).

(ii) <u>s=3</u> (tj. $V(\alpha)$ a $V(\beta)$ mají jeden společný směr – proč?) $\Rightarrow V(\alpha) \not\subset V(\beta)$ ani $V(\beta) \not\subset V(\alpha) \Rightarrow \alpha, \beta$ jsou buď **různoběžné**, nebo **mimoběžné**. Dimenze prostoru $\mathcal{A}_n$ musí být samozřejmě 3 a více.

Nyní opět rozlišíme dle průniku:

(a) $s' = 3 = s$ (tj. $C - B \in [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$) $\Rightarrow \alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha, \beta$ jsou **různoběžné**, průnikem je **přímka** ($\dim \alpha \cap \beta = 2 + 2 - s' = 4 - 3 = 1$)

(b) $s' = 4 \neq s$ (tj. $C - B \notin [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$) $\Rightarrow \alpha, \beta$ jsou **mimoběžné**, jejich zaměření mají jediný společný směr (může nastat až v $\mathcal{A}_4$).

(iii) <u>s=4</u> (tj. $V(\alpha)$ a $V(\beta)$ nemají žádný společný směr, tudíž nemohou být α, β rovnoběžné) $\Rightarrow \alpha, \beta$ jsou opět buď **různoběžné**, nebo **mimoběžné**, o čemž rozhodne jejich průnik.

(a) $s' = 4 = s$ (tj. $C - B \in [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$) $\Rightarrow \alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha, \beta$ jsou **různoběžné**, průnikem je **jediný bod** ($\dim \alpha \cap \beta = 2 + 2 - s' = 4 - 4 = 0$) – může nastat až v $\mathcal{A}_4$

(b) $s' = 5 \neq s$ (tj. $C - B \notin [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$) $\Rightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset \Rightarrow \alpha, \beta$ jsou **mimoběžné**, jejich zaměření nemají žádný společný směr (může nastat až v $\mathcal{A}_5$).

Příklad 1.4.22 Buďte dány v afinním prostoru $\mathcal{A}_4$ nad $\mathbb{R}$ podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N}$. Stanovte jejich vzájemnou polohu a nalezněte případné společné prvky (body, směry), jestliže je ve zvolené soustavě souřadnic dáno:

1.
$$\begin{gathered} \mathcal{M} = \{B; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\},\ \mathcal{N} = \{C; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}, \\ B = [1,2,3,4],\ \mathbf{u}_1 = (1,1,0,0),\ \mathbf{u}_2 = (1,0,1,0), \\ C = [3,2,4,5],\ \mathbf{v}_1 = (1,0,0,1),\ \mathbf{v}_2 = (3,1,1,1). \end{gathered}$$

2.
$$\begin{array}{rl} \mathcal{M}: & 2x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} = 2 \\ & x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 \phantom{{}+x_4} = 1 \\[1ex] \mathcal{N}: & x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} + x_4 = 1 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rl} \mathcal{M}: & 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 = 1 \\[1ex] \mathcal{N}: & x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} = 1 \end{array}$$

Řešení:

Případ č.1:

Vzhledem k tomu, že oba podprostory jsou dány bodem a bází zaměření, použijeme k rozhodnutí o společné poloze $s = \dim V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N})$ a $s' = \dim V(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = \dim(V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N}) + [C - B])$ (s, s' zjistíme pomocí hodnosti matic tj. dimenze jejich řádkového podprostoru):

$$s = h \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \cdots = 3,$$

vzhledem k tomu, že oba podprostory jsou dimenze 2, vyplývá odtud, že jejich zaměření mají jeden společný směr (proč?), a tudíž nejsou rovnoběžné – jsou tedy *různoběžné* ($\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$), nebo *mimoběžné* ($\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$).

Zjistíme, že $C - B = (2,0,1,1)$, tudíž

$$s' = h\begin{pmatrix} 1\;1\;0\;0 \\ 1\;0\;1\;0 \\ 1\;0\;0\;1 \\ 3\;1\;1\;1 \\ 2\;0\;1\;1 \end{pmatrix} = \cdots = 3,$$

tj. $s = s'$ – dle věty 1.4.17 mají $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ neprázdný průnik – jsou tedy *různoběžné*, přičemž podle věty 1.4.20 je $\dim \mathcal{M} \cap \mathcal{N} = 1$ – průnikem je proto *přímka*, kterou nyní nalezneme.
Zřejmě pro každý bod $X \in \mathcal{A}$ platí: $X \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} : \; X = B + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2) \wedge (\exists r_1, r_2 \in \mathbb{R} : \; X = C + r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2)\,.$$

Má-li současně platit $X = B + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 \wedge X = C + r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2$, znamená to:

$$B + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 = C + r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2,$$

neboli

$$t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 - r_1\mathbf{v}_1 - r_2\mathbf{v}_2 = C - B.$$

Přejdeme-li k souřadnicím uvedených vektorů, dostáváme rovnici:

$$t_1(1,1,0,0) + t_2(1,0,1,0) - r_1(1,0,0,1) - r_2(3,1,1,1) = (2,0,1,1)$$

o neznámých t_1, t_2, r_1, r_2. Vyřešíme-li z ní plynoucí soustavu lineárních rovnic, zjistíme, že řešení je závislé na jednom parametru a zní:

$$r_2 = k,\; r_1 = -1 - k,\; t_1 = \cdots\,,\; t_2 = \cdots\,,$$

tudíž pro bod X průniku získáváme:

$$X = C + r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 = C + (-1-k)\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2 = (C - \mathbf{v}_1) + k(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

takže průnikem je skutečně přímka p o parametrickém vyjádření:

$$p = (C - \mathbf{v}_1) + k(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1),$$

je tedy určena bodem $C - \mathbf{v}_1 = [2,2,4,4]$ a směrovým vektorem $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = (2,1,1,0)$. (čemu je roven průnik $V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N})$?[55])

[55] Z lineární algebry je čtenáři známo, že $\mathbf{x} = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2$ náleží tomuto průniku, právě když t_1, t_2 řeší rovnici

$$t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 - r_1\mathbf{v}_1 - r_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{o}.$$

Případ č.2:

Protože jsou oba podprostory dány obecnými rovnicemi, přejdeme přímo ke zjištění jejich průniku – bod $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ náleží $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, právě když x_1, x_2, x_3, x_4 řeší soustavu obecných rovnic podprostoru $\mathcal{M}$ i soustavu rovnic podprostoru $\mathcal{N}$, tj. následující soustavu rovnic:

$$\begin{array}{lllll} 2x_1 & + x_2 & + x_3 & & = 2 \\ x_1 & & + x_3 & & = 1 \\ x_1 & & & + x_4 & = 1 \\ 3x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & = 1 \end{array}$$

Tuto soustavu známým způsobem řešíme a zjistíme, že řešení neexistuje – tj. $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Dotčené prostory jsou proto buď *mimoběžné* nebo *rovnoběžné bez společných bodů*. O tom, která z těchto variant nastane, rozhodneme vyšetřením $V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N})$. Protože $\dim \mathcal{M} = 2, \dim \mathcal{N} = 2$ (proč?), budou:

- *rovnoběžné*, jestliže $\dim V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N}) = 2$ (existuje společná dvojice lineárně nezávislých směrů) a
- *mimoběžné*, pokud $\dim V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N}) < 2$ (existuje-li jeden nebo žádný společný směr).

Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ náleží $V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N})$, právě když x_1, x_2, x_3, x_4 řeší současně přiřazenou homogenní soustavu k soustavě obecných rovnic podprostoru $\mathcal{M}$ i homogenní soustavu rovnic přiřazenou k soustavě rovnic podprostoru $\mathcal{N}$ (viz věta 1.3.22), tj. následující soustavu:

$$\begin{array}{lllll} 2x_1 & + x_2 & + x_3 & & = 0 \\ x_1 & & + x_3 & & = 0 \\ x_1 & & & + x_4 & = 0 \\ 3x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & = 0 \end{array}$$

Rutinním způsobem zjistíme, že fundamentální systém řešení této soustavy tvoří vektor $(-1, 1, 1, 1)$, což značí:

$$V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N}) = [(-1, 1, 1, 1)],$$

a tudíž $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ jsou *mimoběžné s jediným společným směrem* $[(-1, 1, 1, 1)]$.

Případ č.3:

Oba podprostory jsou opět dány obecnými rovnicemi, takže přejdeme přímo ke zjištění jejich průniku – bod $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ náleží $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, právě když x_1, x_2, x_3, x_4 řeší následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & + x_2 & + x_3 & = 2 \\ x_1 & & + x_3 & = 1 \\ x_1 & + x_2 & & = 1 \end{array}$$

Řešení této soustavy zní:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \quad - t_2 \\ x_2 &= \quad\quad\;\; t_2 \\ x_3 &= \quad\quad\;\; t_2 \\ x_4 &= \quad t_1 \end{aligned}$$

což představuje parametrické rovnice podprostoru, který je průnikem $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ – tedy $\dim \mathcal{M} \cap \mathcal{N} = 2$, což se ovšem rovná $\dim \mathcal{M}$ ($\dim \mathcal{N} = 3$), a tudíž $\mathcal{M} = \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$, a tedy $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Podprostory jsou *incidentní*.

1.4.4 Příčka afinních podprostorů

S tímto pojmem se v případě dvojice mimoběžných přímek čtenář již setkal. Zde tento pojem zobecníme – budeme se zabývat příčkami *libovolných podprostorů majících prázdný průnik*.[56]

Definice 1.4.23 Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ podprostory afinního prostoru $\mathcal{A}$. *Příčkou podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$* rozumíme každou přímku prostoru $\mathcal{A}$ různoběžnou současně s oběma podprostory.

Nyní se budeme zabývat dvěma (tradičními) úlohami:

- sestrojit příčku dvojice podprostorů *mající daný směr*,
- sestrojit příčku dvojice podprostorů *procházející daným bodem*.

1.4.4.1 Příčka podprostorů mající daný směr

Uvažujme dvojici podprostorů $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$, daných takto:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{B; \mathbf{U}\} \\ \mathcal{N} &= \{C; \mathbf{W}\} \end{aligned}\right\} \tag{1.30}$$

Buď dále dán směr $[\mathrm{s}] \subseteq \mathbf{V}_n$ (tj. $\mathrm{s} \neq \mathbf{o}$).

Hledejme nyní vlastnosti vektoru s, které budou představovat nutné a postačující podmínky existence příčky směru $[\mathrm{s}]$.

Příčka podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ náleží spojení $\mathcal{M} + \mathcal{N}$, a tudíž nutnou podmínkou pro její existenci je

$$\mathrm{s} \in \mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B]. \tag{1.31}$$

[56] Pojem *příčka podprostorů* budeme vyšetřovat jen pro podprostory mimoběžné a podprostory rovnoběžné – neincidentní. Mohli bychom se zabývat i příčkami v ostatních případech - tam však jde o problematiku triviální.
Význam mají především příčky podprostorů mimoběžných – např. při určování jejich vzdálenosti (v případě euklidovského prostoru) – viz kapitola 2.

Označme $\overline{\mathbf{U}}, \overline{\mathbf{W}}$ podprostory doplňující $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ po řadě na $\mathbf{U}$ a $\mathbf{W}$ (proč existují?), tedy:

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \oplus \overline{\mathbf{U}},\ \mathbf{W} = (\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \oplus \overline{\mathbf{W}}. \tag{1.32}$$

Vzhledem k předpokladu $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$ nenáleží $C - B$ do $\mathbf{U} + \mathbf{W}$,[57] a tudíž

$$\mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B] = (\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \oplus \overline{\mathbf{U}} \oplus \overline{\mathbf{W}} \oplus [C - B],$$

a proto kterýkoli vektor $\mathbf{s}$ splňující (1.31) platí:

$$\exists! \mathbf{p}_s \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}\ \exists! \mathbf{u}_s \in \overline{\mathbf{U}}\ \exists! \mathbf{w}_s \in \overline{\mathbf{W}}\ \exists! t_s \in T: \ \mathbf{s} = \mathbf{p}_s + \mathbf{u}_s + \mathbf{w}_s + t_s(C - B). \tag{1.33}$$

Příčka směru $\mathbf{s}$ bude existovat, právě když bude splněna následující podmínka:

$$\exists P \in \mathcal{M}, \exists Q \in \mathcal{N}: \quad Q - P \in [\mathbf{s}],$$

a v tom případě bude přímkou $\overleftrightarrow{PQ}$, přičemž P, Q budou její průsečíky po řadě s $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$.[58] Tato podmínka je zřejmě ekvivalentní podmínce následující:

$$(\exists \mathbf{u} \in \mathbf{U} : P = B + \mathbf{u}) \wedge (\exists \mathbf{w} \in \mathbf{W} : Q = C + \mathbf{w}) \wedge (\exists k \in T : \mathbf{s} = k(Q - P)),$$

a to je vzhledem k (1.32) možno psát:

$$\begin{gathered} \exists \mathbf{u}_0 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}\ \exists \mathbf{w}_0 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}\ \exists \mathbf{u}_1 \in \overline{\mathbf{U}}\ \exists \mathbf{w}_1 \in \overline{\mathbf{W}}\ \exists k \in T : \\ P = B + \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \wedge Q = C + \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{s} = k(Q - P). \end{gathered} \tag{1.34}$$

Tuto podmínku lze (dosadíme-li vyjádření bodů P a Q z prvního a druhého výroku do třetího), ekvivalentně psát:

$$\begin{gathered} \exists \mathbf{u}_0 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}\ \exists \mathbf{w}_0 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}\ \exists \mathbf{u}_1 \in \overline{\mathbf{U}}\ \exists \mathbf{w}_1 \in \overline{\mathbf{W}}\ \exists k \in T : \\ \mathbf{s} = k(\mathbf{w}_0 - \mathbf{u}_0) + k\mathbf{w}_1 - k\mathbf{u}_1 + k(C - B), \end{gathered} \tag{1.35}$$

což představuje rovnici o neznámých $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}, \mathbf{w}_1 \in \overline{\mathbf{W}}, \mathbf{u}_1 \in \overline{\mathbf{U}}$ a $k \in T$.

Zkoumejme řešitelnost této rovnice v závislosti na volbě $[\mathbf{s}] \subseteq \mathbf{V}$.[59] Daný vektor $\mathbf{s}$ lze přitom jediným možným způsobem psát dle (1.33), tudíž rovnice (1.35) je ekvivalentní následující soustavě rovnic (zřejmě $C - B \neq \mathbf{o}$):

$$\left.\begin{aligned} k(\mathbf{w}_0 - \mathbf{u}_0) &= \mathbf{p}_s \\ k\mathbf{w}_1 &= \mathbf{w}_s \\ -k\mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_s \\ k &= t_s \end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

Rozlišme nyní dva případy:

[57] Přitom $\mathbf{U} + \mathbf{W} = (\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) \oplus \overline{\mathbf{U}} \oplus \overline{\mathbf{W}}$.

[58] Přímka, která je s afinním podprostorem různoběžná, má s ním *právě jeden společný bod* (proč?).
Z prázdnosti průniku $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ dále plyne, že $P \neq Q$.

[59] Vyjdeme-li z názoru, zdá se, že nebude řešitelná vždy – uvážíme-li dvě mimoběžné přímky v $\mathcal{A}_3$, nebude příčka existovat např. v případě, kdy je vektor $\mathbf{s}$ lineární kombinací směrových vektorů daných přímek.

(i) $\underline{t_s = 0}$, což je ekvivalentní $\underline{\mathbf{s} \in \mathbf{U} + \mathbf{W}}$ (viz (1.33).
V tomto případě nemá (1.36) řešení (neboť $\mathbf{s} \neq \mathbf{o}$) a příčka **neexistuje**.

(ii) $\underline{t_s \neq 0}$, což je ekvivalentní $\underline{\mathbf{s} \notin \mathbf{U} + \mathbf{W}}$.
V tomto případě je (1.36) řešitelná a příčka tudíž **existuje**. Přitom jsou jednoznačně určeny vektory $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{w}_1$ a skalár k. Vektory $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0$ jsou vázány podmínkou

$$\mathbf{w}_0 - \mathbf{u}_0 = \tfrac{1}{k}\mathbf{p}_s. \tag{1.37}$$

Nutná a postačující podmínka pro existenci příčky směru $[\mathbf{s}]$ tudíž zní (viz též (1.31)):

$$\mathbf{s} \in (\mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B]) \wedge \mathbf{s} \notin \mathbf{U} + \mathbf{W}. \tag{1.38}$$

Je přirozenou otázkou, kolik k daným podprostorům existuje příček směru vektoru $\mathbf{s}$.

Buďte $r^{(1)}, r^{(2)}$ příčky daných podprostorů $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ směru $[\mathbf{s}]$. Označme pro $j = 1, 2$: $P^{(j)}, Q^{(j)}$ průsečíky $r^{(j)}$ po řadě s $\mathcal{M}, \mathcal{N}$.
Pro průsečíky obou příček musí platit (1.34), což v důsledku značí (za zavedeného označení):

$$P^{(j)} = B + \mathbf{u}_0^{(j)} + \mathbf{u}_1 \wedge Q^{(j)} = C + \mathbf{w}_0^{(j)} + \mathbf{w}_1,$$

tudíž pro rozdíly $P^{(2)} - P^{(1)}, Q^{(2)} - Q^{(1)}$ dostáváme:

$$\begin{aligned} P^{(2)} - P^{(1)} &= \mathbf{u}_0^{(2)} - \mathbf{u}_0^{(1)}, \\ Q^{(2)} - Q^{(1)} &= \mathbf{w}_0^{(2)} - \mathbf{w}_0^{(1)}, \end{aligned}$$

a protože dle (1.37)

$$\mathbf{w}_0^{(1)} - \mathbf{u}_0^{(1)} = \mathbf{w}_0^{(2)} - \mathbf{u}_0^{(2)},$$

obdržíme konečně:

$$P^{(2)} - P^{(1)} = Q^{(2)} - Q^{(1)}. \tag{1.39}$$

Tyto rozdíly náleží pro libovolně vybrané příčky vždy do $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ – tedy průsečíky všech těchto příček s $\mathcal{M}$, resp. $\mathcal{N}$, leží v jistých podprostorech v $\mathcal{M}$, resp. $\mathcal{N}$, o zaměření $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$[60] tj. podprostorech navzájem rovnoběžných.
Je však otázkou, jestli je vyplňují – tj. zda z každého bodu uvedených podprostorů vychází příčka směru vektoru $\mathbf{s}$.

Buď tedy r některá příčka uvažovaných podprostorů $\mathcal{M} = \{B; \mathbf{U}\}, \mathcal{N} = \{C; \mathbf{W}\}$ směru $[\mathbf{s}]$, P, Q její průsečíky po řadě s $\mathcal{M}, \mathcal{N}$. Buď $\mathbf{x}$ libovolný vektor z $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$. Body $P_x = P + \mathbf{x}$, a $Q_x = Q + \mathbf{x}$ evidentně náleží po řadě do $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ a jelikož navíc $[\mathbf{s}] \ni Q - P = Q_x - P_x$, je přímka $\overleftrightarrow{P_x Q_x}$ příčkou podprostorů $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ směru vektoru $\mathbf{s}$.

Poznamenejme, že z (1.39) plyne též

$$Q^{(2)} - P^{(2)} = Q^{(1)} - P^{(1)}.$$

[60]Jde tudíž o podprostory $\{P^{(1)}; \mathbf{U} \cap \mathbf{W}\} \subseteq\subseteq \mathcal{M}$ a $\{Q^{(1)}; \mathbf{U} \cap \mathbf{W}\} \subseteq\subseteq \mathcal{N}$. Již odtud vidíme, že je -li $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{o}\}$, je příčka daného směru *právě jedna*.

Nyní shrňme získané poznatky:[61]

Věta 1.4.24 *Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ libovolné podprostory v $\mathcal{A}$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Buď dále $\mathbf{s} \in \mathbf{V}, \mathbf{s} \neq \mathbf{o}$. Pak platí:*

1. *příčka podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ mající směr vektoru $\mathbf{s}$ existuje právě tehdy, když:*
   - *(i)* $\mathbf{s} \in V(\mathcal{M} + \mathcal{N})$
   - *(ii)* $\mathbf{s} \notin V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N})$;
2. *jestliže $V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N}) = \{\mathbf{o}\}$, existuje právě jedna taková příčka. V případě, kdy $V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N}) \neq \{\mathbf{o}\}$, vyplňují průsečíky těchto příček v $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ navzájem rovnoběžné podprostory o zaměření $V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N})$;*
3. *jsou-li r^1, r^2 dvě příčky daných podprostorů mající směr vektoru $\mathbf{s}$ a označíme-li $P^{(1)}, Q^{(1)}$, resp. $P^{(2)}, Q^{(2)}$, průsečíky r^1 resp. r^2, po řadě s $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ platí:*

$$Q^{(2)} - P^{(2)} = Q^{(1)} - P^{(1)}.$$

Příklad 1.4.25 V prostoru $\mathcal{A}_4$ nad $\mathbb{R}$ je dána rovina $\rho = \{B; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, přímka $p = \{C; \mathbf{w}_1\}$ a vektor $\mathbf{s}$, přičemž ve zvolené soustavě souřadnic platí:

$$B = [1,1,1,1],\ \mathbf{u}_1 = (1,0,1,0),\ \mathbf{u}_2 = (0,0,0,1),$$
$$C = [3,2,2,1],\ \mathbf{w}_1 = (1,-1,0,0),$$
$$\mathbf{s} = (0,2,0,0).$$

Nalezněte všechny příčky směru vektoru $\mathbf{s}$.

Řešení:

Známým způsobem zjistíme, že p a ρ jsou mimoběžné, a neboť $\dim p = 1$, nemohou mít společný směr – příčka tedy bude existovat nejvýše jedna.

Snadno bychom ověřili, že $\mathbf{s}$ splňuje podmínky pro existenci příčky – viz věta 1.4.24.

Pro nalezení příčky se budeme inspirovat odvozením věty 1.4.24. Budeme hledat body P, Q splňující:[62]

$$P = B + \mathbf{u},\ \mathbf{u} \in V(\rho),\ Q = C + \mathbf{w},\ \mathbf{w} \in V(p),\ h\mathbf{s} = (Q - P),$$

což vede k rovnici

$$\mathbf{w} - \mathbf{u} - h\mathbf{s} = B - C$$

[61] Z odstavce 2 věty 1.4.24 vyplývá, že speciálně v případě $\mathcal{M} \parallel \mathcal{N}$ *prochází taková příčka každým bodem podprostoru* $\mathcal{M}$ a v případě $\mathcal{N} \parallel \mathcal{M}$ *prochází taková příčka každým bodem podprostoru* $\mathcal{N}$.

[62] Podmínka $Q - P = h\mathbf{s}$ je ekvivalentní podmínce $\mathbf{s} = k(Q - P)$, neboť existuje-li příčka (což jsme ověřili), je $k \neq 0$.

o neznámých $\mathbf{u} \in V(\rho), \mathbf{w} \in V(p)$ a $h \in \mathbb{R}$, kterou lze, dosadíme-li

$$\mathbf{w} = r\mathbf{w}_1, \ \mathbf{u} = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2,$$

ekvivalentně psát:

$$r\mathbf{w}_1 - t_1\mathbf{u}_1 - t_2\mathbf{u}_2 - h\mathbf{s} = B - C,$$

čímž získáváme rovnici o neznámých $r, t_1, t_2, h \in \mathbb{R}$. Konečně, přejdeme-li k souřadnicím, obdržíme:

$$r(1,-1,0,0) - t_1(1,0,1,0) - t_2(0,0,0,1) - h(0,2,0,0) = (-2,-1,-1,0).$$

Poslední rovnice vede k soustavě lineárních rovnic, jejímž vyřešením získáváme:

$$r = -1, \ t_1 = 1, \ t_2 = 0, \ h = 1,$$

což znamená, že

$$\begin{aligned} P = B + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 &= [1,1,1,1] + (1,0,1,0) = [2,1,2,1], \\ Q = C + r\mathbf{w}_1 &= [3,2,2,1] - (1,-1,0,0) = [2,3,2,1]. \end{aligned}$$

Dále můžeme zjistit, že $Q - P = (0,2,0,0)$, což je opravdu vektor náležející směru $[\mathbf{s}]$ a tudíž $\overleftrightarrow{PQ}$ je hledanou příčkou. Napište její parametrické rovnice!

Z úvah předcházejících vyslovení věty 1.4.24 vyplývá platnost následující věty (promyslete si její důkaz) poskytující další možný postup hledání příčky daného směru:

Věta 1.4.26 *Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ libovolné podprostory v $\mathcal{A}$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$, B nechť je libovolný bod z $\mathcal{M}$. Buď dále $\mathbf{s} \in \mathbf{V}, \mathbf{s} \neq \mathbf{o}$.*
Označíme-li $\mathcal{R} = \{B; V(\mathcal{M}) + [\mathbf{s}]\} \cap \mathcal{N}$, pak množina přímek $p_R = \{R; \mathbf{s}\}, R \in \mathcal{R}$, je množinou právě všech příček podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ majících směr vektoru $\mathbf{s}$.

1.4.4.2 Příčka podprostorů procházející daným bodem

Uvažujme dvojici podprostorů $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$, daných takto:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{B; \mathbf{U}\} \\ \mathcal{N} &= \{C; \mathbf{W}\} \end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

Buď dále dán bod $M \in \mathcal{A}$. Předpokládejme, že $M \notin \mathcal{M} \wedge M \notin \mathcal{N}$ – situace by byla triviální (jaká?).

Příčka podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ náleží spojení $\mathcal{M} + \mathcal{N}$, a tudíž nutnou podmínkou pro její existenci je, aby tomuto spojení náležel bod M, neboli

$$M - B \in \mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B] \tag{1.41}$$

Označíme-li opět $\overline{\mathbf{U}}, \overline{\mathbf{W}}$ podprostory komplementární k $\mathbf{U}\cap\mathbf{W}$, pak vzhledem k předpokladu $\mathcal{M}\cap\mathcal{N}=\emptyset$ platí:

$$\mathbf{U}+\mathbf{W}+[C-B]=(\mathbf{U}\cap\mathbf{W})\oplus\overline{\mathbf{U}}\oplus\overline{\mathbf{W}}\oplus[C-B],$$

a proto pro kterýkoli bod M splňující (1.41) platí:

$$\exists!\mathbf{p}_M\in\mathbf{U}\cap\mathbf{W}\ \exists!\mathbf{u}_M\in\overline{\mathbf{U}}\ \exists!\mathbf{w}_M\in\overline{\mathbf{W}}\ \exists!t_M\in T:\ M=B+\mathbf{p}_M+\mathbf{u}_M+\mathbf{w}_M+t_M(C-B). \tag{1.42}$$

Příčka podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ procházející bodem M bude existovat, právě když bude splněna následující podmínka a v tom případě bude přímkou $\overleftrightarrow{PQ}$. Přitom P, Q budou její průsečíky po řadě s $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$:

$$(\exists\mathbf{u}\in\mathbf{U}:\ P=B+\mathbf{u})\wedge(\exists\mathbf{w}\in\mathbf{W}:\ Q=C+\mathbf{w})\wedge(\exists k\in T:\ M-P=k(Q-P)), \tag{1.43}$$

což můžeme (dosadíme-li do vyjádření bodů P a Q z prvního a druhého výroku do třetího), ekvivalentně psát:

$$\exists\mathbf{u}\in\mathbf{U}\ \exists\mathbf{w}\in\mathbf{W}\ \exists k\in T:\ (k-1)\mathbf{u}-k\mathbf{w}+k(B-C)=B-M,$$

až konečně s ohledem na to, že $\mathbf{U}=(\mathbf{U}\cap\mathbf{W})\oplus\overline{\mathbf{U}}, \mathbf{W}=(\mathbf{U}\cap\mathbf{W})\oplus\overline{\mathbf{W}}$, obdržíme následující ekvivalent relace (1.43)

$$\begin{gathered}\exists\mathbf{u}_0\in\mathbf{U}\cap\mathbf{W}\ \exists\mathbf{w}_0\in\mathbf{U}\cap\mathbf{W}\ \exists\mathbf{u}_1\in\overline{\mathbf{U}}\ \exists\mathbf{w}_1\in\overline{\mathbf{W}}\ \exists k\in T:\\ M=B+k\mathbf{w}_0+(1-k)\mathbf{u}_0+k\mathbf{w}_1+(1-k)\mathbf{u}_1+k(C-B),\end{gathered} \tag{1.44}$$

což představuje rovnici o neznámých $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0\in\mathbf{U}\cap\mathbf{W}, \mathbf{w}_1\in\overline{\mathbf{W}}, \mathbf{u}_1\in\overline{\mathbf{U}}$ a $k\in T$.

Zkoumat budeme řešitelnost této rovnice v závislosti na volbě bodu $M\in\mathcal{A}$.[63] Daný bod M však můžeme psát jediným možným způsobem dle (1.42), a proto je rovnice (1.44) ekvivalentní následující soustavě rovnic ($C-B\neq\mathbf{o}$):

$$\left.\begin{aligned}k\mathbf{w}_0+(1-k)\mathbf{u}_0&=\mathbf{p}_M\\ k\mathbf{w}_1&=\mathbf{w}_M\\ (1-k)\mathbf{u}_1&=\mathbf{u}_M\\ k&=t_M\end{aligned}\right\} \tag{1.45}$$

Pro řešitelnost této soustavy jsou zřejmě rozhodné následující hodnoty t_M, jakožto jednoho z jejích parametrů:

(i) $\underline{t_M=0}$, což je dle (1.42) ekvivalentní s $\underline{M-B\in\mathbf{U}+\mathbf{W}}$.
V tomto případě nemá (1.45) řešení a příčka **neexistuje** (s ohledem na předpoklad $M\notin\mathcal{M}$ je totiž $\mathbf{w}_M\neq\mathbf{o}$).

[63] Vyjdeme-li z názoru, zdá se, že nebude řešitelná vždy – uvážíme-li dvě mimoběžné přímky v $\mathcal{A}_3$, nebude příčka existovat např. v případě, kdy bod M leží v rovině, s níž je jedna z přímek rovnoběžná a která obsahuje přímku druhou.

(ii) $\underline{t_M = 1}$, což je opět dle (1.42) ekvivalentní s $\underline{M - C \in \mathbf{U} + \mathbf{W}}$.
V tomto případě nemá (1.45) řešení a příčka rovněž **neexistuje** ($\mathbf{u}_M \neq \mathbf{o}$, neboť $M \notin \mathcal{N}$).

(iii) $\underline{t_M \notin \{0, 1\}}$, neboli $\underline{M - B \notin \mathbf{U} + \mathbf{W} \wedge M - C \notin \mathbf{U} + \mathbf{W}}$.
V tomto případě je soustava (1.45) řešitelná a příčka **existuje**.

Souhrnně jsme oprávněni říci, že příčka jdoucí bodem M neležícím v $\mathcal{M}$ ani $\mathcal{N}$ existuje, právě když (s použitím (1.41))

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ M \in \mathcal{M} + \mathcal{N} \\ \bullet\ M - C \notin (\mathbf{U} + \mathbf{W}) \\ \bullet\ M - B \notin (\mathbf{U} + \mathbf{W}) \end{array}\right\} \tag{1.46}$$

Podobně jako v případě příčky mající daný směr budeme nyní zkoumat počet příček, které lze k dvojici podprostorů daným bodem vést.

Buďte $r^{(1)}, r^{(2)}$ příčky daných podprostorů $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ procházející bodem M a pro $j = 1, 2$ označme $P^{(j)}, Q^{(j)}$ průsečíky $r^{(j)}$ po řadě s $\mathcal{M}, \mathcal{N}$. Průsečíky obou příček musí vyhovovat (1.43) neboli (za již zavedeného označení):

$$P^{(j)} = B + \mathbf{u}_0^{(j)} + \mathbf{u}_1 \wedge Q^{(j)} = C + \mathbf{w}_0^{(j)} + \mathbf{w}_1.$$

Odtud dostáváme pro rozdíly $P^{(2)} - P^{(1)}, Q^{(2)} - Q^{(1)}$:

$$\begin{aligned} P^{(2)} - P^{(1)} &= \mathbf{u}_0^{(2)} - \mathbf{u}_0^{(1)}, \\ Q^{(2)} - Q^{(1)} &= \mathbf{w}_0^{(2)} - \mathbf{w}_0^{(1)}, \end{aligned}$$

odkud použitím (viz (1.45))

$$k\mathbf{w}_0^{(1)} + (1-k)\mathbf{u}_0^{(1)} = k\mathbf{w}_0^{(2)} + (1-k)\mathbf{u}_0^{(2)},$$

vyplývá

$$P^{(2)} - P^{(1)} = \tfrac{k}{k-1}(Q^{(2)} - Q^{(1)}).$$

Uvedené rozdíly náleží do $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, a proto průsečíky všech příček s $\mathcal{M}$, resp. $\mathcal{N}$, leží v jistých podprostorech $\mathcal{M}$, resp. $\mathcal{N}$, se zaměřením $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$,[64] a tedy podprostorech navzájem rovnoběžných.

Nyní řešme otázku, jestli průsečíky těchto příček uvedené podprostory vyplňují. Buď r některá příčka uvažovaných podprostorů $\mathcal{M} = \{B; \mathbf{U}\}, \mathcal{N} = \{C; \mathbf{W}\}$ jdoucí bodem M, P, Q její průsečíky po řadě s $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ – existuje tedy $k \in T$:

$$M - P = k(Q - P). \tag{1.47}$$

[64] Jde o podprostory $\{P^{(1)}; \mathbf{U} \cap \mathbf{W}\} \subseteq\subseteq \mathcal{M}$ a $\{Q^{(1)}; \mathbf{U} \cap \mathbf{W}\} \subseteq\subseteq \mathcal{N}$.
Již odtud opět vidíme, že v případě triviálního průniku $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ existuje *právě jedna* příčka požadovaných vlastností.

Buď $\mathbf{x}$ libovolný vektor z $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$. Označíme-li $Q_x = Q + \mathbf{x}$ a $P_x = P + \frac{k}{k-1}\mathbf{x}$, jde zřejmě o body náležející po řadě do $\mathcal{N}$ a $\mathcal{M}$. Je mechanickou záležitostí pomocí (1.47) ověřit, že

$$M - P_x = k(Q_x - P_x),$$

což (mj.) znamená kolinearitu bodů P_x, Q_x, M. Přímka $\overleftrightarrow{PQ}$ je tedy příčkou podprostorů $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ procházející bodem M.

Následující věta formuluje získané poznatky:[65]

Věta 1.4.27 *Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ libovolné podprostory v $\mathcal{A}$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Buď dále $M \in \mathcal{A}$, $M \notin \mathcal{M}$, $M \notin \mathcal{N}$. Pak platí:*

1. *příčka podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ procházející bodem M existuje právě tehdy, když:*
   - *(i)* $M \in (\mathcal{M} + \mathcal{N})$,
   - *(ii) M neleží v podprostoru obsahujícím některý z podprostorů $\mathcal{M}$ či $\mathcal{N}$ o zaměření $V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N})$;*[66]
2. *jestliže $V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N}) = \{\mathbf{o}\}$, existuje právě jedna taková příčka. V případě, kdy $V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N}) \neq \{\mathbf{o}\}$, vyplňují průsečíky těchto příček v $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ navzájem rovnoběžné podprostory o zaměření $V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N})$;*
3. *jsou-li r^1, r^2 dvě příčky daných podprostorů procházející bodem M a označíme-li $P^{(1)}, Q^{(1)}$, resp. $P^{(2)}, Q^{(2)}$, průsečíky r^1 resp. r^2, po řadě s $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ platí:*

$$M - P^{(1)} = k(Q^{(1)} - P^{(1)}) \Rightarrow M - P^{(2)} = k(Q^{(2)} - P^{(2)}).$$

Příklad 1.4.28 V prostoru $\mathcal{A}_4$ nad $\mathbb{R}$ je dána rovina $\rho = \{B; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, přímka $p = \{C; \mathbf{w}_1\}$ a vektor s, přičemž ve zvolené soustavě souřadnic platí:

$$\begin{gathered} B = [1,1,1,1],\ \mathbf{u}_1 = (1,0,1,0),\ \mathbf{u}_2 = (0,0,0,1), \\ C = [3,2,2,1],\ \mathbf{w}_1 = (1,-1,0,0), \\ M = [2,5,2,1]. \end{gathered}$$

Nalezněte všechny příčky procházející bodem M.
Řešení:

[65] Použití pojmu *dělicí poměr*, který bude zaveden v podkapitole 1.6, umožní vhodnější formulaci odstavce (3) věty 1.4.27 (promyslete si!).

[66] Jsou-li $B \in \mathcal{M}, C \in \mathcal{N}$ libovolné body, jde o podprostory

$$\{B; V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N})\} \quad \text{a} \quad \{C; V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N})\}.$$

Jde o tutéž rovinu a přímku jako v příkladě 1.4.25 – v souladu s větou 1.4.27 bude existovat nejvýše jedna příčka.
Snadno bychom ověřili, že bod M splňuje podmínky pro existenci příčky dle věty 1.4.27.
Pro nalezení příčky vyjdeme z úvah předcházejících vyslovení věty 1.4.27. Budeme hledat body P, Q splňující:

$$P = B + \mathbf{u},\ \mathbf{u} \in V(\rho),\ Q = C + \mathbf{w},\ \mathbf{w} \in V(p),\ M - P = k(Q - P),$$

což vede k rovnici

$$(1-k)\mathbf{y} + k\mathbf{w} + k(C - B) = M - B$$

o neznámých $\mathbf{u} \in V(\rho), \mathbf{w} \in V(p)$ a $k \in \mathbb{R}$, kterou lze, dosadíme-li

$$\mathbf{w} = r\mathbf{w}_1,\ \mathbf{u} = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2,$$

ekvivalentně psát:

$$((1-k)t_1)\mathbf{u}_1 + ((1-k)t_2)\mathbf{u}_2 + (kr)\mathbf{w}_1 + k(C - B) = M - B.$$

Zavedeme-li substituci

$$a_1 = (1-k)t_1,\ a_2 = (1-k)t_2,\ b = kr,$$

získáváme rovnici[67]

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + b\mathbf{w}_1 + k(C - B) = M - N$$

o neznámých $a_1, a_2, b, k \in \mathbb{R}$.
Přejdeme-li k souřadnicím, obdržíme:

$$a_1(1,0,1,0) + a_2(0,0,0,1) + b(1,-1,0,0,) + k(2,1,1,0) = (1,4,1,0).$$

Tato rovnice vede k soustavě lineárních rovnic, jejímž vyřešením získáváme:

$$a_1 = -1,\ a_2 = 0,\ b = -2,\ k = 2,$$

odkud vzhledem k zavedené substituci vypočteme:

$$t_1 = 1,\ t_2 = 0,\ r = -1,\ k = 2.$$

To znamená, že

$$\begin{aligned} P = B + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 = [1,1,1,1] + (1,0,1,0) = [2,1,2,1], \\ Q = C + r\mathbf{w} = [3,2,2,1] - (1,-1,0,0) = [2,3,2,1]. \end{aligned}$$

Dále se můžeme přesvědčit, že opravdu $M - P = 2(Q - P)$, tudíž $\overleftrightarrow{PQ}$ je hledanou příčkou.

[67] Touto substitucí odstraníme vazbu mezi neznámými v předešlé rovnici.

1.5 Orientace afinního prostoru. Poloprostory

V této podkapitole se budeme zabývat orientací afinního prostoru, uspořádáním bodů přímky a zavedeme též pojem poloprostor – speciálně pak polorovinu či polopřímku. Řadu z těchto pojmů má čtenář jistě intuitivně uchopenu, tato představa se nám stane motivací pro jejich vhodné definování.

Všechny úvahy této podkapitoly budeme provádět pro případ, kdy těleso skalárů *je uspořádané* (a tedy nekonečné). Příkladem těchto těles jsou např. tělesa čísel racionálních či reálných, nikoli však např. čísel komplexních.

1.5.1 Orientace vektorového prostoru. Souhlasnost vektorů vzhledem k některé nadrovině.

Tato část bude náležet vybudování potřebného algebraického aparátu, který v následující části této podkapitoly použijeme ke studiu pojmů v jejím nadpise.

Uvažme v prostoru $\mathbf{V}_2$ dvojici bází $\mathcal{B} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ a $\mathcal{C} = \langle \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \rangle$.

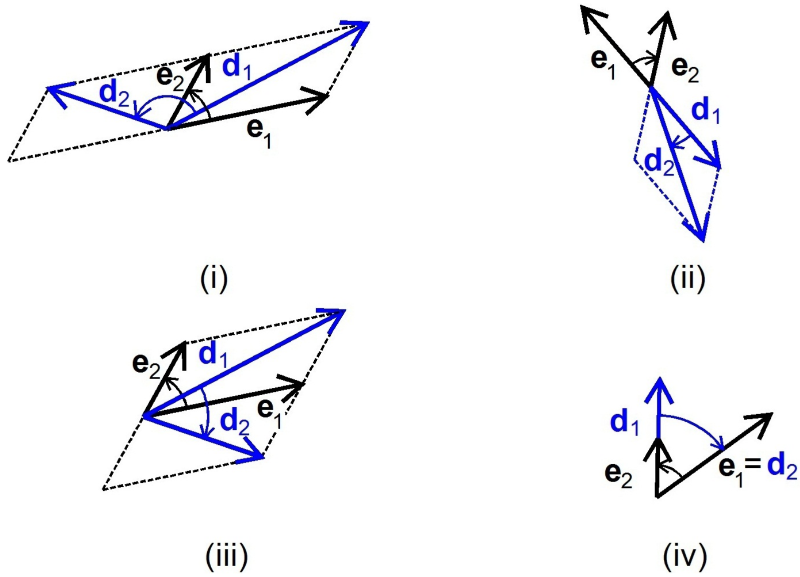
(i) Nechť např. $\mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{d}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{C}$ zní $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a její determinant je *kladný*.

(ii) Nechť $\mathbf{d}_1 = -\mathbf{e}_1,\ \mathbf{d}_2 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{C}$ nyní zní $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ a její determinant je též *kladný*.

(iii) Nyní nechť $\mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{C}$ nyní zní $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a její determinant je *záporný*.

(iv) Nyní nechť $\mathbf{d}_1 = 2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_1$. Matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{C}$ má tvar $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a její determinant je též *záporný*.

Co spojuje případy (i) a (ii) na straně jedné a (iii) a (iv) na straně druhé?



Obr. 1.5.1

Uděláme-li si náčrtek (viz obr. 1.5.1), vidíme, že v situaci (i) a (ii) má šipka směřující od prvního bázového vektoru k druhému báze $\mathcal{B}$ *„souhlasný smysl*“, jako v případě báze $\mathcal{C}$, zatímco v případech (iii) a (iv) je *„smysl přechodu opačný*“.
Přitom pojem *směřovat* či *smysl* chápeme čistě intuitivně. Podobné úvahy můžeme provést i ve třírozměrném prostoru (proveďte!).
Je tak motivována definice následujícího pojmu:

Definice 1.5.1 Buďte $\mathcal{B},\mathcal{C}$ libovolné báze vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad uspořádaným tělesem.[68] Je-li determinant matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{C}$ kladný, nazveme bázi $\mathcal{B}$ *souhlasnou s bází* $\mathcal{C}$, což budeme značit $\mathcal{B} \sim \mathcal{C}$.

Označení 1.5.2 Pro libovolné báze $\mathcal{B},\mathcal{C}$ vektorového prostoru budeme symbolem $|\mathcal{B},\mathcal{C}|$ značit determinant matice přechodu od báze $\mathcal{B}$ k $\mathcal{C}$.

Buďte $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$ libovolné báze prostoru $\mathbf{V}$. Uvážíme-li, že

- maticí přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}$ je matice jednotková,
- maticí přechodu od $\mathcal{C}$ k $\mathcal{B}$ matice inverzní k matici přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{C}$,
- maticí přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{D}$ součin matice přechodu od $\mathcal{C}$ k $\mathcal{D}$ a matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{C}$,

je platnost následující věty evidentní:

[68] Do budoucna již nebudeme na tuto skutečnost zvláště upozorňovat.

Věta 1.5.3 *Relace „být souhlasný" je relací ekvivalence na množině bází daného vektorového prostoru.*

Poznámka 1.5.4 Ze symetrie relace „být souhlasný" plyne, že je-li např. $\mathcal{B}$ souhlasná s $\mathcal{C}$, můžeme říci, že *báze* $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ *jsou souhlasné*.

Relace „být souhlasný" indukuje na množině bází daného vektorového prostoru rozklad. naskýtá se otázka, kolik tříd tento rozklad má.

Buď $\mathcal{B}$ libovolná báze, pak jistě existuje (alespoň jedna) báze $\mathcal{C}$ tak, že $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ nejsou souhlasné (proč?). Získáváme tak dvě různé třídy $\langle\mathcal{B}\rangle$, $\langle\mathcal{C}\rangle$ uvažovaného rozkladu. Ať $\mathcal{D}$ je libovolná další báze. Vzhledem k tomu, že determinant $|\mathcal{B}, \mathcal{D}|$ je nenulový (proč?), nastává právě jedna z možností $|\mathcal{B}, \mathcal{D}| > 0$ nebo $|\mathcal{B}, \mathcal{D}| < 0$.

Je-li $|\mathcal{B}, \mathcal{D}| > 0$, pak $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ jsou souhlasné, a tedy $\mathcal{D} \in \langle\mathcal{B}\rangle$.

V případě $|\mathcal{B}, \mathcal{D}| < 0$ uvážíme, že matice přechodu od $\mathcal{C}$ k $\mathcal{D}$ je rovna součinu matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{D}$ s maticí přechodu od $\mathcal{C}$ k $\mathcal{B}$, a tudíž $|\mathcal{C}, \mathcal{D}| = |\mathcal{B}, \mathcal{D}| \cdot |\mathcal{C}, \mathcal{B}|$, odkud plyne $|\mathcal{C}, \mathcal{D}| > 0$, neboli $\mathcal{C} \sim \mathcal{D}$, a tedy $\mathcal{D} \in \langle\mathcal{C}\rangle$.

Odvodili jsme platnost následující věty:

Věta 1.5.5 *Množina bází vektorového prostoru se dle relace „být souhlasný" rozkládá právě na dvě třídy.*

Podotkněme, že tyto dvě třídy (tj. množiny souhlasných bází) jsou naprosto *rovnocenné*. *Z vnějšku* však do daného prostoru vneseme označení těchto tříd - tj. provedeme *orientaci vektorového prostoru*.[69]

Definice 1.5.6 *Orientovat vektorový prostor* znamená prohlásit jednu ze tříd rozkladu množiny jeho bází dle relace „být souhlasný" za kladnou. Druhou třídu budeme nazývat *záporná*.

Důsledkem věty 1.5.5 je:

Věta 1.5.7 *Každý vektorový prostor lze orientovat právě dvěma způsoby.*

[69] Vraťme se k motivační úvaze před definicí 1.5.1. Zavedeme-li pojem *kladný smysl přechodu (otáčení)*, můžeme třídy rozkladu množiny bází v případě $\mathbf{V}_2$ rozlišit podle toho, který ze dvou smyslů označíme *za kladný* – u každých dvou bází v jedné třídě *(kladné)* bude platit, že první bázový vektor přechází v druhý v *kladném smyslu*, pro každé dvě báze v třídě druhé *(záporné)* pak, že první bázový vektor přechází v druhý ve *smyslu záporném*.
Než jsme však toto označení tříd provedli, nebylo mezi nimi rozdílu žádného.

Čtenář má jistě intuitivní představu o tom, co znamená, že dva vektory „*směřují na stejnou stranu od dané nadroviny*". Tento pojem zavedeme v následujícím exaktně (a v následující podkapitole 1.5.2 jej užijeme k zavedení pojmu *poloprostor*).

Vektorovou nadrovinou se v lineární algebře rozumí podprostor vektorového prostoru dimenze o jedna menší než je dimenze příslušného vektorového prostoru.

Uvažujme nyní libovolnou vektorovou nadrovinu $\mathbf{W} \subseteq\subsetneq \mathbf{V}$ a dále libovolný $\mathbf{u} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{W}$ (tj. mimo jiné $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$). Čemu bude rovno spojení $\mathbf{W} + [\mathbf{u}]$?

Zkoumejme nejprve $\mathbf{W} \cap [\mathbf{u}] : \mathbf{x} \in \mathbf{W} \cap [\mathbf{u}] \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{W} \wedge \exists t \in T : \mathbf{x} = t\mathbf{u}$.
Nenulovost vektoru $\mathbf{x}$ je ekvivalentní s $t \neq 0$, odkud plyne $\mathbf{u} = \frac{1}{t}\mathbf{x}$, což (neboť $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$) implikuje $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ (spor). Proto tedy $t = 0$, neboli $\mathbf{W} \cap [\mathbf{u}] = \{\mathbf{o}\}$.

Užitím Grassmannovy formule pro $\dim(\mathbf{W} + [\mathbf{u}])$ plyne:

$$\dim(\mathbf{W} + [\mathbf{u}]) = \dim \mathbf{W} + \dim[\mathbf{u}] - \dim(\mathbf{W} \cap [\mathbf{u}]) = (n-1) + 1 - 0 = n,$$

to však znamená, že $\mathbf{W} + [\mathbf{u}] = \mathbf{V}$ a vzhledem k trivialitě $\mathbf{W} \cap [\mathbf{u}]$ jde o spojení direktní:

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus [\mathbf{u}] \tag{1.48}$$

Platí tudíž následující tvrzení:

Věta 1.5.8 *Buď $\mathbf{W}$ libovolná vektorová nadrovina vektorového prostoru a $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ libovolný vektor nenáležící $\mathbf{W}$. Pak ke každému vektoru $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, existuje právě jeden vektor $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ a právě jeden skalár $t \in T$ tak, že platí:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + t\mathbf{u}.$$

Je evidentní, že $t = 0$, právě když $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$. Pro $\mathbf{v} \notin \mathbf{W}$ tedy ve vyjádření dle věty 1.5.8 může nastat právě jedna ze dvou možností: $t > 0$ nebo $t < 0$; pro prvou z nich zavádíme následující pojmenování:

Definice 1.5.9 Buď $\mathbf{W}$ vektorová nadrovina vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Buďte dále $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{W}$. Řekneme, že vektor $\mathbf{v}$ *je souhlasný s vektorem* $\mathbf{u}$ *vzhledem k vektorové nadrovině* $\mathbf{W}$, což označíme $\mathbf{v} \sim \mathbf{u}(\mathrm{mod}\mathbf{W})$, jestliže:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + t\mathbf{u},\ \mathbf{w} \in \mathbf{W},\ t > 0.$$ [70]

[70] Vektor $\mathbf{v}$ je tedy souhlasný s $\mathbf{u}$ vzhledem k určité vektorové nadrovině, je-li roven součtu jistého jejího vektoru a jistého *kladného* násobku vektoru $\mathbf{u}$, což se kryje s naší intuitivní představou o tom, že vektor $\mathbf{u}$ směřuje „na tutéž stranu od dané vektorové nadroviny" jako vektor $\mathbf{u}$.

Poznámka 1.5.10 Zkonstruovali jsme tak korektně definovanou relaci na množině $\mathbf{V} \setminus \mathbf{W}$.

Poznamenejme dále, že obecně postrádá smyslu hovořit o souhlasných vektorech, neudáme-li, vzhledem ke které vektorové nadrovině tento pojem vztahujeme.

Vzhledem k větě 1.5.8 (a trichotomii uspořádání $<$ v T) platí pro *každou* dvojici vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{W}$:

$$\text{buď} \quad \mathbf{v} \sim \mathbf{u}(\mathrm{mod}\mathbf{W}), \quad \text{nebo} \quad (-\mathbf{v}) \sim \mathbf{u}(\mathrm{mod}\mathbf{W}).$$

Příklad 1.5.11 Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ je dána vektorová nadrovina $\mathbf{W} = [(1,1,1),(2,3,0)]$ a vektory $\mathbf{v}_1 = (5,6,5), \mathbf{v}_2 = (0,1,-3), \mathbf{u} = (1,1,2)$. Rozhodněte, zda vzhledem k $\mathbf{W}$ je $\mathbf{v}_1$, resp. $\mathbf{v}_2$, souhlasný s $\mathbf{u}$.

Řešení:

Známý způsobem se přesvědčíme, že $\mathbf{u} \notin \mathbf{W}$ (proveďte).

Nyní (dle věty 1.5.8) lze každý z vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ psát jediným způsobem ve tvaru

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i + t_i\mathbf{u}, \ \mathbf{w}_i \in \mathbf{W}.$$

(i) vektor $\mathbf{v}_1$

Řešíme tedy soustavu rovnic

$$(5,6,5) = \mathbf{w}_1 + t_1(1,1,2) \wedge \mathbf{w}_1 = r_1(1,1,1) + s_1(2,3,0),$$

(proveďte!) a zjistíme, že $r_1 = 1, s_1 = 1$, ($\Rightarrow \mathbf{w}_1 = (3,4,1)$) a $t_1 = 2$. Protože $t_1 > 0$, platí, že $\mathbf{v}_1$ je souhlasný s $\mathbf{u}$ vzhledem k $\mathbf{W}$.

(ii) pro vektor $\mathbf{v}_2$ analogicky zjistíme, že $\mathbf{w}_2 = (1,2,-1)$ a $t_2 = -1$. Protože v tomto případě je $t_2 < 0$, není $\mathbf{v}_2$ souhlasný s $\mathbf{u}$ vzhledem k $\mathbf{W}$.

Přesvědčte se dále, že např. pro volbu $\mathbf{W} = [(5,7,2),(7,7,12)]$ bude situace opačná (srv. poznámka 1.5.10).

Nechť je dána vektorová nadrovina $\mathbf{W}$. Buďte $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ libovolné vektory z $\mathbf{V} \setminus \mathbf{W}$.

- vzhledem k tomu, že $\mathbf{x} = \mathbf{o} + 1\mathbf{x}$ a $\mathbf{o} \in \mathbf{W}$, $1 > 0$, platí $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}(\mathrm{mod}\mathbf{W})$,
- je-li $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}(\mathrm{mod}\mathbf{W})$, existuje $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ a $t > 0$ tak, že můžeme psát:

$$\mathbf{x} = \mathbf{w} + t\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y} = -\tfrac{1}{t}\mathbf{w} + \tfrac{1}{t}\mathbf{x},$$

  jelikož $-\frac{1}{t}\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ a $\frac{1}{t} > 0$, tak $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}(\mathrm{mod}\mathbf{W})$.

- je-li $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}(\mathrm{mod}\mathbf{W})$ a $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}(\mathrm{mod}\mathbf{W})$, existují $\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}} \in \mathbf{W}$ a $t, \bar{t} > 0$, pro něž lze psát:

$$\mathbf{x} = \mathbf{w} + t\mathbf{y} \wedge \mathbf{y} = \overline{\mathbf{w}} + \bar{t}\mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} = (\mathbf{w} + t\overline{\mathbf{w}}) + (t\bar{t})\mathbf{z}.$$

  Vektor $(\mathbf{w} + t\overline{\mathbf{w}}) \in \mathbf{W}$ a $t\bar{t} > 0$, tudíž $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}(\mathrm{mod}\mathbf{W})$.

Věta 1.5.12 *Relace „být souhlasný vzhledem k dané vektorové nadrovině“ je relací ekvivalence na množině vektorů vektorového prostoru, které nenáleží do této nadroviny.*

Poznámka 1.5.13 Ze symetrie „být souhlasný vzhledem k vektorové nadrovině“ plyne, že je-li např. $\mathbf{u}$ souhlasný s $\mathbf{v}$ vzhledem k dané vektorové nadrovině, můžeme říci *vektory jsou vzhledem k dané vektorové nadrovině souhlasné*.

Relace „být souhlasný vzhledem k vektorové nadrovině $\mathbf{W}$“ je relací ekvivalence na množině vektorů $\mathbf{V} \setminus \mathbf{W}$ a indukuje na této množině rozklad. Je otázkou, kolik tříd tento rozklad má.

Buď $\mathbf{x}$ libovolný prvek z $\mathbf{V} \setminus \mathbf{W}$, pak zde jistě existuje (alespoň jeden) vektor $\mathbf{y}$ tak, že $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ nejsou $\mathrm{mod}\mathbf{W}$ souhlasné (proč?). Uvažovaný rozklad má tedy alespoň dvě třídy $\langle \mathbf{x} \rangle, \langle \mathbf{y} \rangle$. Buď $\mathbf{z}$ libovolný další element z $\mathbf{V} \setminus \mathbf{W}$.

Pro vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ existují $\mathbf{w}, \overline{\mathbf{w}} \in \mathbf{W}, t, \bar{t} \in T, t < 0, \bar{t} \neq 0$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{w} + t\mathbf{y} \wedge \mathbf{y} = \overline{\mathbf{w}} + \bar{t}\mathbf{z}. \tag{1.49}$$

Je-li $\bar{t} > 0$, pak jsou $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ souhlasné $\mathrm{mod}\mathbf{W}$, a tedy $\mathbf{z} \in \langle \mathbf{y} \rangle$.

Pokud $\bar{t} < 0$, můžeme s ohledem na (1.49) psát:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{w} + t\overline{\mathbf{w}}) + (t\bar{t})\mathbf{z},$$

což vzhledem k faktu $(\mathbf{w} + t\overline{\mathbf{w}}) \in \mathbf{W}$ a $t\bar{t} > 0$ značí $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}(\mathrm{mod}\mathbf{W})$ a následně $\mathbf{z} \in \langle \mathbf{x} \rangle$.

Platí tedy následující tvrzení:

Věta 1.5.14 *Množina vektorů vektorového prostoru, které nenáleží do dané vektorové nadroviny, se dle relace „být souhlasný vzhledem k této vektorové nadrovině“ rozkládá právě na dvě třídy.*

Následující věta uvádí do souvislosti souhlasnost bází a souhlasnost vektorů dle vektorové nadroviny.

Promyslete si, jak lze induktivním postupem pro dimenzi podprostoru získat dvě souhlasné báze.

Věta 1.5.15 *Buď* $\mathbf{W}$ *vektorová nadrovina prostoru* $\mathbf{V}_n, n \geq 2$.

1. *Nechť* $\overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{C}}$ *jsou souhlasné báze ve* $\mathbf{W}$. *Jsou-li* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *vektory doplňující tyto báze po řadě na báze* $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ *vektorového prostoru* $\mathbf{V}$, *platí:*

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathbf{u} \sim \mathbf{v}(\mathrm{mod}\mathbf{W}).$$

2. *Nechť* $\overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{C}}$ *nejsou souhlasné báze ve* $\mathbf{W}$. *Jsou-li* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *vektory doplňující tyto báze po řadě na báze* $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ *vektorového prostoru* $\mathbf{V}$, *platí:*

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{C} \Leftrightarrow \neg(\mathbf{u} \sim \mathbf{v}(\mathrm{mod}\mathbf{W})).$$

Důkaz: Nechť $\overline{\mathcal{B}} = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_{n-1} \rangle$ a $\overline{\mathcal{C}} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle$. Protože $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbf{W}$, jsou rovny lineárním kombinacím toliko vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_{n-1}$, tudíž pro souřadnice vektorů báze $\mathcal{C}$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ platí:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in-1}, 0)_{\mathcal{B}}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \mathbf{v} = (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn-1}, a_{nn})_{\mathcal{B}} \qquad \end{aligned}\right\} \tag{1.50}$$

Protože $\mathbf{v} \notin \mathbf{W}$, musí být $a_{nn} \neq 0$.
Pro determinant matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{C}$ tak dostáváme:

$$|\mathcal{B}, \mathcal{C}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

a rozvojem dle posledního sloupce vyplývá

$$|\mathcal{B}, \mathcal{C}| = a_{nn} |\overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{C}}|. \tag{1.51}$$

Stanovme nyní význam prvku a_{nn}. Z (1.50) plyne:

$$\mathbf{v} = (\underline{a_{n1}\mathbf{u}_1 + \cdots + a_{nn-1}\mathbf{u}_{n-1}}) + a_{nn}\mathbf{u},$$

protože podtržený výraz je vektorem z $\mathbf{W}$, vyplývá odtud, že $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}(\mathrm{mod}\mathbf{W})$, právě když $a_{nn} > 0$. Z (1.51) dále plyne, že $\mathcal{B} \sim \mathcal{C}$ je ekvivalentní rovněž s $a_{nn} > 0$, čímž je bod 1 věty 1.5.15 dokázán. Platnost bodu 2 plyne analogicky. $\square$

1.5.2 Orientace afinního prostoru. Poloprostory

Nyní se opět vrátíme ke studiu afinních prostorů, a to s využitím právě vybudovaného algebraického aparátu.

Definice 1.5.16 Řekneme, že *afinní prostor $\mathcal{A}$ je orientovaný*, je-li orientováno jeho zaměření.

Kladnou afinní bází prostoru $\mathcal{A}$ budeme rozumět takovou afinní bázi $\mathcal{B} = \langle P, \mathcal{B}_0 \rangle$, kde $\mathcal{B}_0$ je kladnou bází $\mathbf{V}$.

Poznámka 1.5.17 Z odstavce 1.5.1 vyplývá, že orientace afinního prostoru není jeho vnitřní vlastností, ale je dána z vnějšku. Dále z tohoto odstavce plyne, že každý afinní prostor lze orientovat právě dvěma způsoby.

Následující definice užitím pojmu souhlasnosti vektorů dle vektorové nadroviny zavede pojem *poloprostor* – následně ukážeme, že tento pojem odpovídá naší intuitivní představě o polopřímce, polorovině či poloprostoru 3-rozměrného prostoru.

Definice 1.5.18 Buď $\mathcal{N}$ nadrovina afinního prostoru $\mathcal{A}$ a B její libovolný bod. Nechť $\mathbf{u}$ je vektor z $\mathbf{V}$ nenáležící do $V(\mathcal{N})$. Pak se množina označovaná $\mathcal{N}(\mathbf{u})$ a definovaná vztahem

$$\mathcal{N}(\mathbf{u}) = \{X \in \mathcal{A};\ X - B \sim \mathbf{u}(\mathrm{mod} V(\mathcal{N}))\}$$

nazývá *otevřený poloprostor (afinního prostoru $\mathcal{A}$) s hraniční nadrovinou $\mathcal{N}$ určený vektorem* $\mathbf{u}$.[71]

Uzavřeným poloprostorem pak rozumíme množinu $\overline{\mathcal{N}(\mathbf{u})} = \mathcal{N}(\mathbf{u}) \cup \mathcal{N}$.[72]

Poloprostor afinní přímky se nazývá *polopřímka*, poloprostor afinní roviny *polorovina*.

Poznámka 1.5.19 Podmínku pro incidenci bodu X s poloprostorem $\mathcal{N}(\mathbf{u})$ lze ekvivalentně vyjádřit takto:

$$X \in \mathcal{N}(\mathbf{u}) \Leftrightarrow (\exists \mathbf{x} \in \mathbf{V}:\ X = B + \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \sim \mathbf{u}(\mathrm{mod} V(\mathcal{N})))$$

Definice poloprostoru $\mathcal{N}(\mathbf{u})$ je formálně *závislá* na výběru bodu z nadroviny $\mathcal{N}$. Tuto závislost je nutné vyloučit, jinak by nebyla korektní.

[71] Poloprostor $\mathcal{N}(\mathbf{u})$ si můžeme představit jako množinu bodů, které vzniknou přičtením kladného násobku vektoru $\mathbf{u}$ k jistému bodu v $\mathcal{N}$ (nemusí to být bod B!). Užijeme-li *intuitivní* interpretaci pojmu „být souhlasný dle vektorové nadroviny“ následující (pod čarou) definici 1.5.9, jde tedy o množinu bodů X, pro něž vektor $X - B$ „směřuje na tutéž stranu“ od vektorové nadroviny $V(\mathcal{N})$ jako vektor $\mathbf{u}$.

[72] Nebude-li řečeno jinak, budeme pojmem *poloprostor* rozumět vždy poloprostor otevřený.

Označme $V(\mathcal{N}) = \mathbf{W}$. Buďte P, Q libovolné body z $\mathcal{N}$, $\mathbf{u}$ vektor z $\mathbf{V} \setminus \mathbf{W}$. Zvolíme-li libovolný bod $X \in \mathcal{A}$, můžeme psát:

$$X - Q \sim \mathbf{u}(\mathrm{mod}\mathbf{W}) \overset{(a)}{\Leftrightarrow} \exists \mathbf{w} \in \mathbf{W}, t > 0: \; X - Q = \mathbf{w} + t\mathbf{u} \overset{(b)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \exists \mathbf{w} \in \mathbf{W}, t > 0: \; X - P = ((Q - P) + \mathbf{w}) + t\mathbf{u} \overset{(c)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \exists \overline{\mathbf{w}} \in \mathbf{W}, t > 0: \; X - P = \overline{\mathbf{w}} + t\mathbf{u} \Leftrightarrow X - P \sim \mathbf{u}(\mathrm{mod}\mathbf{W}).$$

Přitom jsme v kroku (a) užili definici 1.5.9, v kroku (b) jsme uvážili, že $X - Q = (X - P) + (P - Q)$ a v (c) skutečnosti $P, Q \in \mathcal{N}$ (tj. $Q - P \in \mathbf{W}$), a tedy $\mathbf{W} \ni \overline{\mathbf{w}} = (Q - P) + \mathbf{w}$.

Vzhledem k ekvivalenci výroku $X - Q \sim \mathbf{u}(\mathrm{mod}\mathbf{W})$ a $X - P \sim \mathbf{u}(\mathrm{mod}\mathbf{W})$ je s ohledem na definici 1.5.18 poloprostor $\mathcal{N}(\mathbf{u})$ nezávislý na výběru bodu $B \in \mathcal{N}$.

Věta 1.5.20 *V definici 1.5.18 lze za bod B vzít kterýkoli z bodů nadroviny $\mathcal{N}$.*

Všimněme si dále závislosti poloprostoru $\mathcal{N}(\mathbf{u})$ na výběru vektoru $\mathbf{u}$. Buďte $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ libovolné vektory z $\mathbf{V} \setminus \mathbf{W}$. Nechť B je některý bod z $\mathcal{N}$.

- je-li $\mathcal{N}(\mathbf{u}) = \mathcal{N}(\mathbf{v})$, musí, jak plyne z definice 1.5.18, pro každý bod X z uvažovaného poloprostoru platit:

  $$X - B \sim \mathbf{u}(\mathrm{mod}\mathbf{W}) \wedge X - B \sim \mathbf{v}(\mathrm{mod}\mathbf{W}),$$

  což vzhledem k symetričnosti relace $\sim$ implikuje

  $$\mathbf{u} \sim (X - B)(\mathrm{mod}\mathbf{W}) \wedge X - B \sim \mathbf{v}(\mathrm{mod}\mathbf{W}),$$

  a dále užitím tranzitivity relace $\sim$ obdržíme

  $$\mathbf{u} \sim \mathbf{v}(\mathrm{mod}\mathbf{W}).$$

- nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou souhlasné modulo $\mathbf{W}$.
  Pro libovolný bod $X \in \mathcal{A}$ můžeme psát:

  $$X \in \mathcal{N}(\mathbf{u}) \Rightarrow X - B \sim \mathbf{u}(\mathrm{mod}\mathbf{W}) \Rightarrow X - B \sim \mathbf{v}(\mathrm{mod}\mathbf{W}) \Rightarrow X \in \mathcal{N}(\mathbf{v}),$$

  kde jsme (krom definice 1.5.18) užili tranzitivity relace $\sim$.

  Ukázali jsme, že následující tvrzení je platné.

Věta 1.5.21 *Poloprostor $\mathcal{N}(\mathbf{u})$ se rovná poloprostoru $\mathcal{N}(\mathbf{v})$, právě když*

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v}(\mathrm{mod}V(\mathcal{N})).$$

Definice 1.5.22 *Poloprostorem opačným k poloprostoru* $\mathcal{N}(\mathbf{u})$ rozumíme poloprostor $\mathcal{N}(-\mathbf{u})$.

Z věty 1.5.21 vyplývá (jak?):

Důsledek 1.5.23 *Poloprostorem opačným k* $\mathcal{N}(\mathbf{u})$ *je každý poloprostor* $\mathcal{N}(\mathbf{w})$*, kde* $\neg(\mathbf{u} \sim \mathbf{w}(\mathrm{mod} V(\mathcal{N})))$.

Následující věta přináší (očekávané) rozložení afinního prostoru:

Věta 1.5.24 *Pro libovolnou nadrovinu* $\mathcal{N}$ *afinního prostoru* $\mathcal{A}$ *a libovolný vektor* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ *nenáležící do* $V(\mathcal{N})$ *platí:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{N}(\mathbf{u}) \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{N}(-\mathbf{u}),$$

přičemž každý bod náleží do právě jedné z uvedených množin.

Důkaz: Uvažujme $\mathcal{N} = \{B; \mathbf{W}\}$. Pak dle věty 1.5.8 lze každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ psát právě jedním způsobem ve tvaru $\mathbf{v} = \mathbf{w} + t\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Proto pro každý bod $X \in \mathcal{A}$ lze rovněž jediným způsobem zapsat vektor $X - B$:

$$X - B = \mathbf{w} + t\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}.$$

Pro skalár t nastává právě jedna možnost: $t > 0 \vee t = 0 \vee t < 0$.
Prvá z nich znamená $(X - B) \sim \mathbf{u}(\mathrm{mod}\mathbf{W})$ (a tedy $X \in \mathcal{N}(\mathbf{u})$), druhá $X \in \mathcal{N}$ a třetí $X - B \sim (-\mathbf{u})(\mathrm{mod}\mathbf{W})$ (a tedy $X \in \mathcal{N}(-\mathbf{u})$). □

Přistupme k nalezení analytického vyjádření poloprostoru.
Nechť je v $\mathcal{A}$ zvolena afinní báze $\mathcal{B}$.
Buď dána nadrovina $\mathcal{N}$ a vektor $\mathbf{u}$ neležící v $V(\mathcal{N})$:

$$\mathcal{N} : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0,$$
$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)_{\mathcal{B}_0}.$$

Zvolme v $\mathcal{N}$ libovolný bod B. Pak libovolný bod $X \in \mathcal{A}$ lze jednoznačně (dle věty 1.5.8) psát ve tvaru $X = B + (\mathbf{w} + t\mathbf{u}), \mathbf{w} \in \mathbf{W}$, neboli

$$X = C + t\mathbf{u},\ C \in \mathcal{N}. \tag{1.52}$$

Je-li $X = [x_1, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}, C = [c_1, \cdots, c_n]_{\mathcal{B}}$, můžeme s ohledem na (1.52) psát:

$$\begin{gathered} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = \\ = a_1(c_1 + tu_1) + a_2(c_2 + tu_2) + \cdots + a_n(c_n + tu_n) + a_0 = \\ = (\underline{a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n + a_0}) + t(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n) \end{gathered}$$

a protože $C \in \mathcal{N}$, je podtržený výraz roven nule, a tedy

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = t(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n) \tag{1.53}$$

Vzhledem k tomu, že $X - B = \mathbf{w} + t\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}$, náleží bod X do $\mathcal{N}(\mathbf{u})$, právě když $t > 0$, což je (užijeme-li (1.53)[73]) ekvivalentní tomu, že

$$\operatorname{sgn}(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0) = \operatorname{sgn}(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n),$$

neboli

$$(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n)(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0) > 0,$$

čímž dostáváme analytické vyjádření poloprostoru (nerovnicí).

Věta 1.5.25 *Buďte $\mathcal{N}$ nadrovina afinního prostoru $\mathcal{A}$, $\mathbf{u}$ vektor z $\mathbf{V} \setminus V(\mathcal{N})$, určené ve zvolené afinní bázi takto:*

$$\mathcal{N}: \ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0, \ \mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)_{\mathcal{B}_0}.$$

Pak, položíme-li $n(\mathbf{u}) = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$, platí:

$$\mathcal{N}(\mathbf{u}) = \{X \in \mathcal{A}, X = [x_1, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}} : n(\mathbf{u})(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0) > 0\}.$$

Uveďme alespoň dva důsledky této věty:

Důsledek 1.5.26 *Dva body $Y = [y_1, \cdots, y_n]_{\mathcal{B}}, Z = [z_1, \cdots, z_n]_{\mathcal{B}}$ náleží témuž poloprostoru s hraniční nadrovinou $\mathcal{N}$ danou ve zvolené afinní bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnicí:*

$$\mathcal{N}: \ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$$

právě když platí:

$$\operatorname{sgn}(a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n + a_0) = \operatorname{sgn}(a_1z_1 + a_2z_2 + \cdots + a_nz_n + a_0).$$

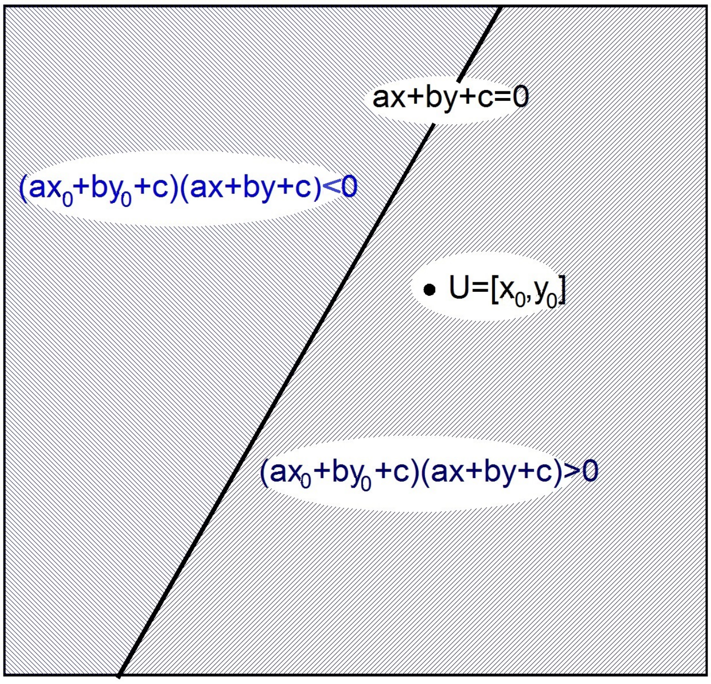
[73]Výraz $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$ je totiž nenulový (proč?).

Důsledek 1.5.27 *poloprostory afinního prostoru $\mathcal{A}$ s touže hraniční nadrovinou danou ve zvolené afinní bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnicí:*

$$\mathcal{N}:\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$$

jsou následující množiny:

$$\{X \in \mathcal{A}, X = [x_1, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}} : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 > 0\},$$
$$\{X \in \mathcal{A}, X = [x_1, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}} : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 < 0\}.$$



Obr. 1.5.2

Ukázali jsme, jak určit poloprostor pomocí nadroviny a vektoru neležícího v jejím zaměření. Je zřejmé, že ekvivalentně je možné určit poloprostor zadáním nadroviny a bodu v ní neležícího (jako ten, který tento bod obsahuje) – to ostatně vyplývá i z důsledku 1.5.26 či 1.5.27 (promyslete si). Je-li $\mathcal{N}$ hraniční nadrovina a $B \notin \mathcal{N}$, pak poloprostor s hraniční nadrovinou $\mathcal{N}$ a obsahující bod B budeme značit $\mathcal{N}(B)$.[74]

[74]Pro případ polopřímky určené bodem N a vektorem $\mathbf{u}$ se užívá též značení $\overrightarrow{N\mathbf{u}}$, pro polopřímku určenou bodem N a obsahující bod B znaku $\overrightarrow{NB}$.

Pro polorovinu s hraniční přímkou XY určenou vektorem $\mathbf{u}$, resp. obsahující bod B pak znaku $\overrightarrow{XY\mathbf{u}}$, resp. $\overrightarrow{XYB}$.

Nyní si povšimneme dalšího rozlišení mezi poloprostory s touže hraniční nadrovinou, a sice založeného na *orientaci* afinního prostoru.

Definice 1.5.28 Buď dána nadrovina $\mathcal{N}$ afinního prostoru $\mathcal{A}$ a buď zvolena orientace nadroviny $\mathcal{N}$ i afinního prostoru $\mathcal{A}$. Nechť $\overline{\mathcal{B}}$ je kladná báze nadroviny $\mathcal{N}$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ vektor, doplňující bázi $\overline{\mathcal{B}}$ na kladnou bázi afinního prostoru $\mathcal{A}$. Pak poloprostor $\mathcal{N}(\mathbf{u})$ se nazývá *poloprostor kladný (vzhledem k uvedeným orientacím)*.
Poloprostor opačný k právě definovanému se nazývá *poloprostor záporný (vzhledem k uvedeným orientacím)*.

Poznámka 1.5.29 Ke každé kladné bázi $\overline{\mathcal{B}}$ nadroviny $\mathcal{N}$ vektor $\mathbf{u}$ požadovaných orientací existuje – doplněním jakéhokoli vektoru $\mathbf{v}$ neležícího ve $V(\mathcal{N})$ k bázi $\overline{\mathcal{B}}$ získáme afinní bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathcal{A}$. Je-li $\mathcal{C}$ jakákoli kladná báze v $\mathcal{A}$, pak záměnou $\mathbf{v} \leftrightarrow (-\mathbf{v})$ se mění znaménko determinantu $|\mathcal{B}, \mathcal{C}|$, což určí „vhodný" výběr vektoru $\mathbf{u} \in \{\mathbf{v}, -\mathbf{v}\}$ tak, aby $\mathcal{B}$ byla kladná.

Naskýtá se otázka, zda zadáním nadroviny $\mathcal{N}$ a orientací v $\mathcal{N}$ a v $\mathcal{A}$ je kladný poloprostor dán jednoznačně či nikoli.
Nechť máme v $\mathcal{N}$ dány dvě kladné báze $\overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{C}}$ a nechť vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je po řadě doplňují na kladné báze $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ prostoru $\mathcal{A}$. Z věty 1.5.15 plyne, že $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}(\mathrm{mod} V(\mathcal{N}))$, což (užijeme-li věty 1.5.21) implikuje, že $\mathcal{N}(\mathbf{u}) = \mathcal{N}(\mathbf{v})$. Co se stane, změní-li se jedna či obě orientace (tj. orientace $\mathcal{N}$ a $\mathcal{A}$)?

Změňme nyní orientaci nadroviny $\mathcal{N}$. Pak se její báze $\overline{\mathcal{B}}$, pomocí níž byl sestrojen dosud kladný poloprostor $\mathcal{N}(\mathbf{u})$ stává bází zápornou. Buď $\overline{\mathcal{D}}$ některá kladná báze $\mathcal{N}$ – $\overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathcal{D}}$ nejsou souhlasné. Doplňme $\overline{\mathcal{D}}$ vektorem $\mathbf{w}$ na kladnou afinní bázi v $\mathcal{A}$ - poloprostor $\mathcal{N}(\mathbf{w})$ je tudíž kladným poloprostorem vzhledem k nové orientaci. V souladu s větou 1.5.15 nejsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ souhlasné modulo $V(\mathcal{N})$, a tedy poloprostory $\mathcal{N}(\mathbf{u})$ a $\mathcal{N}(\mathbf{w})$ jsou navzájem opačné (srv. důsledek 1.5.23).

Změní-li se orientace v $\mathcal{A}$ (při zachování orientace v $\mathcal{N}$), pak vektor $\mathbf{u}$, pomocí nějž byl sestrojen dosud kladný poloprostor $\mathcal{N}(\mathbf{u})$, doplňuje kladnou bázi $\overline{\mathcal{B}}$ nadroviny $\mathcal{N}$ na zápornou bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathcal{A}$. Uvážíme-li $\mathbf{w}$, který není s $\mathbf{u}$ souhlasný modulo $V(\mathcal{N})$, doplňuje podle věty 1.5.15 bázi $\overline{\mathcal{B}}$ na kladnou bázi $\mathcal{D}$ prostoru $\mathcal{A}$ a poloprostor $\mathcal{N}(\mathbf{w})$ je vzhledem k nové orientaci kladným, přitom poloprostory $\mathcal{N}(\mathbf{u})$ a $\mathcal{N}(\mathbf{w})$ jsou navzájem opačné (opět viz důsledek 1.5.23).

Konečně, změní-li se orientace obě, což si lze představit jako postupnou změnu orientace v $\mathcal{N}$ a následně v $\mathcal{A}$, je z předchozího zřejmé, že se poloprostor nezmění.

Následující tvrzení jsou tudíž platná.

Věta 1.5.30 *Buď dána nadrovina afinního prostoru $\mathcal{A}$.*

1. *Kladný poloprostor je jednoznačně určen zadáním hraniční nadroviny, volbou orientace této nadroviny a orientace prostoru $\mathcal{A}$.*
2. *Změní-li se jedna z orientací hraniční nadroviny či prostoru $\mathcal{A}$, stává se kladným poloprostorem poloprostor opačný k původnímu.*
3. *Změní-li se orientace hraniční nadroviny a orientace prostoru $\mathcal{A}$, zůstává kladným poloprostorem poloprostor kladný vzhledem k původní orientaci.*

V podkapitole 1.7 nalezneme další možný popis poloprostoru, pomocí tzv. *lineární kombinace bodů* (věta 1.7.23).

1.5.3 Orientace a uspořádání na přímce

V tomto odstavci si všimneme přímky, jakožto speciálního případu afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ pro $n = 1$. Na druhé straně se ukáže zavedení pojmů, které jsme pro $n > 1$ neuvažovali.

Poznámka 1.5.31

- Ve $\mathbf{V}_1$ existuje jediná vektorová nadrovina, a sice $\{\mathbf{o}\}$. Z tohoto důvodu budeme říkat, že vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *jsou souhlasné*, aniž bychom dodávali modulo $\{\mathbf{o}\}$, značit tento fakt budeme $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$.
- Ve $\mathbf{V}_1$ je každá báze jednoprvková množina. Dvě báze $\langle \mathbf{a} \rangle, \langle \mathbf{b} \rangle$ jsou tedy souhlasné, právě když $\exists t > 0 : \mathbf{b} = t\mathbf{a}$, což je ovšem právě když $\mathbf{b} \sim \mathbf{a}$. To nám dává právo zavést pojem *kladný vektor*, jakožto prvek některé kladné báze, zřejmě platí, že *každé dva kladné vektory jsou souhlasné*.
- Lze tudíž říci, že *orientovat přímku* znamená označit některý nenulový vektor jejího zaměření (tj. některý její směrový vektor) za kladný (srv. s definicí 1.5.16).

Pojem, který zavede následující definice, je jistě čtenářem běžně intuitivně užíván a zřejmě tato představa je s jeho exaktní definicí v souladu.

Definice 1.5.32 Buď p přímka orientovaná tak, že $\mathbf{a}$ je její kladný vektor. O bodech $X, Y \in p$ řekneme, že bod X *je před bodem* Y *(ve zvolené orientaci)*, což budeme značit $X \prec Y$, jestliže $(Y - X) \sim \mathbf{a}$.[75]

[75] Užívá se také obratu *bod* X *předchází bod* Y.

Z úvodní poznámky 1.5.31 ihned plyne:

Věta 1.5.33 *Je-li p přímka orientovaná tak, že $\mathbf{a}$ jej její kladný vektor, pak pro libovolné body $X, Y \in p$ platí:*

$$X \prec Y \Leftrightarrow \exists t \in T, t > 0 : \; Y - X = t\mathbf{a}.$$

Změníme-li orientaci na přímce p, stává se kladným vektorem vektor $-\mathbf{a}$ (proč?). Protože $t\mathbf{a} = (-t)(-\mathbf{a})$, plyne z věty 1.5.33 ihned:

Věta 1.5.34 *Změna orientace přímky má za následek změnu relace „být před" v relaci inverzní.*[76]

Povšimněme si souvislosti relace $\prec$ na bodech přímky s relací $<$ na prvcích tělesa T.

Věta 1.5.35 *Buď $p = \{B; \mathbf{u}\}$ přímka orientovaná tak, že $\mathbf{u}$ je kladný vektor. Pak pro každé body $X, Y \in p$, $X = B + x\mathbf{u}$, $Y = B + y\mathbf{u}$, platí:*

$$X \prec Y \Leftrightarrow x < y.$$

Důkaz: Jsou-li $X, Y \in p$, $X = B + x\mathbf{u}$, $Y = B + y\mathbf{u}$, pak $(Y - X) = (y - x)\mathbf{u}$. Užitím věty 1.5.33 odtud plyne: $X \prec Y \Leftrightarrow y - x > 0 \Leftrightarrow x < y$. □

Bezprostředně z této věty dostáváme:

Důsledek 1.5.36 *Relace „být před" je relací uspořádání na množině bodů přímky s týmiž vlastnostmi, jaké má uspořádání $<$ v T. Je tedy ireflexivní ($\forall X \in p : \neg(X \prec X)$), asymetrická ($\forall X, Y \in p : \neg(X \prec Y \wedge Y \prec X)$), tranzitivní ($\forall X, Y, Z \in p : X \prec Y \wedge Y \prec Z \Rightarrow X \prec Z$) a trichotomická ($\forall X, Y \in p : X \prec Y \vee X = Y \vee Y \prec X$, přičemž nastává právě jedna z těchto možností). Dále může být např. husté ($\forall X, Y \in p \; \exists Z \in p : X \prec Z \prec Y$ – např. pro $T = Q$) či spojité (na p neexistují tzv. mezery $T = \mathbb{R}$).*

Uvedené uspořádání bodů na přímce se nazývá přirozené uspořádání.

Výslovně uveďme, že nad tělesy, která nejsou uspořádaná, relaci „být před" zavést *nelze* (např. $T = \mathbb{C}$), což platí i pro pojmy na tomto uspořádání založené, jako např. polopřímka či úsečka.

[76] Tj. je-li $\prec$ původní relace a $\prec'$ relace určená novou orientací, platí:

$$\forall X, Y \in p : \; X \prec Y \Leftrightarrow Y \prec' X.$$

Všimněme si nyní polopřímky – tj. poloprostoru v $\mathcal{A}_1$.
V souladu s definicí 1.5.18 je každá polopřímka na přímce p určena hraničním bodem ($\dim \mathcal{N} = 1 - 1 = 0$) a nenulovým vektorem patřícím zaměření $V(p)$. Označíme-li hraniční bod N a určující vektor $\mathbf{u}$, můžeme s ohledem na poznámku 1.5.31 psát:

$$\mathcal{N}(\mathbf{u}) = \{X \in p : \ X - N \sim \mathbf{u}\} =$$
$$= \{X \in p : \ X - N = t\mathbf{u}, t > 0\} = \{X \in p : \ X = N + t\mathbf{u}, t > 0\},$$

a je-li p orientována tak, že $\mathbf{u}$ je kladný, je $X - N \sim \mathbf{u}$ dále ekvivalentní s $N \prec X$ (srv. s definicí 1.5.32).

Úmluva 1.5.37 Polopřímku určenou bodem N a vektorem $\mathbf{u}$, resp. určenou bodem N a obsahující bod M budeme přednostně značit $\overrightarrow{N\mathbf{u}}$, resp. $\overrightarrow{NM}$.

Věta 1.5.38 *Pro polopřímku přímky p určenou bodem N a vektorem $\mathbf{u}$ platí:*

$$\overrightarrow{N\mathbf{u}} = \{X \in p : \ X = N + t\mathbf{u}, t > 0\}.$$

Je-li přímka p orientována tak, že $\mathbf{u}$ je kladný vektor, platí dále:

$$\overrightarrow{N\mathbf{u}} = \{X \in p : \ N \prec X\}.$$

Věta 1.5.24 zformulovaná pro $\dim \mathcal{A} = 1$ zní:

Věta 1.5.39 *Je-li N libovolný bod přímky p, $\mathbf{u}$ libovolný nenulový vektor z $V(p)$, pak pro každý bod $X \in p$ nastane právě jedna z následujících možností:*

$$X \in \overrightarrow{N\mathbf{u}} \ \vee X = N \vee \ X \in \overrightarrow{N(-\mathbf{u})}$$

Podobně z věty 1.5.21 (a poznámky 1.5.31) dostáváme:

Věta 1.5.40 *Je-li N libovolný bod přímky p, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ libovolné nenulové vektory z $V(p)$, pak platí:*

$$\overrightarrow{N\mathbf{u}} = \overrightarrow{N\mathbf{v}} \Leftrightarrow \mathbf{v} = t\mathbf{u}, t > 0.$$

Věta 1.5.38 uvádí (v první části) parametrické vyjádření polopřímky. Všimněme si parametrického vyjádření polopřímky dále.

Uvažujme přímku $p = \{C; \mathbf{v}\}$, $B \in p$, $\mathbf{u} = k\mathbf{v}, k \neq 0$ a polopřímku $\overrightarrow{B\mathbf{u}}$. Podle věty 1.5.38 pro zkoumanou polopřímku platí:

$$X \in \overrightarrow{B\mathbf{u}} \ \Leftrightarrow X = B + x\mathbf{u}, x > 0.$$

Bod $B \in p$ lze psát $B = C + b\mathbf{v}$ a dostáváme tak:

$$X = B + x\mathbf{u} = C + b\mathbf{v} + x\mathbf{u} = C + (b + kx)\mathbf{v}$$

neboli

$$X = C + t\mathbf{v} \wedge t = b + kx. \tag{1.54}$$

Rozlišíme-li dva případy: $\mathbf{v} \sim \mathbf{u}$ a $\neg(\mathbf{v} \sim \mathbf{u})$, pak užitím (1.54) obdržíme:

(i) $\mathbf{v} \sim \mathbf{u}$, což značí $k > 0$. V tom případě je $x > 0$ ekvivalentní $t > b$.

(ii) $\neg(\mathbf{v} \sim \mathbf{u})$, což značí $k < 0$. V tom případě je $x > 0$ ekvivalentní s $t < b$.

Platí proto následující věta:

Věta 1.5.41 *Buď dána přímka $p = \{C; \mathbf{v}\}$, bod $B \in p$, $B = C + b\mathbf{v}$. Pak pro polopřímku $\overrightarrow{B\mathbf{u}}$ platí:*

1. *jestliže $\mathbf{v} \sim \mathbf{u}$, pak:*
$$\overrightarrow{B\mathbf{u}} = \{X = C + t\mathbf{v} : \ t > b\},$$

2. *jestliže $\neg(\mathbf{v} \sim \mathbf{u})$, pak:*
$$\overrightarrow{B\mathbf{u}} = \{X = C + t\mathbf{v} : \ t < b\}.$$

Relace „být před“ nám umožní přirozeným způsobem zavést dva následující pojmy:

Definice 1.5.42 Buď p orientovaná přímka, A, B její libovolné navzájem různé body. Řekneme, že bod X *leží mezi body A a B*, jestliže platí:

$$A \prec X \wedge X \prec B \quad \text{nebo} \quad B \prec X \wedge X \prec A.$$

Poznámka 1.5.43

- ze zavedení relace „být před“ plyne, že *každý bod ležící mezi dvěma různými body přímky p je rovněž bodem přímky p.*
- z věty 1.5.34 vyplývá, že *relace „ležet mezi“ nezávisí na volbě orientace přímky p.*

Definice 1.5.44 Buďte $A, B \in \mathcal{A}$ dvojice různých bodů. Pak množinu bodů z $\mathcal{A}$ ležících mezi body A, B nazýváme *otevřená úsečka s krajními body A, B* a značíme ji $\overline{AB}$.

Uzavřenou úsečkou s krajními body A, B rozumíme sjednocení otevřené úsečky s množinou $\{A, B\}$.[77]

[77] Nebude-li řečeno jinak, budeme pojmem *úsečka* rozumět vždy úsečku otevřenou.

Na úsečku lze pohlížet i jinak – intuitivně očekáváme platnost dvou vět následujících.

Věta 1.5.45 *Buďte $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$. Pak úsečka AB je rovna průniku polopřímek $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$.*

Důkaz: Orientujme přímku procházející body A, B (tj. přímku $p = \{A; B-A\}$) tak, že $B-A$ je kladný vektor, což není s ohledem na poznámku 1.5.43 na újmu obecnosti.

Pro polopřímky dle věty 1.5.38 platí:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A, B-A} = \{X \in p : \ A \prec X\},$$

a s ohledem na větu 1.5.34 (vektor $A - B$ je ve zvolené orientaci záporný, promyslete si!)

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B, A-B} = \{X \in p : \ X \prec B\}.$$

Zřejmě $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \{X \in p : \ A \prec X \wedge X \prec B\}$, což je v souladu s definicí 1.5.44 úsečka $\overline{AB}$. $\square$

Důsledkem právě dokázané věty a věty 1.5.41 (položíme-li $\mathbf{u} = B - A$) je následující tvrzení.

Věta 1.5.46 *Buď $p = \{C; \mathbf{v}\}$ přímka, A, B její libovolné body, $A \neq B$, takové, že $A = C + a\mathbf{v}, B = C + b\mathbf{v}$. Pak platí:*

$$\overline{AB} = \{X \in p, X = C + t\mathbf{v} : \ (a < t < b) \vee (b < t < a)\}.$$

Pomocí pojmu *úsečka* můžeme podat následující interpretaci pojmu *poloprostor* (srv. důsledek 1.5.26) korespondující zřejmě s naším názorem.

Věta 1.5.47 *Dva body Y, Z náleží témuž otevřenému poloprostoru s hraniční nadrovinou $\mathcal{N}$, právě když otevřená úsečka $\overline{YZ}$ nemá s nadrovinou $\mathcal{N}$ žádný společný bod.*

Důkaz: Buďte Y, Z libovolné body z $\mathcal{A}$ neležící v $\mathcal{N}$.
Položme $\mathbf{W} = V(\mathcal{N})$.
Zvolme bod $P \in \mathcal{N}$. Pak existují $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$ neležící ve $\mathbf{W}$ (proč?) tak, že:

$$Y = P + \mathbf{y}, \ Z = P + \mathbf{z}. \tag{1.55}$$

Protože $\mathbf{y}, \mathbf{z} \notin \mathbf{W}$, existuje $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ a $c \in T, c \neq 0$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{w} + c\mathbf{z} \tag{1.56}$$

Buď $X \in \mathcal{A}$. Pak dle věty 1.5.46 platí:

$$X \in \overline{YZ} \Leftrightarrow X = Z + t(Y - Z),\ 0 < t < 1,$$

a s ohledem na (1.55) a (1.56) náleží tudíž bod X na $\overline{YZ}$, právě když:

$$X = P + (t(c-1)+1)\mathbf{z} + t\mathbf{w},\ \text{kde } 0 < t < 1, \mathbf{w} \in \mathbf{W}, \mathbf{z} \notin \mathbf{W}.$$

Uvážíme-li, že $\mathbf{w} \in \mathbf{W}, \mathbf{z} \notin \mathbf{W}$, lze tedy tvrdit, že na $\overline{YZ}$ bude existovat bod X ležící současně v $\mathcal{N}$ (tj. tvaru $P + \mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbf{W}$), právě když

$$t(c-1) + 1 = 0,$$

neboli ($t \neq 0$):

$$c = 1 - \tfrac{1}{t},$$

a jelikož $0 < t < 1$, existuje takový bod jen tehdy, pokud $c < 0$. To je však dle (1.56) ekvivalentní tomu, že

$$\neg(\mathbf{y} \sim \mathbf{z}(\mathrm{mod}\mathbf{W})),$$

takže uvažované body Y, Z by ležely v navzájem opačných poloprostorech s hraniční nadrovinou $\mathcal{N}$ (proč?). □

Příklad 1.5.48 V prostoru $\mathcal{A}_3$ nad $\mathbb{Q}$ je dána rovina ρ a dvojice bodů B, C ve zvolené soustavě souřadnic takto:

$$\rho : 2x_1 + x_2 - x_3 = 1,$$
$$B = [6, 2, 12],\ C = [3, -4, 3].$$

Rozhodněte, zda body B, C leží v témže poloprostoru s hraniční rovinou ρ.
Řešení:
Podle důsledku 1.5.26 postačí zjistit znaménka, kterých nabývá výraz

$$2x_1 + x_2 - x_3$$

po dosazení souřadnic jednotlivých bodů.

- bod $B:\ 2 \cdot 6 + 2 - 12 - 1 = 1 > 0$,
- bod $C:\ 2 \cdot 3 - 4 - 3 - 1 = -2 < 0$,

což znamená, že body B, C leží v navzájem *opačných* poloprostorech s hraniční rovinou ρ.

K témuž výsledku můžeme dojít i např. užitím věty 1.5.47 – zjistíme průnik úsečky $\overline{BC}$ s ρ.
Úsečka $\overline{BC}$ je (srv. věta 1.5.46) dána parametrickým vyjádřením

$$X = B + t(C - B),\ 0 < t < 1.$$

Protože $\overline{BC} \subset \overleftrightarrow{BC}$, najdeme nejdříve průnik $\overleftrightarrow{BC} \cap \rho$:
Přímka $\overleftrightarrow{BC} = \{B; C - B\}$ je dána parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 - 3t \\ x_2 &= 2 - 6t \\ x_3 &= 12 - 9t \end{aligned}$$

pro vyšetřovaný průnik obdržíme

$$2(6 - 3t) + (2 - 6t) - (12 - 9t) = 1,$$

odkud

$$t = \tfrac{1}{3},$$

což značí, že $\overleftrightarrow{BC} \cap \rho = \{X\},\ X = [5, 0, 9]$. Protože hodnota parametru příslušející bodu X leží mezi 0 a 1, je X bodem úsečky $\overline{BC}$. Průnik $\overline{BC} \cap \rho$ je neprázdný – body B, C náleží opačným poloprostorům s hraniční rovinou ρ.

1.6 Střed dvojice bodů. Dělicí poměr trojice bodů

Úvahy této podkapitoly budeme provádět pro případ, kdy charakteristika tělesa T není rovna 2.[78]

Následující definice zřejmě odpovídá naší intuitivní představě pojmu *střed dvojice bodů*.

Definice 1.6.1 Buďte $B, C \in \mathcal{A}$. Pak *středem dvojice bodů* B, C rozumíme bod

$$B + \tfrac{1}{2}(C - B),$$

který budeme značit (B, C).

[78] Tj. $2 \times 1 \neq 0$.

Věta 1.6.2 *Pro libovolné body $B, C \in \mathcal{A}$ platí:*

1. $(B, C) = (C, B)$;
2. $(B, C) = B \Leftrightarrow B = C$;
3. *je-li* $B \neq C$, *pak* (B, C) *náleží přímce* $\overleftrightarrow{BC}$;
4. *je-li* $B \neq C$ *a těleso* T *je uspořádané, pak* (B, C) *náleží úsečce* $\overline{BC}$;
5. *je-li* $\mathcal{B}$ *libovolná afinní báze prostoru* $\mathcal{A}$, $B = [b_1, \cdots, b_n]_{\mathcal{B}}$ *a* $C = [c_1, \cdots, c_n]_{\mathcal{B}}$, *pak* i*-tá souřadnice bodu* (B, C), $1 \leq i \leq n$, *je rovna*

$$\tfrac{1}{2}(b_i + c_i).$$

Důkaz:

Ad 1: V souladu s definicí 1.6.1 můžeme psát:

$$(B, C) = B + \tfrac{1}{2}(C - B),\ (C, B) = C + \tfrac{1}{2}(B - C),$$

tudíž

$$\begin{aligned}(B, C) - (C, B) &= (B - C) + \tfrac{1}{2}(C - B) - \tfrac{1}{2}(B - C) = \\ &= (B - C) + \tfrac{1}{2}(C - B) + \tfrac{1}{2}(C - B) = (B - C) + (C - B) = \mathbf{o},\end{aligned}$$

což znamená, že $(B, C) = (C, B)$.

Ad 2:

$$(B, C) = B \Leftrightarrow B = B + \tfrac{1}{2}(C - B) \Leftrightarrow \mathbf{o} = \tfrac{1}{2}(C - B) \Leftrightarrow \mathbf{o} = C - B \Leftrightarrow B = C.$$

Ad 3: Platnost tvrzení je evidentní.

Ad 4: Tvrzení plyne z věty 1.5.46.

Ad 5: Dle definice 1.6.1 je $(B, C) = B + \frac{1}{2}(C - B)$. Jak jsme ukázali v podkapitole 1.2, je i-tá souřadnice bodu (B, C) rovna součtu i-té souřadnice bodu B a i-té souřadnice vektoru $\frac{1}{2}(C - B)$, tj. součtu $b_i + \frac{1}{2}(c_i - b_i)$, odkud již vyplývá dokazované.

□

S dalším způsobem vyjádření středu dvojice bodů (jakožto lineární kombinace bodů) se setkáme v podkapitole 1.7.

Prozkoumejme, zda v námi budované axiomatické teorii určují dvě ekvipolentní dvojice bodů týž vektor (viz zavedení fyzikálního prostoru – podkapitola 1.1.1):

Zvolme libovolnou čtveřici bodů $U, V, X, Y \in \mathcal{A}$ a zjistěme, kdy bude střed dvojice bodů U, Y roven středu dvojice V, X. Platí tedy:

$$(U, Y) = U + \tfrac{1}{2}(Y - U) \wedge (V, X) = V + \tfrac{1}{2}(X - V).$$

Pro rozdíl $(V, X) - (U, Y)$ obdržíme:

$$\begin{gathered}(V, X) - (U, Y) = (V + \tfrac{1}{2}(X - V)) - (U + \tfrac{1}{2}(Y - U)) = \\ = (V - U) + \tfrac{1}{2}(X - V) + \tfrac{1}{2}(U - Y) = (V - U) + \tfrac{1}{2}((X - V) + (U - Y)) = \\ = (V - U) + \tfrac{1}{2}((U - V) + (X - Y)) = \tfrac{1}{2}(2(V - U) - (V - U) + (X - Y)) = \\ = \tfrac{1}{2}((V - U) + (X - Y)),\end{gathered}$$

a proto

$$(V, X) - (U, Y) = \mathbf{o} \Leftrightarrow (V - U) + (X - Y) = \mathbf{o} \Leftrightarrow V - U = Y - X,$$

což vyjadřuje následující věta:

Věta 1.6.3 *Pro libovolné body $U, V, X, Y \in \mathcal{A}$ platí:*

$$V - U = Y - X \;\Leftrightarrow\; (V, X) = (U, Y).$$

Nyní zavedeme druhý z pojmů v nadpisu této podkapitoly:

Definice 1.6.4 Buďte C, D, X kolineární body, $C \neq D$ a $X \neq D$. Pak se skalár $k \in T$ takový, že

$$(X - C) = k(X - D),$$

nazývá *dělicí poměr (uspořádané) trojice bodů* C, D, X a značí se $k = (C, D, X)$.

Poznámka 1.6.5 Různost bodů C, D požadujeme proto, že v opačném případě by pro *každý* bod $X \in \mathcal{A}, X \neq C$, bylo $k = 1$. Naopak, v případě $C \neq D$ není patrně $k = 1$ pro žádný bod $X \in \mathcal{A}$.

Požadavek $X \neq D$ je dán tím, že v případě $X = D$ by (za předpokladu $C \neq D$) skalár k neexistoval.

Je přirozenou otázkou, zda pro každou trojici bodů C, D, X splňující předpoklady definice 1.6.4 je dělicí poměr definován a dále, zda při pevně zvolené dvojici C, D existuje ke každému skaláru k, $k \neq 1$, bod X tak, že $k = (C, D, X)$.

Jsou-li $C, D \in \mathcal{A}$ libovolné navzájem různé body, pak ke každému bodu $X \in \overleftrightarrow{CD}$ existuje jediné $t \in T$ tak, že[79]

$$X = C + t(D - C). \tag{1.57}$$

Dále platí:

$$k = (C, D, X) \Leftrightarrow (X - C) = k(X - D). \tag{1.58}$$

Odpověď na uvedené otázky nalezneme vyjádřením závislosti mezi k a t. Z (1.57) plyne:

$$X - C = t(D - C) = t((D - X) + (X - C)) = t(D - X) + t(X - C),$$

odkud

$$(t - 1)(X - C) = t(X - D),$$

a jelikož $t \neq 1$ (neboť $X \neq D$), dostáváme

$$(X - C) = \tfrac{t}{t-1}(X - D),$$

což s ohledem na (1.58) znamená:

$$k = \tfrac{t}{t-1} \quad \text{neboli} \quad t = \tfrac{k}{k-1}. \tag{1.59}$$

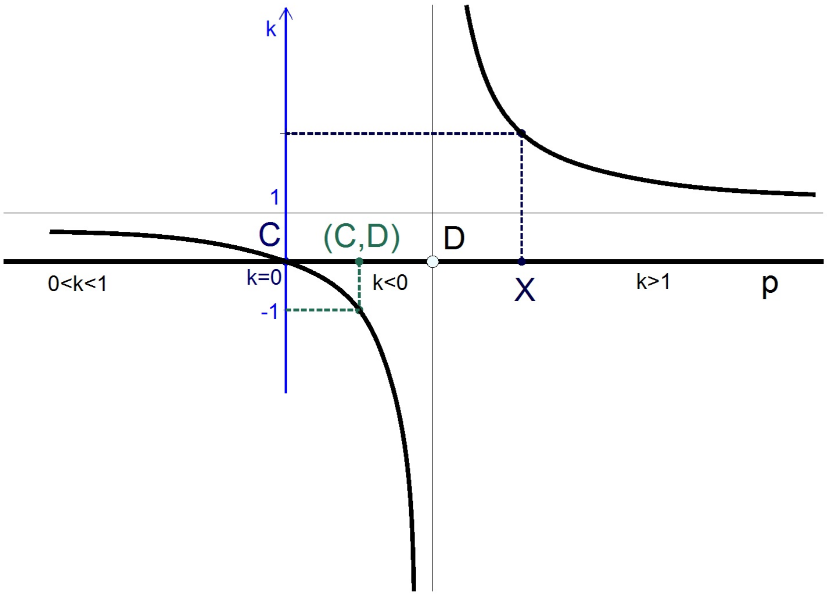
Právě nalezený vzájemně jednoznačný vztah mezi hodnotou parametru t bodu $X \in \overleftrightarrow{CD}$ a dělicího poměru $k = (C, D, X)$ za podmínky $t \neq 1, k \neq 1$ nás opravňuje k vyslovení následujícího tvrzení.

Věta 1.6.6 *Buďte $C, D, X \in \mathcal{A}$, $C \neq D$ libovolné body. Pak platí:*

1. $\forall X \in \overleftrightarrow{CD}, X \neq D,\ \exists! k \in T:\ k = (C, D, X)$;
2. $\forall k \in T, k \neq 1,\ \exists! X \in \overleftrightarrow{CD}:\ k = (C, D, X)$.

Poznámka 1.6.7 V případě, kdy je T uspořádané těleso, rozpadá se přímka $\overleftrightarrow{CD}$ na polopřímku $\overrightarrow{C, C-D}$, úsečku $\overline{CD}$, polopřímku $\overrightarrow{D, D-C}$ a jednobodové množiny $\{C\}$, $\{D\}$. Z (1.59) snadno vyvodíme, že pro bod X probíhající přímku $\overleftrightarrow{CD}$ nabývá dělicí poměr $k = (C, D, X)$ hodnot znázorněných následujícím obrázkem 1.6.1:

[79] Viz větu 1.3.14.



Obr. 1.6.1

1.7 Lineární kombinace bodů

1.7.1 Základní vlastnosti lineární kombinace bodů

Pojem *lineární kombinace vektorů* je čtenáři již znám. Je-li např. vektor $\mathbf{x}$ roven $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$, mají souřadnice vektorů $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)_{\mathcal{B}_0}, \mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)_{\mathcal{B}_0}$ a $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)_{\mathcal{B}_0}$ v *libovolné* bázi $\mathcal{B}_0$ prostoru $\mathbf{V}$ následující vlastnost:

$$(x_1, \cdots, x_n) = 2(u_1, \cdots, u_n) + 3(v_1, \cdots, v_n).$$

Obráceně však také platí, že vytvoříme-li *libovolnou lineární kombinaci aritmetických vektorů souřadnic* vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ v dané bázi, získáme tak souřadnice vektoru (v téže bázi), který bude lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ s týmiž koeficienty.

Je možné najít analogii tohoto postupu pro body z $\mathcal{A}$? Na rozdíl od vektorů však součet bodů ani násobení bodu skalárem definováno nemáme. Z předešlé podkapitoly (podkapitola 1.6) známe jeden možný příklad:

Jsou-li $X = [x_1, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}$ a $Y = [y_1, \cdots, y_n]_{\mathcal{B}}$ body z $\mathcal{A}$, pak souřadnicemi $u_1, \cdots, u_n$, pro něž platí

$$(u_1, \cdots, u_n) = \tfrac{1}{2}(x_1, \cdots, x_n) + \tfrac{1}{2}(y_1, \cdots, y_n)$$

je skutečně *nezávisle na volbě báze* $\mathcal{B}$ určen *bod* $U = [u_1, \cdots, u_n]_{\mathcal{B}}$, který je středem dvojice X, Y a jsme jej „oprávněni“ psát ve tvaru:[80]

$$U = \tfrac{1}{2}X + \tfrac{1}{2}Y.$$

[80] Jistě jste se s tímto zápisem na střední škole setkali.

Podobně souřadnicemi $u_1, \cdots, u_n$ s vlastností

$$(u_1, \cdots, u_n) = (y_1, \cdots, y_n) - (x_1, \cdots, x_n)$$

je *nezávisle na volbě báze* dán *vektor* $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)_{\mathcal{B}_0}$, který je rozdílem bodů $Y - X$, který bychom mohli „oprávněně“ psát ve tvaru

$$\mathbf{u} = 1Y + (-1)X.$$

Obecně však tento postup selhává – zvolíme-li některé dva různé body $X, Y \in \mathcal{A}$ a „definujeme-li“ analogicky relací např.

$$(u_1, \cdots, u_n) = (y_1, \cdots, y_n) + (x_1, \cdots, x_n),$$

bod U o souřadnicích $u_1, \cdots, u_n$, který bychom rádi zapsali symbolem $U = X + Y$, je patrno, že zatímco např. v bázi $\mathcal{B}$, v níž je X počátkem, bude $(u_1, \cdots, u_n) = (y_1, \cdots, y_n)$, takže výsledkem naší „lineární kombinace“ je $U = Y$, bude v bázi $\mathcal{C}$ s počátkem Y výsledkem této kombinace $U = X$. To však vzhledem k předpokladu $X \neq Y$ znamená, že uvedenou relací není korektně definován žádný bod z $\mathcal{A}$ (ale ani vektor z $\mathbf{V}$), a tudíž zápis $U = X + Y$ postrádá smyslu.

V následujícím textu proto ukážeme, jak lze pojem *lineární kombinace bodů* korektně zavést.[81]

Nechť jsou dány body $B_1, B_2, \cdots, B_k \in \mathcal{A}$ a skaláry $c_1, c_2, \cdots, c_k \in T$.

(i) Zvolme bod $R \in$ a zkonstruujme bod U_R takto:

$$U_R = R + c_1(B_1 - R) + c_2(B_2 - R) + \cdots + c_k(B_k - R) \tag{1.60}$$

a hledejme podmínky, za nichž by bod U_R nezávisel na volbě bodu R, což nastane, právě když pro libovolný bod $Q \neq R$ bude platit

$$U_R = U_Q,$$

neboli s ohledem na (1.60):

$$R + c_1(B_1 - R) + \cdots + c_k(B_k - R) = Q + c_1(B_1 - Q) + \cdots + c_k(B_k - Q),$$

[81] Inspirací k tomu může sloužit tato úvaha:
Je-li U střed dvojice bodů X, Y, je dle definice 1.6.1 definován jako bod $X + \frac{1}{2}(Y - X)$ a lze jej tedy pro libovolný $R \in \mathcal{A}$ psát:

$$U = R + (X - R) + \tfrac{1}{2}(Y - R) + \tfrac{1}{2}(R - X) = R + \tfrac{1}{2}(X - R) + \tfrac{1}{2}(Y - R).$$

Podobně lze pro libovolný $R \in \mathcal{A}$ vektor $\mathbf{u} = Y - X$ psát ve tvaru:

$$\mathbf{u} = (Y - R) - (X - R).$$

což můžeme dále přepsat:

$$c_1((B_1-R)-(B_1-Q))+c_2((B_2-R)-(B_2-Q))+\cdots+c_k((B_k-R)-(B_k-Q)) = \\ = Q-R$$

až konečně dále

$$(c_1+c_2+\cdots+c_k-1)(Q-R)=\mathbf{o},$$

což je vzhledem k předpokladu $Q \neq R$ ekvivalentní s

$$c_1+c_2+\cdots+c_k=1.$$

(ii) Zvolme bod $U_R \in \mathcal{A}$ a dále zkonstruujeme vektor $\mathbf{u}_R$ takto:

$$\mathbf{u}_R = c_1(B_1-R)+c_2(B_2-R)+\cdots+c_k(B_k-R). \tag{1.61}$$

Vektor $\mathbf{u}_R$ bude nezávislý na volbě bodu R, právě když bude pro libovolný $Q \neq R$ bude platit

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{u}_Q,$$

čili (viz (1.61)):

$$c_1(B_1-R)+c_2(B_2-R)+\cdots+c_k(B_k-R) = c_1(B_1-Q)+c_2(B_2-Q)+\cdots+c_k(B_k-Q),$$

což lze upravit na tvar:

$$c_1((B_1-R)-(B_1-Q))+c_2((B_2-R)-(B_2-Q))+\cdots+c_k((B_k-R)-(B_k-Q)) = \mathbf{o}$$

neboli

$$(c_1+c_2+\cdots+c_k)(Q-R)=\mathbf{o},$$

což je s ohledem na $Q \neq R$ ekvivalentní s

$$c_1+c_2+\cdots+c_k=0.$$

Nyní je přirozenou otázkou, jak vyjádřit souřadnice bodu U_R, resp. vektoru $\mathbf{u}_R$, pomocí bodů $B_1, B_2, \cdots, B_k \in \mathcal{A}$ a skalárů $c_1, c_2, \cdots, c_k \in T$.

Zvolme v $\mathcal{A}_n$ bázi $\mathcal{B}$ a nechť $B_i = [b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{in}]_{\mathcal{B}}$, $1 \leq i \leq k$. Vzhledem k tomu, že bod U_R, resp. vektor $\mathbf{u}_R$, v případě, kdy $c_1+c_2+\cdots+c_k=1$, resp. $c_1+c_2+\cdots+c_k=0$, nezávisí na volbě bodu R, zvolme R za počátek báze $\mathcal{B}$ – tj. $R=[0,\cdots,0]_{\mathcal{B}}$.

(iii) Vyšetřeme souřadnice bodu $U_R = [u_1, u_2, \cdots, c_n]_{\mathcal{B}}$ definovaného dle (1.60)

$$U_R = R + (\underline{c_1(B_1-R)+c_2(B_2-R)+\cdots+c_k(B_k-R)}).$$

S ohledem na větu 1.2.8 platí:

Pro libovolné $i, 1 \leq i \leq n$ je u_i zřejmě rovno i-té souřadnici podtrženého vektoru[82] a protože i-tá souřadnice vektoru $B_j - R$ pro $j=1,\cdots,k$ rovna b_{ji} (proč?), je i-tá souřadnice podtrženého vektoru – tedy též u_i – zřejmě rovna výrazu

$$c_1b_{1i}+c_2b_{2i}+\cdots+c_kb_{ki}. \tag{1.62}$$

[82] Tj. součtu i-té souřadnice bodu R a i-té souřadnice podtrženého vektoru.

(iv) Pro souřadnice vektoru $\mathbf{u}_R = (u_1, u_2, \cdots, u_n)_{\mathcal{B}_0}$ definovaného relací (1.61), tj.

$$\mathbf{u}_R = c_1(B_1 - R) + c_2(B_2 - R) + \cdots + c_k(B_k - R)$$

obdržíme analogicky výše uvedené úvaze pro „podtržený vektor“, že souřadnice u_i, $1 \leq i \leq n$ je rovněž dána vztahem (1.62)

S ohledem na odstavce (i), (ii) je následující definice korektní, přičemž symbolické označení lineární kombinace je zřejmě motivováno relací (1.62) odvozenou v odstavcích (iii), (iv), což vzápětí vyslovíme jako větu1.7.3.

Definice 1.7.1 Buďte $B_1, B_2, \cdots, B_k, R$ body z $\mathcal{A}$ a skaláry $c_1, c_2, \cdots, c_k \in T$. Je-li $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$, resp. $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 0$, nazýváme bod

$$U = R + c_1(B_1 - R) + c_2(B_2 - R) + \cdots + c_k(B_k - R),$$

resp. vektor

$$\mathbf{u} = c_1(B_1 - R) + c_2(B_2 - R) + \cdots + c_k(B_k - R),$$

lineární kombinací bodů $B_1, B_2, \cdots, B_k$ *s koeficienty* $c_1, c_2, \cdots, c_k$ a značíme jej symbolem

$$c_1B_1 + c_2B_2 + \cdots + c_kB_k.$$ [83]

Poznámka 1.7.2

- Lineární kombinace $c_1B_1 + c_2B_2 + \cdots + c_kB_k$ *má smysl tehdy a jen tehdy*, je-li buď $c_1+c_2+\cdots+c_k = 1$ – v tom případě je jejím výsledkem *bod*, nebo $c_1+c_2+\cdots+c_k = 0$ – v tom případě je rovna vektoru. V případech $c_1 + c_2 + \cdots + c_k \notin \{0, 1\}$ nemá symbol $c_1B_1 + c_2B_2 + \cdots + c_kB_k$ žádný smysl (viz úvodní úvaha!)[84]

- Užijeme-li v následujícím textu symbol $c_1B_1 + c_2B_2 + \cdots + c_kB_k$, budeme vždy implicitně předpokládat, že je definován, tj. součet koeficientů nabývá přípustné hodnoty.

- Přímo z definice lineární kombinace plyne její nezávislost na pořadí bodů – pro každou permutaci π množiny $\{1, \cdots, k\}$ platí:

$$c_1B_1 + c_2B_2 + \cdots + c_kB_k = c_{\pi(1)}B_{\pi(1)} + c_{\pi(2)}B_{\pi(2)} + \cdots + c_{\pi(k)}B_{\pi(k)}.$$

[83] Přirozeně budeme užívat i označení $\sum_{i=1}^{k} c_iB_i$.

[84]
- nemají smysl např. zápisy $B + C$, $\frac{1}{4}B - C$ apod.
- střed S dvojice bodů X, Y je roven $\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$,
- vektor $\mathbf{u} = Y - X$ lze chápat jako lineární kombinaci $1Y - 1X$,
- pro každý $X \in \mathcal{A}$ platí: $0X = \mathbf{o}$, $1X = X$.

- Přímo z definice lineární kombinace dále plyne, že namísto „$+(-c_j)B_j$“ lze bez obav z nedorozumění psát „$-c_jB_j$“.

Věta 1.7.3 *Buď $\mathcal{B}$ libovolná báze afinního prostoru $\mathcal{A}$. Je-li bod $U = [u_1, u_2, \cdots, u_n]_{\mathcal{B}}$, resp. vektor $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \cdots, u_n]_{\mathcal{B}_0}$, lineární kombinací $c_1B_1 + c_2B_2 + \cdots + c_kB_k$, přičemž $B_i = [b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{in}]_{\mathcal{B}}$, pak pro všechna i, $i = 1, \ldots, n$, platí:*

$$u_i = \sum_{j=1}^{k} c_j b_{ji}.$$

Naskýtá se nyní otázka, zda lze nějakým způsobem upravovat výrazy typu $c(bB + eE)$, či v rovnostech dvou lineárních kombinací převádět z jedné strany na druhou a podobně. Odpověď přinášejí věty následující.

Věta 1.7.4 *Buďte $U, V, X, Y \in \mathcal{A}$, $a, b, c, d, e, f \in T$. Je-li splněn některý z následujících předpokladů*

1. $a + b = 1,\ c + d = 1,\ e + f = 1,$
2. $a + b = 1,\ c + d = 1,\ e + f = 0,$
3. $a + b = 0,\ c + d = 0,$

pak platí:

$$e(aX + bY) + f(cU + dV) = (ea)X + (eb)Y + (fc)U + (fd)V.$$

Důkaz: Musíme nejdříve ověřit, zda všechny lineární kombinace v dokazované relaci jsou definovány a zda jsou na obou stranách objekty téhož druhu:

Ad 1: V tomto případě je $aX + bY$ i $cU + dV$ bodem a jelikož $e + f = 1$, je výsledkem levé strany bod. Vzhledem k tomu, že $ea + eb + fc + fd = 1$, představuje levá strana rovněž bod.

Ad 2: Zde je $aX + bY$ i $cU + dV$ bodem a neboť $e + f = 0$, je výsledkem levé strany vektor. V tomto případě je dále $ea + eb + fc + fd = 0$, tudíž i pravá strana je vektorem.

Ad 3: Lineární kombinace $aX + bY$ i $cU + dV$ jsou vektory, a tedy bez ohledu na hodnotu e, f je levá strana vektorem (proč?).Součet koeficientů na pravé straně je nulový, a proto i ona je vektorem.

Ve všech případech jsou tedy na obou stranách objekty téhož druhu a má smysl uvažovat o jejich rovnosti. Postačující podmínkou pro tuto rovnost je rovnost jejich souřadnic v některé (a pak tedy ve všech) bázi. Rovnost souřadnic objektů je však v našem případě triviálním důsledkem věty 1.7.3 (zdůvodněte). □

Poznámka 1.7.5 Induktivně lze zřejmě platnost předešlé věty rozšířit na lineární kombinace libovolného konečného počtu bodů.

Věta 1.7.6 *Buďte* $B_1, B_2, \cdots, B_k \in \mathcal{A}$ *a* $c_1, c_2, \cdots, c_k \in T$ *takové, že*

$$c_1B_1 + c_2B_2 + \cdots + c_kB_k = \mathbf{u}.$$

Pak:

1. *pro každé* $m,\ 1 \le m \le k$*, pro něž* $c_1 + c_2 + \cdots + c_m = 0$*, platí:*
$$c_1B_1 + \cdots + c_mB_m = \mathbf{u} - (c_{m+1}B_{m+1} + \cdots + c_kB_k).$$
2. *pro každé* $m,\ 1 \le m \le k$*, pro něž* $c_1 + c_2 + \cdots + c_m = d \neq 0$*, platí:*
$$\tfrac{c_1}{d}B_1 + \cdots + \tfrac{c_m}{d}B_m = \big((-\tfrac{c_{m+1}}{d})B_{m+1} + \cdots + (-\tfrac{c_k}{d})B_k\big) + \tfrac{1}{d}\mathbf{u}.$$

Důkaz: Stejně jako ve větě předešlé musíme nejdříve ověřit, zda jsou všechny lineární kombinace v dokazované relaci definovány a zda na obou stranách rovnosti jsou objekty téhož druhu:
Protože $c_1B_1 + c_2B_2 + \cdots + c_kB_k = \mathbf{u}$, platí $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 0$.

Ad 1: Vzhledem k předpokladu je na levé straně vektor. Protože $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 0$, je $c_{m+1} + \cdots + c_k = 0$. Na pravé straně je tudíž rozdíl dvou vektorů, což je opět vektor.

Ad 2: Vzhledem k předpokladu je $\frac{c_1}{d} + \cdots + \frac{c_m}{d} = 1$, tedy levá strana rovnosti je bodem. Protože $c_1+c_2+\cdots+c_k = 0$, je $c_{m+1}+\cdots+c_k = -d$, a tudíž $\big(-\frac{c_{m+1}}{d}\big)+\cdots+\big(-\frac{c_k}{d}\big) = 1$, a proto je na pravé straně rovnosti součet bodu a vektoru, což je opět bod.

Rovnost objektů na levé a pravé straně je v obou případech opět triviálním důsledkem věty 1.7.3 a ovšem i věty 1.2.8 (promyslete si). □

Věta 1.7.7 *Buďte* $B_1, B_2, \cdots, B_k \in \mathcal{A}$ *a* $c_1, c_2, \cdots, c_k \in T$ *takové, že*

$$c_1B_1 + c_2B_2 + \cdots + c_kB_k = U.$$

Pak:

1. *pro každé* $m,\ 1 \leq m \leq k$, *pro něž* $c_1 + c_2 + \cdots + c_m = 0$, *platí:*

$$c_1B_1 + \cdots + c_mB_m = U - (c_{m+1}B_{m+1} + \cdots + c_kB_k).$$

2. *pro každé* $m,\ 1 \leq m \leq k$, *pro něž* $c_1 + c_2 + \cdots + c_m = d \neq 0$, *platí:*

$$\tfrac{c_1}{d}B_1 + \cdots + \tfrac{c_m}{d}B_m = \big((-\tfrac{c_{m+1}}{d})B_{m+1} + \cdots + (-\tfrac{c_k}{d})B_k\big) + \tfrac{1}{d}U.$$

Důkaz: je zcela analogický důkazu věty 1.7.6. □

Poznámka 1.7.8 Právě uvedené věty ukázaly, že v případě (a jen tehdy), kdy jsou *všechny* vyskytující se lineární kombinace definovány, lze s nimi pracovat analogicky algebraickým výrazům.

- např. $3X - 2Y + 2U - 2V$ lze psát jako $(3X - 2Y) + 2(U - V)$, ale ne jako $\frac{1}{2}(6X - 4Y) + 2(U - V)$ nebo $(3X + 2U) - 2(Y + V)$,
- je-li $\mathbf{u} = 2U - 2V + 3X - Y - 2Z$, lze psát např: $\mathbf{u} - (2U - 2V) = 3X - Y - 2Z$, nikoli však $\mathbf{u} - 2X = -2V + 3X - Y - 2Z$,
- je-li $U = X - Y + Z$, lze psát např. $\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Z = \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}U$, avšak nelze psát $X + Z = Y + U$.

1.7.2 Geometrické souřadnice bodu a vektoru

Analogicky vektorům definujeme následující pojem:

Definice 1.7.9 Body $B_1, B_2, \cdots, B_k \in \mathcal{A}$ se nazývají *lineárně nezávislé*, jestliže z $c_1B_1 + c_2B_2 + \cdots + c_kB_k = \mathbf{o}$ vyplývá $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. V opačném případě se nazývají *lineárně závislé*.[85]

Příklad 1.7.10 Rozhodněte o lineární závislosti následujících bodů z $\mathcal{A}_3$ nad $\mathbb{R}$ daných v jisté afinní bázi souřadnicemi takto:

$$B_1 = [1, 1, 1],\ B_2 = [1, 2, 2],\ B_3 = [2, 3, 3].$$

[85] Užívá se též pojem *geometricky (ne)závislé*.

Řešení:
Lineární kombinace $c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3$ je rovna nulovému vektoru, právě když je jejím výsledkem vektor a tento vektor má nulové souřadnice, tj. platí-li (viz poznámka 1.7.2 a věta 1.7.3):

(i) $c_1(1,1,1) + c_2(1,2,2) + c_3(2,3,3) = (0,0,0)$

(ii) $c_1 + c_2 + c_3 = 0$

Relace (i) představuje soustavu lineárních homogenních rovnic, jejíž parametrické řešení zní:

$$c_1 = -t \wedge c_2 = -t \wedge c_3 = t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Z této množiny však podmínce (ii) vyhovuje toliko řešení odpovídající $t = 0$, takže $c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 = \mathbf{o}$ jen v případě $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, což znamená, že zkoumané body jsou lineárně *nezávislé*.[86]

Věta 1.7.11 *Body $B_1, B_2, \cdots, B_k \in \mathcal{A}$ jsou lineárně nezávislé, právě když jsou lineárně nezávislé vektory $B_2 - B_1, B_3 - B_1, \cdots, B_k - B_1$.*

Důkaz: Užitím definice 1.7.1 při volbě $R = B_1$ dostáváme:

$$\begin{gathered} c_1B_1 + c_2B_2 + \cdots + c_kB_k = \mathbf{o} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{o} = c_1(B_1 - B_1) + c_2(B_2 - B_1) + \cdots + c_k(B_k - B_1) = \\ = c_2(B_2 - B_1) + \cdots + c_k(B_k - B_1). \end{gathered}$$

Odtud je patrno, že vektory $B_2 - B_1, B_3 - B_1 \cdots, B_k - B_1$ jsou lineárně nezávislé, právě když $c_2 = \cdots = c_k = 0$. Uvážíme-li, že $c_1B_1 + c_2B_2 + \cdots + c_kB_k$ je vektorem, právě když $c_1 = -(c_2 + \cdots + c_k)$, zjišťujeme, že zkoumaná lineární kombinace bodů je rovna nulovému vektoru jen tehdy, je-li $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. □

Poznámka 1.7.12 Vzhledem k poznámce 1.7.2 je očíslování bodů věcí jen formální, a proto lze ve větě 1.7.11 uvažovat např. vektory

$$B_1 - B_2, B_3 - B_2 \cdots, B_k - B_2.$$

Důsledek 1.7.13 *Každá $n+2$-tice bodů n-rozměrného afinního prostoru je lineárně závislá.*

[86] Povšimněme si však skutečnosti, že aritmetické vektory souřadnic těchto bodů jsou lineárně závislé.

Naskýtá se otázka, kolik lineárně nezávislých bodů jednoznačně určuje afinní podprostor dané dimenze a dále, jakou množinu vyplňují body (vektory), které jsou lineárními kombinacemi jistých bodů

Tuto otázku řeší věta následující, která dále ukazuje význam koeficientů této lineární kombinace – tyto, volně řečeno, popisují polohu výsledného bodu vůči bodům tvořícím danou lineární kombinaci, m.j. což umožňuje vypočítat souřadnice výsledného bodu pomocí souřadnic bodů tvořících tuto lineární kombinaci (s ohledem na větu 1.7.3), a to zcela nezávisle na konkrétní volbě báze.[87]

Věta 1.7.14 *Body $B_0, B_1, \cdots, B_k \in \mathcal{A}$ jsou lineárně nezávislé, právě když existuje jediný k-rozměrný podprostor $\mathcal{M}$, který je obsahuje. V tomto případě pro každý $X \in \mathcal{A}$ a každý $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ platí:*

1. $X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \exists x_0, x_1, \cdots, x_k \in T:$

$$X = x_0B_0 + x_1B_2 + \cdots + x_kB_k.$$

Přitom skaláry $x_0, x_1, \cdots, x_k$ jsou bodem X a body $B_0, B_1, \cdots, B_k$ určeny jednoznačně.

2. $\mathbf{x} \in V(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \exists x_0, x_1, \cdots, x_k \in T:$

$$\mathbf{x} = x_0B_0 + x_1B_2 + \cdots + x_kB_k.$$

Přitom skaláry $x_0, x_1, \cdots, x_k$ jsou vektorem $\mathbf{x}$ a body $B_0, B_1, \cdots, B_k$ určeny jednoznačně.

Definice 1.7.15 Body $B_0, B_1, \cdots, B_k$ z věty 1.7.14 se nazývají *geometrická báze afinního podprostoru $\mathcal{M}$.*

Skaláry $x_0, x_1, \cdots, x_k$ z věty 1.7.14 se nazývají *geometrické souřadnice bodu X*, resp. *vektoru* $\mathbf{x}$, *vzhledem ke geometrické bázi* $\langle B_0, B_1, \cdots, B_k\rangle$.[88]

Důkaz věty 1.7.14:

Položme $\mathbf{W} = [(B_1 - B_0), (B_2 - B_0), \cdots, (B_k - B_0)]$. S ohledem na větu 1.7.11 jsou body $B_0, B_1, \cdots, B_k$ lineárně nezávislé, právě když $\dim \mathbf{W} = k$.

Zkonstruujeme-li afinní podprostor $\mathcal{M} = \{B; \mathbf{W}\}$, zřejmě $B_0, B_1, \cdots, B_k \in \mathcal{M}$. Je-li $\mathcal{M}'$ některý k-rozměrný afinní podprostor obsahující body $B_0, B_1, \cdots, B_k$, pak zřejmě $B_j - B_0 \in V(\mathcal{M}')$, $j = 1, \cdots, k$, následkem čehož $\mathbf{W} \subseteq V(\mathcal{M}')$. Rovnost zaměření

[87] Tato skutečnost se v praxi uplatňuje např. při navigaci.

[88] Namísto *geometrické souřadnice* se užívá též pojmu *barycentrické souřadnice*.

$\mathbf{W}$ a $V(\mathcal{M}')$ (a následně rovnost $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$) je tedy ekvivalentní rovnosti dimenzí, tudíž požadavku $\dim \mathbf{W} = k$.

Jediný podprostor požadovaných vlastností existuje tudíž, právě když jsou dané body lineárně nezávislé.

Nyní se zabývejme otázkou incidence bodu a podprostoru $\mathcal{M}$ zkonstruovaného výše. Pro $X \in \mathcal{A}$ můžeme psát:

$$X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow X - B_0 \in \mathbf{W} \overset{(a)}{\Leftrightarrow} X = B_0 + x_1(B_1 - B_0) + \cdots + x_k(B_k - B_0) \Leftrightarrow {}^{89}$$
$$\Leftrightarrow X = B_0 + x_0(B_0 - B_0) + x_1(B_1 - B_0) + \cdots + x_k(B_k - B_0) \wedge x_0 = 1 - (x_1 + \cdots$$
$$\cdots + x_k) \overset{(b)}{\Leftrightarrow} X = x_0B_0 + x_1B_1 + \cdots + x_kB_k$$

kde (a) značí užití definice podprostoru $\mathbf{W}$ a (b) užití definice 1.7.1. Jednoznačnost existence koeficientů $x_1, \cdots, x_k$ je zřejmá (proč?) a x_0 je dán relací $x_0 + x_1 + \cdots + x_k = 1$, tj. $x_0 = 1 - (x_1 + \cdots + x_k)$.

Incidence vektoru a zaměření podprostoru $\mathcal{M}$ by se ukázala analogicky. □

Příklad 1.7.16 Vyjádřete těžiště trojúhelníka jako lineární kombinaci jeho vrcholů (pojem *trojúhelník* chápejme zatím jako trojici nekolineárních bodů).

Řešení:

Uvažujme trojici A, B, C nekolineárních bodů v $\mathcal{A}$. V rovině jimi určené zvolme nyní bázi $\mathcal{B}$ např. takto:

$$\mathcal{B} = \langle A; B - A, C - A \rangle .$$

V této bázi platí:

$$A = [0, 0],\ B = [1, 0],\ C = [0, 1].$$

Těžiště je průsečíkem těžnic, tj. spojnic vrcholu se středem protější strany.

Střed S_1 strany AB má souřadnice $[\frac{1}{2}, 0]$, střed S_2 strany AC souřadnice $[0, \frac{1}{2}]$. Přímky $\overleftrightarrow{CS_1}$ a $\overleftrightarrow{BS_2}$ lze psát:

$$\begin{array}{rlrl} \overleftrightarrow{CS_1}\colon x_1 = & \frac{1}{2}t & \overleftrightarrow{BS_2}\colon x_1 = & 1 - r \\ x_2 = & 1 - t & x_2 = & \frac{1}{2}r \end{array}$$

Snadno zjistíme, že pro jejich průsečík, tj. těžiště T platí:

$$T = [\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}].$$

Nyní hledáme $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$T = aA + bB + cC.$$

Musí tedy platit:

[89] Uvědomte si, že bod X, $X = B_0 + x_1(B_1 - B_0) + \cdots x_k(B_k - B_0)$, nelze psát jako lineární kombinaci $X = x_1B_1 + \cdots x_kB_k$, neboť $x_1, \cdots, x_k$ jsou libovolné a tudíž jejich součet není obecně roven jedné.

Volba $x_0 = 1 - (x_1 + \cdots + x_k)$ není nikterak na újmu obecnosti – je nutnou podmínkou zadání bodu jako lineární kombinace.

(i) $a(0,0) + b(1,0) + c(0,1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

(ii) $a + b + c = 1$

relace (i) představuje soustavu lineárních rovnic, jejíž parametrické řešení zní:

$$a = s \wedge b = \tfrac{1}{3} \wedge c = \tfrac{1}{3},\ s \in \mathbb{R},$$

z nichž podmínce (ii) vyhovuje řešení jediné: $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}$. Pro těžiště T tudíž platí:

$$T = \tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{3}B + \tfrac{1}{3}C.$$

Dodejme, že s ohledem na větu 1.7.3 to znamená:
Jestliže v *libovolné bázi* afinního prostoru $\mathcal{A}$ *libovolné dimenze* n jsou souřadnice vrcholů $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n], B = [b_1, b_2, \cdots, b_n], C = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$, platí pro souřadnice těžiště $T = [t_1, t_2, \cdots, t_n]$:

$$t_i = \tfrac{1}{3}(a_i + b_i + c_i),\ 1 \leq i \leq n.$$

Poznámka 1.7.17 Jsou-li dány body $B_1, B_2, \cdots, B_k \in \mathcal{A}$, nazývá se bod T,

$$T = \tfrac{1}{k}B_1 + \tfrac{1}{k}B_2 + \cdots + \tfrac{1}{k}B_k,$$

těžiště množiny bodů $B_1, B_2, \cdots, B_k$.[90]

Příklad 1.7.18 Buď $\mathcal{M}$ podprostor určen trojicí lineárně nezávislých bodů $B, C, D \in \mathcal{A}$ nad $\mathbb{Q}$, které jsou ve zvolené soustavě souřadnic dány:

$$B = [1, 2, 3], C = [2, 3, 3], D = [3, 2, 3].$$

Dále jsou dány body $X = [-2, 1, 3], Y = [3, 5, 6]$. Rozhodněte o jejich incidenci s prostorem $\mathcal{M}$.
Řešení:
Nejprve bychom ověřili lineární nezávislost uvedených bodů (proveďte). Proto je podprostor $\mathcal{M}$ rovinou.
V souladu s větou 1.7.14 platí, že bod X, resp. Y, náleží $\mathcal{M}$ právě když jej lze psát ve tvaru

$$X = bB + cC + dD,$$

což je ekvivalentní

(i) $b(1,2,3) + c(2,3,3) + d(3,2,3) = (-2,1,3)$

(ii) $b + c + d = 1.$

[90] V případě, kdy bychom $B_1, B_2, \cdots, B_k$ považovali za soustavu hmotných bodů téže hmotnosti, dá se ukázat, že T opravdu splývá s těžištěm (resp. hmotným středem) této soustavy ve smyslu fyzikálním.

Relace (i) představuje soustavu lineárních rovnic, jejíž řešení zní:

$$b = 3 \ \wedge \ c = -1 \ \wedge d = -1,$$

které vyhovuje relaci (ii), a tudíž

$$X = 3B - C - D,$$

takže bod X *náleží* podprostoru $\mathcal{M}$.

Pro bod Y analogicky dospějeme k podmínkám

(i') $b(1,2,3) + c(2,3,3) + d(3,2,3) = (3,5,6)$

(ii') $b + c + d = 1$.

Podmínce (i') odpovídá jediná trojice:

$$b = 1 \ \wedge \ c = 1 \ \wedge d = 0,$$

která nevyhovuje relaci (ii'), tudíž Y nelze psát jako lineární kombinaci bodů B, C, D a *nenáleží* proto podprostoru $\mathcal{M}$.

1.7.3 Simplex

Úmluva 1.7.19 Ve zbývající části této podkapitoly uvažujeme *uspořádané* těleso skalárů.

Ve větě 1.7.14 jsme ukázali, že množina bodů, které jsou lineárními kombinacemi jistých (lineárně nezávislých) bodů, vyplňuje afinní podprostor. Všimněme si nyní případu, kdy nebudeme uvažovat *všechny* lineární kombinace dané množiny bodů, ale pouze ty, jejichž koeficienty jsou kladné (nezáporné).

Definice 1.7.20 Buďte $B_0, B_1, \cdots, B_k$ lineárně nezávislé body v $\mathcal{A}_n$. Pak se množina označovaná $\mathcal{K}(B_0, B_1, \cdots, B_k)$ definovaná vztahem

$$\mathcal{K}(B_0, B_1, \cdots, B_k) = \{X \in \mathcal{A}_n : \ X = x_0B_0 + x_1B_1 + \cdots + x_kB_k \wedge x_i > 0, \ 0 \leq i \leq k\}$$

nazývá *otevřený k-rozměrný simplex o vrcholech* $B_0, B_1, \cdots, B_k$.

Nahradíme-li v definici 1.7.20 ostré nerovnosti neostrými, budeme hovořit o *uzavřeném simplexu*, který budeme značit $\overline{\mathcal{K}}$.[91]

[91] Vynecháme-li požadavek lineární nezávislosti bodů, dostáváme tzv. *konvexní obal množiny bodů*, jehož je simplex zvláštním případem. Konvexním obalem množiny bodů rozumíme nejmenší konvexní množinu obsahující dané body (množina se nazývá *konvexní*, pokud s libovolnou dvojicí svých bodů obsahuje i úsečku jimi určenou). Důležité je, že každý konvexní obal lze chápat jako sjednocení simplexů.
Teorie konvexních množin však není předmětem tohoto textu, proto se touto otázkou nadále zabývat nebudeme. Čtenář ji nalezne např. v [14] či [3].

Úmluva 1.7.21 Užijeme-li pojem simplex v $\mathcal{A}_n$ bez udání rozměru, rozumíme jím n-rozměrný simplex.

Poznámka 1.7.22 Simplex je obsažen v afinním podprostoru určeném jeho vrcholy.

Nyní budeme hledat geometrickou interpretaci pojmu simplex, využijeme k tomu pojmu poloprostoru. Popišme tedy nejdříve poloprostor pomocí lineární kombinace bodů.

Uvažujme v $\mathcal{A}_n$ lineárně nezávislé body $B_0, B_1, \cdots, B_n$. Pak dle věty 1.7.14 určují B_0, $B_1, \cdots, B_{n-1}$ nadrovinu $\mathcal{N}$. Hledejme nyní vyjádření poloprostoru s hraniční nadrovinou $\mathcal{N}$ obsahujícího bod B_n.

Zvolme v $\mathcal{A}_n$ bázi $\mathcal{B} = \langle B_0; B_1 - B_0, \cdots, B_{n-1} - B_0, B_n - B_0\rangle$. Pak je nadrovina $\mathcal{N}$ dána dána v bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnicí $x_n = 0$ (proč?) a pro poloprostor $\mathcal{N}(B_n)$ proto platí (viz důsledek 1.5.26)

$$\mathcal{N}(B_n) = \{X \in \mathcal{A}_n, X = [x_1, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}} : \ x_n > 0\}. \tag{1.63}$$

Každý bod $X \in \mathcal{A}_n$ lze ovšem (dle věty 1.7.14) rovněž (jediným způsobem) psát ve tvaru lineární kombinace bodů $B_0, B_1, \cdots, B_n$. Jaká je souvislost mezi jeho geometrickými souřadnicemi vzhledem k této $n+1$-tici bodů a jeho afinními souřadnicemi v bázi $\mathcal{B}$?
Platí:

$$X = [x_1, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow X = B_0 + x_1(B_1 - B_0) + \cdots + x_n(B_n - B_0).$$

Analogicky jako v důkazu věty 1.7.14 lze bod X dále ekvivalentně psát:

$$X = x_0B_0 + x_1B_1 + \cdots + x_nB_n, \text{ kde } x_0 = 1 - (x_1 + \cdots + x_n).$$

Skaláry $x_1, x_2, \cdots, x_n$ jsou tedy současně afinními souřadnicemi i souřadnicemi geometrickými a v souladu s (1.63) jsou tudíž body poloprostoru $\mathcal{N}(B_n)$ právě tyto lineární kombinace:

$$X = x_0B_0 + x_1B_1 + \cdots + x_nB_n, \quad \text{kde} \quad x_n > 0.$$

Odvozené poznatky formulujeme větou (promyslete si její druhou část):

Věta 1.7.23 *Buďte $B_0, B_1, \cdots, B_{n-1}, B_n$ lineárně nezávislé body z $\mathcal{A}_n$. Pak poloprostor s hraniční nadrovinou určenou body $B_0, B_1, \cdots, B_{n-1}$, který obsahuje bod B_n je roven*

$$\{X \in \mathcal{A}_n,\ X = x_0B_0 + x_1B_1 + \cdots + x_{n-1}B_{n-1} + x_nB_n; x_n > 0\}.$$

Uzavřený poloprostor s touže hraniční nadrovinou obsahující B_n je roven

$$\{X \in \mathcal{A}_n,\ X = x_0B_0 + x_1B_1 + \cdots + x_{n-1}B_{n-1} + x_nB_n; x_n \geq 0\}.$$

Nyní již snadno nalezneme interpretaci pojmu simplex. Dle definice 1.7.20 náleží bod X simplexu $\mathcal{K}(B_0, B_1, \cdots, B_n) \subset \mathcal{A}$, právě když

$$X = x_0B_0 + x_1B_1 + \cdots + x_nB_n \wedge x_0 > 0 \wedge x_1 > 0 \wedge \cdots \wedge x_n > 0.$$

Pro uzavřený simplex $\overline{\mathcal{K}}$ nahradíme ostré nerovnosti neostrými.

S ohledem na větu 1.7.23 tedy platí (proč?):

Věta 1.7.24 *Buďte $B_0, B_1, \cdots, B_n$ lineárně nezávislé body z $\mathcal{A}_n$. Označme symbolem $\mathcal{N}_{(j)}$, $0 \leq j \leq n$, nadrovinu určenou body $\{B_0, B_1, \cdots, B_n\} \setminus \{B_j\}$. Pak platí:*

$$\mathcal{K}(B_0, B_1, \cdots, B_n) = \bigcap_{0 \leq j \leq n} \mathcal{N}_{(j)}(B_j),$$

$$\overline{\mathcal{K}}(B_0, B_1, \cdots, B_n) = \bigcap_{0 \leq j \leq n} \overline{\mathcal{N}_{(j)}(B_j)}.$$

Prozkoumejme, resp. pojmenujme, simplexy v afinních prostorech dimenze $1, 2$ a 3. Uvážíme-li nyní větu 1.5.45, vyplývá z věty 1.7.24 bezprostředně:[92]

Věta 1.7.25 *(Uzavřený) simplex na přímce je (uzavřená) úsečka.*

Lineární nezávislost trojice bodů je ekvivalentní tomu, že nejsou kolineární; lineární nezávislost čtveřice bodů pak tomu, že nejsou komplanární (viz např. věta 1.7.14). S ohledem na větu 1.7.24 je následující definice přirozená:[93]

Definice 1.7.26 Uzavřený simplex v $\mathcal{A}_2$ se nazývá *trojúhelník*, uzavřený simplex v $\mathcal{A}_3$ se nazývá *čtyřstěn*.

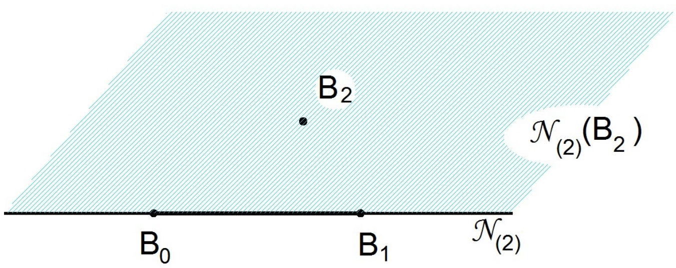
Příklad 1.7.27 V prostoru $\mathcal{A}_3$ nad $\mathbb{R}$ je dána trojice bodů B_1, B_2, B_3 a bod X souřadnicemi v jisté afinní bázi takto:

$$B_1 = [1, 1, 1],\ B_2 = [1, 2, 2],\ B_3 = [2, 3, 3],$$

1. $X = [-1, -2, -2]$,
2. $X = [4, 6, 6]$,

[92] Kdy jsou dva body lineárně nezávislé?

[93] Jsou-li body B_0, B_1, B_2 trojicí lineárně nezávislých bodů, lze např. polorovinu $\mathcal{N}_{(2)}(B_2)$ znázornit takto:



3. $X = [\frac{4}{3}, 2, 2]$.

Rozhodněte, zda bod X náleží trojúhelníku o vrcholech B_1, B_2, B_3.
Řešení:
Jak jsme ukázali v příkladě 1.7.10, tvoří body B_1, B_2, B_3 lineárně nezávislou trojici a určují tedy opravdu trojúhelník (proč není na závadu, že jde o body z $\mathcal{A}_3$?).
Bod X bude náležet trojúhelníku (tedy uzavřenému simplexu) o vrcholech B_1, B_2, B_3, právě když bude jejich lineární kombinací s nezápornými koeficienty.

Případ 1:
Řešíme rovnici o neznámých $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$:

$$[-1, -2, -2] = b_1[1, 1, 1] + b_2[1, 2, 2] + b_3[2, 3, 3],$$

tj.

(i) $(-1, -2, -2) = b_1(1, 1, 1) + b_2(1, 2, 2) + b_3(2, 3, 3)$

(ii) $b_1 + b_2 + b_3 = 1$.

Podmínkám (i) a (ii) vyhovuje jediná trojice:

$$b_1 = 2,\ b_2 = 1,\ b_3 = -2,$$

což značí, že

$$X = 2B_1 + B_2 - 2B_3,$$

a tedy bod X sice leží v rovině určené trojicí B_1, B_2, B_3 (srv. věta 1.7.14), avšak protože $b_3 < 0$, nenáleží danému trojúhleníku.

Případ 3:
Řešíme rovnici o neznámých $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ analogicky jako výše:

$$[4, 6, 6] = b_1[1, 1, 1] + b_2[1, 2, 2] + b_3[2, 3, 3].$$

V tomto případě však odtud plynoucí soustavě rovnic nevyhovuje žádná trojice reálných čísel – bod tentokrát ani neleží v rovině obsahující dané body.

Případ 4:
Řešením rovnice

$$[\tfrac{4}{3}, 2, 2] = b_1[1, 1, 1] + b_2[1, 2, 2] + b_3[2, 3, 3],$$

nalezneme

$$b_1 = \tfrac{1}{3},\ b_2 = \tfrac{1}{3},\ b_3 = \tfrac{1}{3},$$

a jelikož se jedná trojici nezáporných skalárů, je X bodem daného trojúhelníka (mj. je jeho těžištěm).

Poznámka 1.7.28 Mějme dány v rovině čtyři nekolineární body B_0, B_1, B_2, B_3 určující dva neprotínající se trojúhelníky s dvojicí společných vrcholů. Dá se ukázat, že jejich sjednocením je množina

$$\{X \in \mathcal{A}_2 :\ X = x_0B_0 + x_1B_1 + x_2B_2 + x_3B_3;\ x_j \geq 0,\ 0 \leq j \leq 3\}$$

představující konvexní obal této čtveřice.

Obecně lze ukázat, že máme-li v $\mathcal{A}_2$ dány body $B_0, B_1, \cdots, B_k$, pak

$$\{X \in \mathcal{A}_2 :\ X = x_0B_0 + x_1B_1 + \cdots + x_kB_k;\ x_j \geq 0,\ 0 \leq j \leq k\}$$

představuje konvexní obal dané množiny bodů – tzv. *konvexní mnohoúhelník*. Jeho *vrcholy* nazýváme ty z bodů $B_0, B_1, \cdots, B_k$, které nenáleží konvexnímu obalu bodů zbývajících.

Podobně se v případě obecné dimenze dá ukázat, že jsou-li dány v $\mathcal{A}_n$ body $B_0, B_1, \cdots$ $\cdots, B_k$, představuje množina

$$\{X \in \mathcal{A}_n :\ X = x_0B_0 + x_1B_1 + \cdots + x_kB_k;\ x_j \geq 0,\ 0 \leq j \leq k\}$$

konvexní obal dané množiny bodů – tzv. *konvexní mnohostěn*, jehož vrcholy rozumíme ty z bodů $B_0, B_1, \cdots, B_k$, které nenáleží konvexnímu obalu ostatních.

1.8 Afinní zobrazení

V závěrečné části kapitoly 1 Afinní geometrie si všimneme jistých zobrazení mezi afinními prostory a speciálně pak těch, která jsou bijekcí afinního prostoru na sebe (*afinity*) a tvoří (vzhledem ke skládání) grupu. Podrobnému studiu a klasifikaci je věnována přednáška ve vyšších semestrech, v této podkapitole se omezíme jen na základní vlastnosti uvedených zobrazení.[94]

Definice 1.8.1 Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ afinní prostory nad týmže tělesem. Zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ se nazývá *afinní zobrazení*, jestliže pro libovolnou trojici různých kolineárních bodů $B, C, D \in \mathcal{A}$ platí:[95]

$$(B, C, D) = (f(B), f(C), f(D))\ \vee\ f(B) = f(C) = f(D).$$

[94]Ve druhé polovině 19. století formuloval německý matematik Felix Klein zásadu, dle níž je studium dané geometrie (afinní, euklidovské, projektivní či dalších geometrií) studiem právě těch vlastností podmnožin bodů daného prostoru, které se nemění při aplikaci zobrazení z jisté přidružené grupy transformací tohoto prostoru na sebe - tzv. *invariantů* dané *grupy zobrazení*. Právě tyto vlastnosti se v dané geometrii označují za *geometrické*. Tehdy tak vytvořil princip pro rozvoj jiných geometrií, než byla do té doby dominantní euklidovská geometrie. Tento přístup vešel do dějin matematiky jako tzv. *Erlangenský program*.

Konkrétně v kapitole 3 se při studiu kuželoseček a kvadrik seznámíme s jejich *geometrickými vlastnostmi*, tj. *invarianty* vzhledem ke grupě afinit a shodností.

[95]Ekvivalentně: Pro libovolnou trojici $B, C, D \in \mathcal{A}$ platí:

$$(\exists k \in T :\ D - B = k(D - C)) \Rightarrow (f(D) - f(B) = k(f(D) - f(C))).$$

Úmluva 1.8.2 O jakékoli dvojici afinních prostorů v této podkapitole budeme předpokládat, že mají totéž těleso skalárů.

Poznámka 1.8.3 Čtenáři jsou již známy některé příklady afinního zobrazení: např. volné rovnoběžné promítání (lze je chápat jako afinní zobrazení třírozměrného prostoru do roviny), osová afinita roviny (afinní zobrazení roviny na sebe), středová souměrnost roviny či třírozměrného prostoru (opět afinní zobrazení roviny, resp. třírozměrného prostoru na sebe) a podobně.

Povšimněme si zobrazení, které každé afinní zobrazení $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ indukuje mezi zaměřeními prostorů $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$.

Je-li $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afinní zobrazení, pak se nabízí definovat zobrazení $\varphi : V(\mathcal{A}) \to V(\mathcal{A}')$ pro každý $\mathbf{u} \in V(\mathcal{A})$ takto:

$$\mathbf{u} = C - B \Rightarrow \varphi(\mathbf{u}) = f(C) - f(B). \tag{1.64}$$

Tato definice však formálně závisí na výběru umístění vektoru $\mathbf{u}$. Buďte X, Y libovolné body z $\mathcal{A}$, pro něž rovněž $\mathbf{u} = Y - X$, a porovnejme vektory $f(C) - f(B)$ a $f(Y) - f(X)$.

Z rovnosti $C - B = Y - X$ plyne dle věty 1.6.3:

$$(B, Y) = (C, X). \tag{1.65}$$

Z podkapitoly 1.6 (konkrétně relace (1.59)) víme, že označíme-li S společný střed, znamená (1.65), že

$$(B, Y, S) = -1 = (C, X, S),$$

což dle definice 1.8.1 implikuje

$$(f(B), f(Y), f(S)) = -1 = (f(C), f(X), f(S)),$$

tedy

$$(f(B), f(Y)) = f(S) = (f(C), f(X)).$$

Zjistili jsme, že pro všechna umístění daného vektoru $\mathbf{u}$ je předpisem (1.64) definován *týž vektor*. Zobrazení φ je tedy zobrazením f určeno korektně.

Vyšetřeme nyní, zda φ je homomorfizmem $V(\mathcal{A}) \to V(\mathcal{A}')$.

- Buďte $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V(\mathcal{A})$. Jejich umístění zvolme takto:

  $$\mathbf{u} = C - B,\ \mathbf{v} = D - C.$$

  Pak $\mathbf{u} + \mathbf{v} = D - B$ a pro $\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ dostáváme:

  $$\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(D - B) = f(D) - f(B) = (f(D) - f(C)) + (f(C) - f(B)) = \\ \varphi(D - C) + \varphi(C - B) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}).$$

(požadavek různosti a kolinearity by tu byl zbytečný – proč?).

- Buď $\mathbf{u} \in V(\mathcal{A})$, $t \in T$. Zvolíme-li umístění vektorů $\mathbf{u}$ a $t\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = C - B, \quad t\mathbf{u} = D - B,$$

platí, že

$$B - D = t(B - C),$$

a dle definice 1.8.1 proto

$$f(B) - f(D) = t(f(B) - f(C)).$$

Obraz $\varphi(t\mathbf{u})$ můžeme tedy psát:

$$\varphi(t\mathbf{u}) = \varphi(D - B) = f(D) - f(B) = t(f(C) - f(B)) = t\,\varphi(C - B) = t\,\varphi(\mathbf{u}).$$

Souhrnně řečeno, ukázali jsme, že každé afinní zobrazení f $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}'$ indukuje homomorfizmus φ $V(\mathcal{A})$ do $V(\mathcal{A}')$.

Nyní se zabývejme otázkou, jak pomocí homomorfizmu φ $V(\mathcal{A})$ do $V(\mathcal{A}')$ zkonstruovat afinní zobrazení f $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}'$.
Pro definici zobrazení f použijeme přirozeně relaci ekvivalentní s (1.64)[96], a to takto:

Buďte $B \in \mathcal{A}$, $B' \in \mathcal{A}'$ libovolné body. Pro každý $X \in \mathcal{A}$ definujeme $f(X)$ vztahem[97]

$$f(X) = B' + \varphi(X - B). \tag{1.66}$$

Ukažme, že f je afinním zobrazením $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$.
Zvolme libovolnou trojici bodů $U, Y, Z \in \mathcal{A}$ tak, že

$$Z - Y = k(Z - U). \tag{1.67}$$

Pro obrazy bodů U, Y, Z s ohledem na (1.66) můžeme psát:

$$f(Z) - f(Y) = (B' + \varphi(Z - B)) - (B' + \varphi(Y - B)) = \varphi(Z - B) - \varphi(Y - B) \overset{(*)}{=} \\ = \varphi((Z - B) - (Y - B)) = \varphi(Z - Y),$$

přičemž v rovnosti (*) jsme užili faktu, že φ je homomorfizmus.
Podobně obdržíme

$$f(Z) - f(U) = \varphi(Z - U).$$

Zobrazení φ je homomorfizmem, a proto (1.67) implikuje

$$\varphi(Z - Y) = k\varphi(Z - U),$$

a tudíž

$$f(Z) - f(Y) = k(f(U) - f(Z)),$$

[96] Tudíž homomorfizmus indukovaný zobrazením f bude opět φ.
[97] Protože φ je homomorfizmus, platí: $B' = f(B)$ (proč?).

neboli f je afinním zobrazením $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}'$.

Zjištěná fakta formuluje následující věta (unicita je zřejmá – promyslete si):

Věta 1.8.4 *Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ afinní prostory. Pak platí:*

1. *Ke každému afinnímu zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ existuje právě jeden homomorfizmus $\varphi : V(\mathcal{A}) \to V(\mathcal{A}')$ tak, že platí:*

$$\forall \mathbf{u} \in V(\mathcal{A})\ \forall X \in \mathcal{A} :\ \varphi(\mathbf{u}) = f(X + \mathbf{u}) - f(X),$$

2. *Ke každému homomorfizmu $\varphi : V(\mathcal{A}) \to V(\mathcal{A}')$ a ke každé dvojici bodů $B \in \mathcal{A}$, $B' \in \mathcal{A}'$ existuje právě jedno afinní zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ tak, že platí:*

$$\forall X \in \mathcal{A} :\ f(X) = B' + \varphi(X - B),$$

v tom případě $B' = f(B)$.

Poznámka 1.8.5 Formule v odstavci (1) i (2) věty 1.8.4 jsou ekvivalentní, různá použitá formulace je dána důvody metodickými.

Definice 1.8.6 Buď f afinní zobrazení $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}'$. Homomorfizmus φ $V(\mathcal{A})$ do $V(\mathcal{A}')$ dle předchozí věty se nazývá *homomorfizmus asociovaný k afinnímu zobrazení f*.

Položme si nyní otázku, zda bude existovat souvislost mezi injektivitou, surjektivitou a bijektivitou afinního zobrazení a jemu asociovaného homomorfizmu.

Uvažujme afinní zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ a jemu asociovaný homomorfizmus $\varphi : V(\mathcal{A}) \to V(\mathcal{A}')$.

(i) Injektivita zobrazení f, φ

Zobrazení f je injektivní, právě když

$$\forall X, Y \in \mathcal{A} :\ f(X) = f(Y) \Rightarrow X = Y. \tag{1.68}$$

Uvážíme-li, že $f(X) = f(Y)$ je ekvivalentní $\varphi(Y - X) = \mathbf{o}$ (proč?), a dále $X = Y$ s $Y - X = \mathbf{o}$, zjišťujeme, že (1.68) nastane, právě když

$$\forall X, Y \in \mathcal{A} :\ (Y - X) \in \mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow (Y - X) = \mathbf{o},$$

neboli

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{o}\},$$

což je nutná a postačující podmínka injektivity φ.

(ii) Surjektivita zobrazení f, φ.
Zobrazení f je surjektivní, právě když:

$$\forall Y \in \mathcal{A}' \, \exists X \in \mathcal{A} : \; Y = f(X).$$

Zobrazení φ je surjektivní, právě když když:

$$\forall \mathbf{y} \in V(\mathcal{A}') \, \exists \mathbf{x} \in V(\mathcal{A}) : \; \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}).$$

Zvolme libovolně $K \in \mathcal{A}$ a označme $\mathcal{A}' \ni L = f(K)$.

- Uvažujme libovolný $\mathbf{y} \in V(\mathcal{A}')$. Pak $Y = L + \mathbf{y}$ náleží $\mathcal{A}'$. Je-li f surjekce, existuje $X \in \mathcal{A}$ tak, že $Y = f(X)$, a pak pro vektor $\mathbf{x} \in V(\mathcal{A})$, $\mathbf{x} = X - K$ platí (užitím (1.64)):

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(X - K) = f(X) - f(K) = Y - L = \mathbf{y},$$

  tudíž ze surjektivity f vyplývá surjektivita φ.
- Uvažujme libovolný $Y \in \mathcal{A}'$. Pak $\mathbf{y} = Y - L$ náleží $V(\mathcal{A}')$. Je-li φ surjekce, existuje $\mathbf{x} \in V(\mathcal{A})$ tak, že $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$, a pak pro bod $X \in \mathcal{A}$, $X = K + \mathbf{x}$ platí:

$$f(X) = f(K + \mathbf{x}) = f(K) + \varphi(\mathbf{x}) = L + \mathbf{y} = Y,$$

  a tedy ze surjektivity φ vyplývá surjektivita f.

Tvrzení 1.8.7 je tedy platné (proč platí i bod 3?).

Věta 1.8.7 *Buď $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afinní zobrazení, $\varphi : V(\mathcal{A}) \to V(\mathcal{A}')$ příslušný asociovaný homomorfizmus. Pak platí:*

1. *zobrazení f je injektivní, právě když je injektivní homomorfizmus φ,*
2. *zobrazení f je surjektivní, právě když je surjektivní homomorfizmus φ,*
3. *zobrazení f je bijektivní, právě když je bijektivní homomorfizmus φ.*

Protože afinní zobrazení zachová dle definice 1.8.1 dělicí poměr tří kolineárních bodů, zobrazí se střed libovolné dvojice bodů na střed dvojice jejich obrazů, neboli platí:

$$X = \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C \Rightarrow f(X) = \tfrac{1}{2}f(B) + \tfrac{1}{2}f(C).$$

Zachovává však afinní zobrazení *libovolnou* lineární kombinaci? Uvažujme libovolné body $B_1 B_2, \cdots B_k \in \mathcal{A}$ a nechť

$$X = x_1 B_1 + x_2 B_2 + \cdots + x_k B_k,$$

což je však ekvivalentní (viz definice 1.7.1) výroku ($R \in \mathcal{A}$ je libovolný)

$$X = R + \underline{x_1(B_1 - R) + x_2(B_2 - R) + \cdots + x_k(B_k - R)}.$$

Podtržený výraz je vektorem z $V(\mathcal{A})$, a pro $f(X)$ proto platí:

$$\begin{gathered} f(X) = f(R + x_1(B_1 - R) + x_2(B_2 - R) + \cdots + x_k(B_k - R)) \overset{(a)}{=} \\ = f(R) + \varphi(x_1(B_1 - R) + x_2(B_2 - R) + \cdots + x_k(B_k - R)) \overset{(b)}{=} \\ = f(R) + x_1\varphi(B_1 - R) + x_2\varphi(B_2 - R) + \cdots + x_k\varphi(B_k - R) \overset{(c)}{=} \\ = f(R) + x_1(f(B_1) - f(R)) + x_2(f(B_2) - f(R)) + \cdots + x_k(f(B_k) - f(R)) \overset{(d)}{=} \\ = x_1 f(B_1) + x_2 f(B_2) + \cdots + x_k f(B_k), \end{gathered}$$

kde rovnost (a) vyplývá z definice φ, rovnost (b) z vlastností homomorfizmu, rovnost (c) opět z definice φ a rovnost (d) z definice lineární kombinace bodů.
Platí tudíž následující věta:

Věta 1.8.8 *Buď f afinní zobrazení z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}'$. Jsou-li $B_1 B_2, \cdots B_k$ a X body z $\mathcal{A}$ takové, že*

$$X = x_1 B_1 + x_2 B_2 + \cdots + x_k B_k,$$

pak pro obraz bodu X platí:

$$f(X) = x_1 f(B_1) + x_2 f(B_2) + \cdots + x_k f(B_k).$$

Nyní se zabývejme otázkou *určenosti afinního zobrazení*. Předešlá věta 1.8.8 nás inspiruje k následující úvaze:

Je-li dána geometrická báze $\langle B_0, B_1, \cdots B_n \rangle$ prostoru $\mathcal{A}_n$, lze každý bod $X \in \mathcal{A}$ jednoznačně psát ve tvaru $X = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i B_i$.

Zvolíme-li libovolně body $Q_0, Q_1, \cdots Q_n \in \mathcal{A}'_m$, můžeme v $\mathcal{A}'$ zkonstruovat bod $Y = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i Q_i$ a lze tudíž definovat zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ předpisem:

$$\forall X \in \mathcal{A},\ X = \sum_{i=0}^{n} x_i B_i : \ Y = \sum_{i=0}^{n} x_i Q_i. \tag{1.69}$$

Vyšetřeme, zda je zobrazení afinní.
Buďte $B, C, D \in \mathcal{A}$ libovolné body, pro něž

$$(D - B) = k(D - C). \tag{1.70}$$

Současně nechť platí:

$$B = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i, \quad C = \sum_{i=0}^{n} c_i B_i, \quad D = \sum_{i=0}^{n} d_i B_i. \tag{1.71}$$

Užitím věty 1.7.4 a „komutativity“ lineární kombinace (poznámka 1.7.2), lze vztah (1.70) po dosazení z (1.71) psát:

$$\sum_{i=0}^{n}(d_i - b_i)B_i = \sum_{i=0}^{n} k(d_i - c_i)B_i,$$

odkud vzhledem k jednoznačnosti koeficientů lineární kombinace lineárně nezávislých bodů (srv. věta 1.7.14) vyplývá:

$$(d_i - b_i) = k(d_i - c_i),\ i = 0, \cdots, n. \tag{1.72}$$

Pro obrazy bodů B, C, D určené dle (1.69) dostáváme (opět užitím pravidel pro počítání s lineárními kombinacemi):

$$f(D) - f(B) = \sum_{i=0}^{n}(d_i - b_i)Q_i,$$
$$f(D) - f(C) = \sum_{i=0}^{n}(d_i - c_i)Q_i,$$

a tedy s ohledem na (1.72) lze psát:

$$f(D) - f(B) = \sum_{i=0}^{n}(d_i - b_i)Q_i = k\sum_{i=0}^{n}(d_i - c_i)Q_i = k(f(D) - f(C)),$$

což ovšem vzhledem k předpokladu (1.70) znamená, že f je afinní zobrazení $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}'$.

Zabývejme se nyní jednoznačností existence afinního zobrazení převádějícího $B_i \mapsto Q_i$, $0 \leq i \leq n$:
Buď g takové afinní zobrazení. Zvolme libovolně $X \in \mathcal{A}$, $X = \sum_{i=0}^{n} x_i B_i$. Pak v souladu s větou 1.8.8 a definicí zobrazení f platí:

$$g(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i g(B_i) = \sum_{i=0}^{n} x_i Q_i = f(X).$$

Odvodili jsme tak platnost tzv. *věty o určenosti afinního zobrazení*:[98]

Věta 1.8.9 *Buďte $B_0, B_1, \cdots B_n$ libovolné lineárně nezávislé body prostoru $\mathcal{A}_n$, $Q_0, Q_1, \cdots Q_n$ libovolné body prostoru $\mathcal{A}'_m$. Pak existuje právě jedno afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ s vlastností*

$$f(B_i) = Q_i,\ 0 \leq i \leq n.$$

Bude užitečné nalézt předpis, který umožní vypočíst souřadnice obrazu pomocí souřadnic vzoru.

[98] Povšimněte si, že na body $Q_0, Q_1, \cdots Q_n \in \mathcal{A}'_m$ není kladen žádný požadavek ať již co do jejich počtu ve vztahu k $\dim \mathcal{A}'_m$, či lineární nezávislosti.

Nechť je dáno afinní zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$. V souladu s větou 1.8.9 je zobrazení f určeno zadáním obrazů nějaké geometrické báze prostoru $\mathcal{A}$.

Je-li $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ libovolná afinní báze prostoru $\mathcal{A}_n$, je touto $n+1$-ticí např. následující soustava bodů (lineární nezávislost plyne z věty 1.7.11):

$$\mathcal{G} = \langle P, P + \mathbf{e}_1, P + \mathbf{e}_2, \cdots, P + \mathbf{e}_n \rangle .$$

Pro obrazy bodů $P + \mathbf{e}_1, P + \mathbf{e}_2, \cdots, P + \mathbf{e}_n$ platí:

$$f(P + \mathbf{e}_i) = f(P) + \varphi(\mathbf{e}_i), \; 1 \le i \le n,$$

takže zobrazení f je jednoznačně určeno též zadáním obrazu $f(P)$ a obrazů $\varphi(\mathbf{e}_1)$, $\varphi(\mathbf{e}_2)$, $\cdots$, $\varphi(\mathbf{e}_n)$.[99] Zvolme v prostoru $\mathcal{A}'_m$ afinní bázi $\mathcal{C} = \langle Q; \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \cdots, \mathbf{d}_m \rangle$ a nechť platí:

$$\left.\begin{aligned} f(P) &= [a_1, a_2, \cdots, a_m]_{\mathcal{C}} \\ \varphi(\mathbf{e}_i) &= (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im})_{\mathcal{C}_0}, \; 1 \le i \le n \end{aligned}\right\} \tag{1.73}$$

Uvažujme nyní libovolný bod $X \in \mathcal{A}_n$:

$$X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}. \tag{1.74}$$

Pro obraz $f(X)$ s ohledem na (1.73), (1.74) dostáváme:

$$f(X) = f\left(P + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\right) = f(P) + \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\right) = f(P) + \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(\mathbf{e}_i) =$$

$$= \left(Q + \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{d}_j\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \mathbf{d}_j\right) = Q + \left(\sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{d}_j + \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}\right) \mathbf{d}_j\right) =$$

$$= Q + \sum_{j=1}^{m} \left(a_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i\right) \mathbf{d}_j,$$

což znamená, že

$$f(X) = [y_1, y_2, \cdots, y_m]_{\mathcal{C}},$$

kde

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + a_j, \quad 1 \le j \le m. \tag{1.75}$$

Platí tudíž věta následující:

Věta 1.8.10 *Buď f afinní zobrazení $\mathcal{A}_n$ do $\mathcal{A}'_m$. Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$, $\mathcal{C} = \langle Q; \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \cdots, \mathbf{d}_m \rangle$, jsou libovolné afinní báze po řadě prostorů $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{A}'_m$ a nechť*

$$\begin{aligned} f(P) &= [a_1, a_2, \cdots, a_m]_{\mathcal{C}} \\ \varphi(\mathbf{e}_i) &= (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im})_{\mathcal{C}_0}, \; 1 \le i \le n \end{aligned}$$

Pak pro každý bod $X \in \mathcal{A}_n$, $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}$, platí: $f(X) = [y_1, y_2, \cdots, y_m]_{\mathcal{C}}$, právě když $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m$ vyhovují relacím (1.75).

[99] Tento závěr plyne též z věty 1.8.4,(odstavec 2) a z věty o určenosti homomorfizmu známé z lineární algebry.

O soustavě rovností (1.75) často hovoříme jako o *analytickém vyjádření afinního zobrazení f vzhledem k bázím $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.*

Čtenáři je jistě znám pojem *matice homomorfizmu.* Označme $\mathbf{A}_0$ matici homomorfizmu φ vzhledem k bázím $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$.[100]
Pak zřejmě lze relaci (1.75) psát maticově (prověřte!):

$$(y_1, \cdots, y_m) = (x_1, \cdots, x_n)\mathbf{A}_0 + (a_1, \cdots, a_m).$$

Zaveďme nyní *matici afinního zobrazení f vzhledem k bázím $\mathcal{B}$* a $\mathcal{C}$.

Definice 1.8.11 Buď f afinní zobrazení $\mathcal{A}_n$ do $\mathcal{A}'_m$. Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$, $\mathcal{C} = \langle Q; \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \cdots, \mathbf{d}_m \rangle$, jsou libovolné afinní báze po řadě prostorů $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{A}'_m$ a nechť

$$f(P) = [a_1, a_2, \cdots, a_m]_{\mathcal{C}}$$
$$\varphi(\mathbf{e}_i) = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im})_{\mathcal{C}_0},\ 1 \le i \le n$$

Pak matici $\mathbf{A}$ typu $(n+1) \times (m+1)$ definovanou takto:

1. na pozici (i, j) pro $1 \le i \le n$,$1 \le j \le m$ je prvek a_{ij},
2. na pozici $(n+1, j)$ pro $1 \le j \le m$ je prvek a_j,
3. na pozici $(n+1, m+1)$ je 1,
4. na pozici $(i, m+1)$ pro $1 \le i \le n$ je 0,

nazýváme *matice afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ vzhledem k afinním bázím $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.*

Poznámka 1.8.12 Matice $\mathbf{A}$ má zřejmě následující tvar:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \mathbf{A}_0 & & \vdots \\ & & & 0 \\ a_1 & \cdots & a_m & 1 \end{pmatrix} \\ \text{kde } \mathbf{A}_0 &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{1.76}$$

Analytické vyjádření (1.75) afinního zobrazení f lze maticově psát následujícím způsobem (rozepište si!):

$$(y_1, \cdots, y_m, 1) = (x_1, \cdots, x_n, 1)\mathbf{A}. \tag{1.77}$$

[100]Jde o matici $\mathbf{A}_0 = (a_{ij})_{nm}$, kde $(a_{i1}, a_{i2} \cdots, a_{im})_{\mathcal{C}_0} = \varphi(\mathbf{e}_i)$, $1 \le i \le n$.

Je-li dáno afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ a afinní báze $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ po řadě prostorů $\mathcal{A}_n, \mathcal{A}'_m$, plyne bezprostředně z definice 1.8.11, že jelikož f má evidentně přiřazenu jedinou matici $\mathbf{A}_0$ typu $n \times m$ a jediný vektor $(a_1, \cdots, a_m) \in T^m$ – má tedy i jedinou matici $\mathbf{A}$ tvaru dle uvedené definice, resp. poznámky 1.8.12.

Obráceně – zvolme dvojici bází $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ po řadě prostorů $\mathcal{A}_n, \mathcal{A}'_m$ a libovolnou matici $\mathbf{A}$ typu $(n+1) \times (m+1)$ tvaru dle definice 1.8.12 tj.

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \mathbf{A}_0 & & \vdots \\ & & & 0 \\ a_1 & \cdots & a_m & 1 \end{array} \right),$$

kde $\mathbf{A}_0$ je libovolná matice typu $n \times m$ nad T a $(a_1, \cdots, a_m)$ libovolný vektor z T^m. Označíme-li $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$, můžeme tak jednoznačně nalézt obrazy bodu $f(P)$ a vektorů $\varphi(\mathbf{e}_i)$, $1 \le i \le n$, relacemi:

$$\left. \begin{array}{r} f(P) = [a_1, \cdots, a_m] \\ \varphi(\mathbf{e}_i) = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im})_{\mathcal{C}_0}, \ 1 \le i \le n \end{array} \right\} \tag{1.78}$$

Tím však máme také jednoznačně určeny obrazy bodu $f(P)$ a bodů $f(P + \mathbf{e}_i) = f(P) + \varphi(\mathbf{e}_i)$, $1 \le i \le n$, čímž je v souladu s větou 1.8.9[101] jednoznačně určeno afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$, přičemž vzhledem k (1.78) je $\mathbf{A}$ matice tohoto zobrazení vzhledem k bázím $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

Následující tvrzení je proto platné:

Věta 1.8.13 *Buďte $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ afinní báze po řadě prostorů $\mathcal{A}_n, \mathcal{A}'_m$. Pak zobrazení přiřazující každému afinnímu zobrazení jeho matici vzhledem k daným bázím je bijekcí množiny všech afinních zobrazení $\mathcal{A}_n \to \mathcal{A}'_m$ na množinu všech matic $(n+1) \times (m+1)$ nad T tvaru (1.76).*

V závěru se věnujme afinním zobrazením speciálním:[102]

Definice 1.8.14 Bijektivní afinní zobrazení afinního prostoru na sebe se nazývá *afinita daného afinního prostoru.*

Nalezněme nyní kriterium pro to, aby afinní zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dané v bázi $\mathcal{B}$ maticí $\mathbf{A}$ bylo *afinitou*.

Z věty 1.8.7 vyplývá, že to bude tehdy a jen tehdy, bude-li asociované zobrazení φ automorfizmem zaměření $\mathbf{V}$, což je ekvivalentní tomu, že v některé (a pak ve všech) bázi $\mathcal{B}$ bude

[101] Lineární nezávislost bodů $P, P + \mathbf{e}_1, P + \mathbf{e}_2, \cdots, P + \mathbf{e}_n$ byla zdůvodněna výše.

[102] Čtenáři ze syntetické geometrie známá afinita osová je zřejmě příkladem afinity ve smyslu této definice.

matice $\mathbf{A}_0$ regulární maticí (proč?). Z (1.76) však plyne, že $\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}_0$, tj. matice $\mathbf{A}_0$ je regulární, právě když je regulární matice $\mathbf{A}$.

Věta 1.8.15 *Afinní zobrazení $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je afinita prostoru $\mathcal{A}$, právě když jeho matice v některé (a pak tedy každé) bázi prostoru $\mathcal{A}$ je regulární.*

Z věty 1.8.15 plyne, že *identita na $\mathcal{A}$ je afinitou.*

Z tvaru (1.77) analytického vyjádření afinního zobrazení (a věty 1.8.13) vyplývá, že *maticí složení dvou afinit je součin jejich matic v témže pořadí* (zdůvodněte!), z věty 1.8.15 (a opětovně věty 1.8.13) tak dostáváme, že *složení dvou afinit je opět afinita*, jakož i to, že *inverzní zobrazení k afinitě je opět afinitou.*

Shrňme uvedené poznatky do věty:[103]

Věta 1.8.16 *Množina afinit libovolného afinního prostoru tvoří spolu se skládáním zobrazení grupu.*

Příklad 1.8.17 V rovině $\mathcal{A}_2$ nad $\mathbb{R}$ je ve zvolené soustavě souřadnic dáno:

$$B_0 = [1, 0],\ B_1 = [2, 1],\ B_2 = [1, 1],$$
$$Q_0 = [1, 1],\ Q_1 = [4, 3],\ Q_2 = [2, 2].$$

Nalezněte analytické vyjádření afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$ zobrazující B_i na Q_i pro $i = 0, 1, 2$.
Rozhodněte, zda je uvedené zobrazení afinitou.
Řešení:
Dá se ukázat (proveďte), že body B_0, B_1, B_2 jsou lineárně nezávislé a tudíž dle věty 1.8.9 existuje jediné afinní zobrazení požadované vlastnosti.
Analytické vyjádření zobrazení f zní (viz (1.75)):

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_1 \\ y_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_2, \end{aligned}$$

kde x_1, x_2 jsou souřadnice vzoru a y_1, y_2 souřadnice obrazu.
Naším úkolem je nalézt koeficienty $a_{11}, \cdots, a_{22}, a_1, a_2$.
Další postup je nasnadě – postupně dosadíme souřadnice dvojic vzor – obraz a obdržíme pro

[103] Předložené zdůvodnění je čistě algebraické, tyto skutečnosti se dají „geometricky“ vyvodit přímo z definice afinního zobrazení a definice afinity (promyslete si!), což ponecháme podrobnějšímu studiu afinních zobrazení ve vyšších semestrech.

Následující větu uvádíme zejména s ohledem na úvodní poznámku o Kleinově Erlangenském programu. Právě nalezená grupa afinit je právě tou grupou, pomocí níž lze získat afinní geometrii; nazývá se *afinní grupa* daného afinního prostoru.

neznámé koeficienty následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11} \quad\quad\quad\; + a_1 &= 1 \\ a_{12} \quad\quad\quad\; + a_2 &= 1 \\ 2a_{11} + a_{21} + a_1 &= 4 \\ 2a_{12} + a_{22} + a_2 &= 3 \\ a_{11} + a_{21} + a_1 &= 2 \\ a_{12} + a_{22} + a_2 &= 2 \end{aligned}$$

Jejím vyřešením zjistíme, že

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 0.$$

analytické vyjádření afinního zobrazení f tudíž zní:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 - 1 \\ y_2 &= \;\; x_1 + x_2 \end{aligned}.$$

Rozhodnout o tom, zda f je afinitou lze v souladu s větou 1.8.7 vyšetřením regularity matice $\mathbf{A}_0$ asociovaného homomorfizmu φ:

$$\det \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

tudíž f je afinitou roviny $\mathcal{A}_2$.

Kapitola 2

Euklidovská geometrie

Tato kapitola je věnována studiu speciálních afinních prostorů a to těch, v nichž zavádíme pojmy *vzdálenost* a *úhel* a můžeme tak krom vztahů polohových studovat i vztahy *metrické*.

2.1 Euklidovský prostor a jeho základní vlastnosti

V odstavci 1.1.1 jsme uvedli, že motivací k zavedení pojmu afinní prostor je snaha o matematický popis intuitivně chápaného prostoru fyzikálního, konkrétně šlo o afinní prostory nad $\mathbb{R}$. Jak axiomaticky v těchto prostorech zavést úhel a vzdálenost? Při intuitivním přístupu (např. na střední škole) se prostřednictvím pojmu délka vektoru a úhel dvou vektorů zavádí jisté zobrazení $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$ relací:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V: \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Dá se ukázat (prostředky středoškolské matematiky), že takto zavedené zobrazení má následující vlastnosti:
$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \ \forall t \in \mathbb{R}$:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \neq \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$

Právě uvedené vlastnosti, které intuitivně přisuzujeme vektorům fyzikálního prostoru, však odpovídají axiomům *euklidovského vektorového prostoru* (někdy zvaném též *vektorový prostor se skalárním součinem*).[1]

Proto se jeví vhodná následující definice euklidovského prostoru:

[1] Připomeňme jen, že je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, pak se *skalární součin* definuje jako každé zobrazení $\cdot : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, splňující pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a každé $t \in \mathbb{R}$ podmínky 1 - 4.

Definice 2.1.1 Afinní prostor $(\mathbf{E}, \mathbf{V}, f)$ na jehož zaměření je definován skalární součin $\cdot : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, se nazývá *euklidovský prostor* a značí se $\mathcal{E} = (\mathbf{E}, (\mathbf{V}, \cdot), f)$.

Poznamenejme, že těleso skalárů euklidovského prostoru je *tělesem reálných čísel.*

Úmluva 2.1.2

- Nebude-li řečeno jinak, budeme v kapitole 2 mlčky předpokládat, že $\mathcal{E}$ označuje euklidovský prostor s množinou bodů $\mathbf{E}$, zaměřením $\mathbf{V}$, skalárním součinem „$\cdot$“ a že f (resp. $-$) označuje příslušné zobrazení $\mathbf{E}^2 \to \mathbf{V}$ (rozdíl bodů).

  Dále budeme předpokládat, že $\dim \mathcal{E} = n$. Bude-li to účelné, připojíme dimenzi formou pravého dolního indexu – tj. např. $\mathcal{E}_k$.

- Znak operace skalárního součinu budeme zpravidla vynechávat a namísto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ psát jen $\mathbf{uv}$.

- Příslušnost bodu X euklidovskému prostoru $\mathcal{E}$ budeme značit $X \in \mathcal{E}$ (srv. poznámka 1.1.4).

V souladu s názorem je zavedení vzdálenosti dvou bodů euklidovského prostoru jako délky (normy) vektoru, který je jejich rozdílem. Očekáváme, že euklidovský prostor spolu s takto zavedenou relací bude mít následující vlastnost:[2]

Věta 2.1.3 *Buď $\mathcal{E} = (\mathbf{E}, (\mathbf{V}, \cdot), -)$ euklidovský prostor. Pak zobrazení $\rho : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ definované vztahem*

$$\forall X, Y \in \mathbf{E} : \ \rho(X, Y) = \|Y - X\|$$

je metrikou na množině $\mathbf{E}$.

Euklidovský prostor je tedy současně *metrickým prostorem*. Norma vektoru, kterou jsme pro zavedení metriky ρ užili je indukována zvoleným skalárním součinem. Proto se i právě

Délkou (normou) vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ rozumíme číslo $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$, *úhlem vektorů* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ pak číslo $\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$, pro $\mathbf{u} \neq \mathbf{o} \neq \mathbf{v}$, a číslo $\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\pi$ v případě opačném.

V následujícím textu budeme předpokládat znalosti o euklidovských vektorových prostorech v rozsahu základního kurzu lineární algebry (viz např. [13]).

[2] Připomeňme, že *metrikou na množině* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M} \neq \emptyset$, rozumíme zobrazení $\rho : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

1. $\forall X \in \mathbf{M} : \ \rho(X, X) = 0$,
2. $\forall X, Y \in \mathbf{M} : \ X \neq Y \Rightarrow \rho(X, Y) = \rho(Y, X) > 0$,
3. $\forall X, Y, Z \in \mathbf{M} : \ \rho(X, Y) + \rho(Y, Z) \geq \rho(X, Z)$.

zavedená metrika někdy označuje jako *metrika indukovaná skalárním součinem* – na témže euklidovském prostoru lze totiž uvažovat i metriky jiné[3].

Důkaz: Norma vektoru má následující vlastnosti:

(i) $\|\mathbf{o}\| = 0$,

(ii) $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}: \ \mathbf{u} \neq \mathbf{o} \Rightarrow \|-\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\| > 0$,

(iii) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}: \ \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

Uvážíme-li, že pro libovolné body afinního prostoru platí $X - X = \mathbf{o}$ a $(Y - X) = -(X - Y)$, vyplývá z (i) splnění podmínky 1 a z (ii) podmínky 2 definice metriky.

Dokažme splnění podmínky 3:
Buďte X, Y, Z libovolné body z $\mathcal{E}$. Pak lze užitím (iii) psát:

$$\rho(X,Z) = \|Z - X\| = \|(Y - X) + (Z - Y)\| \leq \|Y - X\| + \|Z - Y\| = \rho(X,Y) + \rho(Y,Z).$$

□

Definice 2.1.4 Buď $\mathcal{E}$ euklidovský prostor. Pak se číslo $\rho(X,Y)$ přiřazené dvojici bodů $X, Y \in \mathcal{E}$ dle věty 2.1.3 nazývá *vzdálenost bodů X a Y*.[4]

Pro nerovnost (iii) uvedenou v důkaze věty 2.1.3 platí, že přechází v rovnost, právě když

$$\mathbf{u} = \mathbf{o} \vee \mathbf{v} = \mathbf{o} \vee (\exists t \in \mathbb{R}, t > 0: \ \mathbf{u} = t\mathbf{v}).$$

To ovšem znamená, že v nerovnosti

$$\rho(X,Z) \leq \rho(X,Y) + \rho(Y,Z)$$

nastává rovnost, právě když

$$(Y = X) \vee (Y = Z) \vee (\exists t \in \mathbb{R}, t > 0: \ Y - X = t(Z - Y))$$

Protože $Y - X = t(Z - Y)$ lze ekvivalentně psát $Y = X + \frac{t}{t+1}(Z - X)$ a jelikož z předpokladu $t > 0$ dostáváme $0 < \frac{t}{t+1} < 1$, obdržíme použitím věty 1.5.46 větu následující:

Věta 2.1.5 *Buďte X, Y, Z libovolné body euklidovského prostoru $\mathcal{E}$. Pak platí, že $\rho(X,Z) = \rho(X,Y) + \rho(Y,Z)$, právě když bod Y náleží uzavřené úsečce s krajními body X, Z.*

[3] Uvažujme např. euklidovskou rovinu $\mathcal{E}_2$ v níž jsme zvolili soustavu souřadnic. Definujme pak zobrazení $\bar{\rho}: \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{R}$ takto:

$$\forall X, Y \in \mathbf{E}, \ X = [x_1, x_2], Y = [y_1, y_2]: \ \bar{\rho}(X,Y) = \min\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}.$$

Snadno se vidí, že i $\bar{\rho}$ je metrikou na $\mathbf{E}$.

[4] Pro vzdálenost bodů X, Y se také užívá znaku $|X, Y|$, $v(X, Y)$ apod.

Následující definicí zavádíme v euklidovské geometrii frekvetovaný pojem kartézské báze a jí příslušné soustavy souřadné [5].

Definice 2.1.6 Afinní báze $\mathcal{B} = \langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ euklidovského prostoru $\mathcal{E}_n$ se nazývá *kartézská báze*, jestliže vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ tvoří ortonormální soustavu.

Afinní soustava souřadnic příslušná kartézské bázi prostoru $\mathcal{E}_n$ se nazývá *kartézská soustava souřadnic*.[6]

Důvod zavedení kartézské báze spočívá v jednoduchosti formule pro skalární součin vektorů, a tím i formulí dalších – např. pro vzdálenost dvou bodů (následující formule pro vzdálenost dvou bodů se nazývá *kartézská* nebo *euklidovská formule*) .

Dá se ukázat, že $\mathcal{B}_0$ je ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}$ (tj. $\mathcal{B}$ je kartézská báze v $\mathcal{E}$), právě když pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)_{\mathcal{B}_0} \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

Pro libovolné dva body $X, Y \in \mathcal{E}$, $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}, Y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]_{\mathcal{B}}$ můžeme psát:

$$\rho(X, Y) = \|Y - X\|,$$

a jelikož $Y - X = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \cdots, y_n - x_n)_{\mathcal{B}_0}$, je norma dána:

$$\|Y - X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

Odvodili jsme platnost následující věty, kterou budeme dále užívat, aniž bychom se na to výslovně odvolávali.

---

[5] Připomeňme, že o soustavě vektorů $\langle \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_h \rangle \subseteq \mathbf{V}$ řekneme, že je *ortogonální*, jestliže $\forall i, j = 1, \cdots, h: \ i \neq j \Rightarrow \mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$, tedy $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0$.

Jsou-li navíc všechny její vektory jednotkové délky, hovoříme o množině *ortonormální*, což tedy znamená, že

$$\forall i, j = 1, \cdots, h: \ \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \tag{2.1}$$

[6] Kartézská soustava souřadnic představuje to zobrazení, které libovolný euklidovský prostor izomorfně převádí na *souřadnicový euklidovský prostor téže dimenze* (tj. souřadnicový afinní prostor nad $\mathbb{R}$). Proto každé dva euklidovské prostory jsou izomorfní, právě když mají touž dimenzi. Tedy i axiomatická teorie euklidovských prostorů může být považována za úplnou (srv. poznámka pod čarou před definicí 1.2.4).

Věta 2.1.7 *Báze $\mathcal{B}$ je kartézskou bází prostoru $\mathcal{E}$, právě když pro vzdálenost každých dvou bodů $X, Y \in \mathcal{E}$, $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}, Y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]_{\mathcal{B}}$, platí:*

$$\rho(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}. \tag{2.2}$$

Pro transformaci soustavy souřadné určené kartézskou bází v soustavu souřadnou určenou opět kartézskou bází se zavádí speciální pojmenování.

Definice 2.1.8 Buďte $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ kartézské báze euklidovského prostoru $\mathcal{E}$. Pak transformace soustavy souřadnic určené bází $\mathcal{B}$ v soustavu souřadnic určenou bází $\mathcal{C}$ se nazývá *ortogonální transformace*.

Mějme dánu v euklidovském prostoru $\mathcal{E}$ dánu kartézskou bázi $\mathcal{B}$ a některou další afinní bázi $\mathcal{C}$. Uvážíme-li, že vztah mezi dvojicí bází určuje příslušná matice přechodu, je přirozenou otázkou, jakou podmínku musí matice přechodu splňovat, aby báze $\mathcal{C}$ byla také bází kartézskou. Odpověď přináší následující věta[7]. Všimněte si, že počátky obou soustav souřadných mohou být zcela libovolné.

Věta 2.1.9 *Transformace soustavy souřadné určené kartézskou bází $\mathcal{B} = \langle P; \mathcal{B}_0 \rangle$ v soustavu souřadnou určenou bází $\mathcal{C} = \langle Q; \mathcal{C}_0 \rangle$ je ortogonální, právě když matice přechodu od báze $\mathcal{B}_0$ k bázi $\mathcal{C}_0$ je ortogonální.*

Důkaz: V souladu s definicí 2.1.6 a 2.1.8 máme dokázat, že báze $\mathcal{C}_0$ bude ortonormální právě tehdy, když matice $\mathbf{P}_0$ přechodu od $\mathcal{B}_0$ k $\mathcal{C}_0$ bude ortogonální.

Nechť $\mathcal{B}_0 = \langle \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ a $\mathcal{C}_0 = \langle \mathbf{e}'_1, \cdots, \mathbf{e}'_n \rangle$. Nechť $\mathbf{P}_0 = (a_{ij})$, tedy:

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{e}_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Báze $\mathcal{B}_0$ je ortonormální – tedy $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \delta_{jk}, \ 1 \leq j, k \leq n$. Máme dokázat, že platí $\mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_l = \delta_{il}$, $1 \leq i, l \leq n$.

Použitím vlastností skalárního součinu dostáváme:

$$\mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_l = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{e}_j \right) \left(\sum_{k=1}^{n} a_{lk} \mathbf{e}_k \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ij} a_{lk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ij} a_{lk} \delta_{jk}.$$

[7] Připomeňme, že *ortogonální maticí* se rozumí každá matice $\mathbf{A}$, pro niž platí

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}.$$

Pro ortogonální matici $\mathbf{A}$ zřejmě platí, že $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ a $\det \mathbf{A} = \pm 1$.

Sčítance, kde $k \neq j$, jsou nulové, proto

$$\mathbf{e}_i'\mathbf{e}_l' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{lj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{jl}^T.$$

Tedy $\mathbf{e}_i'\mathbf{e}_l' = \delta_{ij} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{jl}^T = \delta_{il}$. Přitom však $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{jl}^T$ je prvek i-tého řádku a l-tého sloupce matice $\mathbf{C} = \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{P}_0^T$. Ten je roven δ_{il} právě tehdy, když $\mathbf{C}$ je jednotková. □

2.2 Kolmost v euklidovském prostoru

Čtenář zná pojem *kolmé vektory, kolmost vektoru na množinu vektorů* (a tím i na podprostor vektorového prostoru) a *ortogonální doplněk množiny vektorů*.[8]

Nyní již můžeme zavést pojem kolmosti podprostorů *euklidovského* prostoru.

Ve fyzikální rovině či prostoru označujeme přímku p za kolmou na q, jsou-li kolmé jejich směrové vektory, což znamená, že směrový vektor jedné náleží ortogonálnímu doplňku zaměření druhé. Ve fyzikálním prostoru pokládáme přímku p kolmou na rovinu α, obsahuje-li ortogonální doplněk zaměření roviny α směrový vektor přímky p. V témže prostoru považujeme dvě roviny α, β za kolmé, obsahuje-li např. α přímku p kolmou na rovinu β, tj. obsahuje-li zaměření roviny α ortogonální doplněk zaměření roviny β. Všechny tyto případy jsou zahrnuty v následující obecné definici:

Definice 2.2.1 Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ podprostory euklidovského prostoru $\mathcal{E}$. Řekneme, že *podprostor $\mathcal{M}$ je kolmý na podprostor $\mathcal{N}$*, což značíme $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$, jestliže platí:

$$V(\mathcal{M}) \subseteq V(\mathcal{N})^{\perp} \ \vee \ V(\mathcal{N})^{\perp} \subseteq V(\mathcal{M}).$$

Podprostor $\mathcal{M}$ je tedy kolmý na $\mathcal{N}$ jestliže jeho zaměření je obsaženo v ortogonálním doplňku zaměření podprostoru $\mathcal{N}$, nebo jestliže tento doplněk obsahuje (dle vztahu mezi dimenzemi těchto podprostorů – promyslete si).[9]

[8] *Ortogonálním doplňkem množiny* $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V}$ rozumíme množinu $\mathbf{Q}^{\perp}$ definovanou:

$$\mathbf{Q}^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V}, \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Q} : \mathbf{x} \perp \mathbf{y}\}.$$

Je-li $\mathbf{Q} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$, platí, že $\dim \mathbf{Q}^{\perp} = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{Q}$ a $\mathbf{V} = \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}^{\perp}$. Rovněž platí, že $\mathbf{Q}^{\perp\perp} = \mathbf{Q}$.

[9] Zkoumá-li se ortogonalita podprostorů *vektorového prostoru se skalárním součinem*, definuje se (zřejmě na základě téže motivace) kolmost podprostorů $\mathbf{U}, \mathbf{W} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$ takto:

$$\mathbf{U} \perp \mathbf{W} \Leftrightarrow \mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}^{\perp} \vee \mathbf{W}^{\perp} \subseteq \mathbf{U},$$

takže kolmost dvou podprostorů euklidovského prostoru by bylo možné definovat (alternativně k definici 2.2.1) pomocí *kolmosti jejich zaměření*.

V případě, kdy $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ a $\dim \mathcal{M} = n - \dim \mathcal{N}$, označuje se někdy $\mathcal{M}$ *jako totálně kolmý podprostor na* $\mathcal{N}$. Dále viz věta 2.2.4 a definice 2.2.5.

Doplňme ještě definici dalšího frekventovaného pojmu:

Definice 2.2.2 Řekneme, že *vektor* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, resp. *směr* $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$, *je kolmý na podprostor* $\mathcal{M} \subseteq\subseteq \mathcal{E}$, jestliže $\mathbf{u} \perp V(\mathcal{M})$, resp. $\mathbf{U} \perp V(\mathcal{M})$.

Naskýtá se otázka, zda relace „být kolmý“ je na množině podprostorů euklidovského prostoru $\mathcal{E}$ *symetrická*.

Uvažujme $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{E}$ a označme jejich zaměření po řadě $\mathbf{U}$ a $\mathbf{W}$. Podle definice 2.2.1 platí:

- je-li $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$, pak $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}^\perp \vee \mathbf{W}^\perp \subseteq \mathbf{U}$,
- je-li $\mathcal{N} \perp \mathcal{M}$, pak $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}^\perp \vee \mathbf{U}^\perp \subseteq \mathbf{W}$.

Předpokládejme, že $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}^\perp$. Zvolme vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$ a buď $\mathbf{y}$ libovolný vektor z $\mathbf{U}$. Pak ovšem $\mathbf{y} \in \mathbf{W}^\perp$, a proto $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Protože $\mathbf{y}$ byl libovolný vektor z $\mathbf{U}$, je $\mathbf{x} \perp \mathbf{U}$ a náleží tudíž do $\mathbf{U}^\perp$. Ukázali jsme, že $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}^\perp \Rightarrow \mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}^\perp$. Analogicky bychom ukázali, že $\mathbf{W}^\perp \subseteq \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{U}^\perp \subseteq \mathbf{W}$. Souhrnně řečeno, $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ implikuje $\mathcal{N} \perp \mathcal{M}$. Platí proto věta následující:

Věta 2.2.3 *Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{E}$. Jestliže $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ pak $\mathcal{N} \perp \mathcal{M}$.*

Namísto „podprostor $\mathcal{M}$ je kolmý na na $\mathcal{N}$“ můžeme říci „$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ jsou kolmé podprostory“.

Uvažujme nyní podprostor $\mathcal{M}_k \subseteq\subseteq \mathcal{E}$ a bod $B \in \mathcal{E}$. Zkonstruujme nyní všechny podprostory $\mathcal{N}_r$ takové, že

$$B \in \mathcal{N}_r \wedge \mathcal{N}_r \perp \mathcal{M}_k. \tag{2.3}$$

Znamená to, že $\mathcal{N} = \{B, \mathbf{U}_r\}$, kde

$$\mathbf{U}_r \subset V(\mathcal{M})^\perp \text{ (pro } r + k < n) \;\vee\; \mathbf{U}_r = V(\mathcal{M})^\perp \text{ (pro } r + k = n) \vee \\ \vee \mathbf{U}_r \supset V(\mathcal{M})^\perp \text{ (pro } r + k > n).$$

Odtud je patrno, že pro $r = n - k$ je podprostor vyhovující (2.3) jediný – je jím podprostor $\overline{\mathcal{N}} = \{B, V(\mathcal{M})^\perp\}$. Pro každý jiný podprostor $\mathcal{N}$ splňující (2.3) nastane (viz věta 1.4.6) buď $\mathcal{N}_r \subset \overline{\mathcal{N}}$ (pro $r + k < n$), nebo $\mathcal{N}_r \supset \overline{\mathcal{N}}$ (pro $r + k > n$).

Jaká je vzájemná poloha tohoto podprostoru a podprostoru $\mathcal{M}$? Vzhledem k tomu, že $\mathbf{V} = V(\mathcal{M}) \oplus V(\mathcal{M})^\perp = V(\mathcal{M}) \oplus V(\overline{\mathcal{N}})$, a tudíž také rozdíl $C - B \in V(\mathcal{M}) \oplus V(\overline{\mathcal{N}})$

pro libovolný $C \in \mathcal{M}$, je v souladu s větou 1.4.19 průnik $\mathcal{M} \cap \overline{\mathcal{N}}$ jednobodový, tento bod označme B^* (v případě $B \notin \mathcal{M}$ zřejmě $B \neq B^*$ a případě $B \in \mathcal{M}$ pak $B = B^*$).

Uvažujme dále libovolnou přímku p, která prochází bodem B, je kolmá na $\mathcal{M}$ a je s $\mathcal{M}$ různoběžná. Jak bylo výše zdůvodněno, je $p \subseteq \overline{\mathcal{N}}$, pak ovšem $\{B^*\} = (\overline{\mathcal{N}} \cap \mathcal{M}) \supseteq (p \cap \mathcal{M})$, a tudíž p protíná $\mathcal{M}$ v bodě B^*.

Shrňme nyní získané poznatky do vět (2.2.4, 2.2.6, 2.2.8) a zaveďme názvy pro význačné objekty, o nichž tato tvrzení hovoří.

Věta 2.2.4 *Buďte $\mathcal{M}_k$, $0 \leq k \leq n$, podprostor a B bod v $\mathcal{E}_n$. Pak existuje právě jeden $(n-k)$-rozměrný podprostor $\mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{E}_n$ tak, že platí:*

1. *$B \in \mathcal{N}$,*
2. *$\mathcal{N} \perp \mathcal{M}$.*

Tento podprostor je určen bodem B a jeho zaměřením je $V(\mathcal{M})^{\perp}$.

Definice 2.2.5 Buďte $\mathcal{M}_k$, $0 \leq k \leq n$, podprostor a B bod v $\mathcal{E}_n$. Pak se podprostor dimenze $n-k$ splňující požadavky věty 2.2.4 nazývá *totálně kolmý podprostor k podprostoru $\mathcal{M}$ jdoucí bodem B* a značí se $\mathcal{M}^{\perp}(B)$.

Věta 2.2.6 *Buďte $\mathcal{M}_k$, $0 \leq k \leq n$, podprostor a B bod v $\mathcal{E}_n$. Průnik podprostorů $\mathcal{M}^{\perp}(B)$ a $\mathcal{M}$ je jednobodový.*

Definice 2.2.7 Bod náležející průniku $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(B)$ se nazývá *kolmý průmět (ortogonální projekce) bodu B do podprostoru $\mathcal{M}$* a značí se B^*.

Věta 2.2.8 *Buďte $\mathcal{M}_k$, $0 \leq k \leq n$, podprostor a B bod v $\mathcal{E}_n$. Pak platí:*

1. *každý podprostor $\mathcal{N}_r$ kolmý na $\mathcal{M}$ a obsahující bod B je buď obsažen v podprostoru $\mathcal{M}^{\perp}(B)$ (pro $r + k < n$), nebo je roven podprostoru $\mathcal{M}^{\perp}(B)$ (pro $r + k = n$), nebo tento podprostor obsahuje (pro $r + k > n$),*
2. *každá přímka kolmá p na $\mathcal{M}$, obsahující bod B nemá s podprostorem $\mathcal{M}$ buď žádný společný bod, nebo protíná $\mathcal{M}$ v jediném bodě, a to v bodě B^*.*[10]

[10] V případě, kdy $k + r > n$, jsou podprostory $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}_r$ různoběžné a protínají se v podprostoru dimenze aspoň 1, zatímco v případě $k + r < n$ budou podprostory $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}_r$ různoběžné či mimoběžné – promyslete si (viz podkapitola 1.4)!

Příklad 2.2.9 Určete kolmý průmět bodu Q do podprostoru $\mathcal{M}$, je-li v kartézské soustavě souřadnic prostoru $\mathcal{E}_4$ dáno:

$$Q = [2, 2, 4, 6],$$
$$\mathcal{M} = \{B; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\},\ B = [1, 2, 3, 4],\ \mathbf{u}_1 = (2, 1, 0, 1),\ \mathbf{u}_2 = (1, 1, 1, 1).$$

Řešení:
Kolmý průmět Q^* bodu Q najdeme jako průnik $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(Q)$.
Podprostor $\mathcal{M}^{\perp}(Q)$ je roven $\{Q, V(\mathcal{M})^{\perp}\}$.
Vyšetřeme nejprve $V(\mathcal{M})^{\perp}$. Zřejmě platí (zdůvodněte):

$$\mathbf{x} \in V(\mathcal{M})^{\perp} \Leftrightarrow \mathbf{x} \perp V(\mathcal{M}) = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \wedge \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2 = 0.$$

Označíme-li x_1, x_2, x_3, x_4 souřadnice hledaného vektoru $\mathbf{x}$, lze poslední podmínku pro jeho incidenci s $V(\mathcal{M})^{\perp}$ psát:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)(2, 1, 0, 1) = 0 \wedge (x_1, x_2, x_3, x_4)(1, 1, 1, 1) = 0,$$

což představuje následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Její fundamentální systém řešení tvoří např. aritmetické vektory

$$\mathbf{w}_1 = (0, -1, 0, 1),\ \mathbf{w}_2 = (1, -2, 1, 0),$$

tudíž

$$\begin{aligned} V(\mathcal{M})^{\perp} &= [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] = [(0, -1, 0, 1), (1, -2, 1, 0)] \\ \mathcal{M}^{\perp}(Q) &= \{[2, 2, 4, 6]; (0, -1, 0, 1), (1, -2, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

Nyní budeme vyšetřovat průnik $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(Q)$ (srv. Příklad 1.4.22/1):
$Q^* \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(Q) \Leftrightarrow (Q^* = B + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 \wedge Q^* = Q + r_1\mathbf{w}_1 + r_2\mathbf{w}_2)$, kde t_1, t_2, r_1, r_2 řeší následující rovnici:

$$\begin{aligned} &[1, 2, 3, 4] + t_1(2, 1, 0, 1) + t_2(1, 1, 1, 1) = \\ &= [2, 2, 4, 6] + r_1(0, -1, 0, 1) + r_2(1, -2, 1, 0), \end{aligned}$$

neboli

$$r_1(0, -1, 0, 1) + r_2(1, -2, 1, 0) - t_1(2, 1, 0, 1) - t_2(1, 1, 1, 1) = (-1, 0, -1, -2).$$

tato rovnice vede na soustavu lineárních rovnic, jejíž řešení zní:

$$t_1 = 0 \wedge t_2 = 1 \wedge r_1 = \cdots \wedge r_2 = \cdots,$$

a tudíž

$$Q^* = [1, 2, 3, 4] + (1, 1, 1, 1) = [2, 3, 4, 5].$$

Přirozeným způsobem zaveďme kolmý průmět podmnožiny bodů v $\mathcal{E}$:

Definice 2.2.10 Buďte $\mathcal{M}$ podprostor a $\mathcal{Q}$ neprázdná podmnožina v $\mathcal{E}$. Pak *kolmým průmětem (ortogonální projekcí) množiny $\mathcal{Q}$ do podprostoru $\mathcal{M}$* rozumíme množinu kolmých průmětů jednotlivých bodů množiny $\mathcal{Q}$ do podprostoru $\mathcal{M}$. Tuto množinu značíme $\mathcal{Q}^*$.

Intuitivně očekáváme platnost následující věty:

Věta 2.2.11 *Buďte $\mathcal{M}$ podprostor a p přímka v $\mathcal{E}$. Pak kolmým průmětem přímky p do $\mathcal{M}$ je buď jednobodová množina (je-li $p \perp \mathcal{M}$), nebo přímka (není-li $p \perp \mathcal{M}$).*[11]

Důkaz:

(i) nechť $p \perp \mathcal{M}$

Zvolme libovolné body $P, Q \in p$ a sestrojme jejich kolmé průměty do $\mathcal{M}$ (viz věta 2.2.4, definice 2.2.7). Pro příslušné totálně kolmé podprostory platí:

$$\mathcal{M}^{\perp}(P) = \{P, V(\mathcal{M})^{\perp}\}, \ \mathcal{M}^{\perp}(Q) = \{Q, V(\mathcal{M})^{\perp}\},$$

odtud plyne, že $\mathcal{M}^{\perp}(P) \parallel \mathcal{M}^{\perp}(Q)$. Jelikož $p \perp \mathcal{M}$, je její zaměření částí $V(\mathcal{M})^{\perp}$, a tedy $Q - P \in V(\mathcal{M})^{\perp}$, což implikuje (viz věta 1.4.6):

$$\mathcal{M}^{\perp}(P) = \mathcal{M}^{\perp}(Q).$$

Uvážíme-li definici kolmých průmětů P^*, Q^*, obdržíme:

$$\{P^*\} = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(P) = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(Q) = \{Q^*\},$$

takže

$$p^* = \{P^*\}.$$

(ii) nechť není $p \perp \mathcal{M}$

Zvolme opět libovolné body $P, Q \in p$ a sestrojme jejich kolmé průměty P^*, Q^* do $\mathcal{M}$. Pak můžeme uvažovat přímku $\overleftrightarrow{P^*Q^*}$ ležící v $\mathcal{M}$.

Nechť X je některý bod přímky p,

$$X = P + t(Q - P).$$

Sestrojme bod X':

$$X' = P^* + t(Q^* - P^*).$$

[11] Uvědomme si, že průsečík přímky p s $\mathcal{M}$ nemusí v těchto případech obecně existovat – přímka může být s $\mathcal{M}$ rovnoběžná či mimoběžná.

Naším cílem bude ukázat, že X' je kolmým průmětem bodu X do $\mathcal{M}$. K tomu postačí ukázat, že $X - X' \perp \mathcal{M}$, neboť $\overleftrightarrow{X'X}$ je s $\mathcal{M}$ různoběžná – $X' \in \mathcal{M}$ (viz věta 2.2.8).

$$X - X' = P - P^* + t((Q - P) - (Q^* - P^*)) =$$
$$= P - P^* - t(P - P^*) + t(Q - Q^*) = (1 - t)(P - P^*) + t(Q - Q^*),$$

a jelikož $P - P^*$ i $Q - Q^*$ náleží $V(\mathcal{M})^\perp \subseteq\subseteq \mathbf{V}$, je i $X - X'$ prvkem $V(\mathcal{M})^\perp$, a tudíž $X' = X^*$, odkud plyne, že X^* padne na $\overleftrightarrow{P^*Q^*}$, a tedy $p^* \subseteq \overleftrightarrow{P^*Q^*}$.

Platnost obrácené inkluze plyne analogicky, tedy

$$p^* = \overleftrightarrow{P^*Q^*}\ .$$

□

Pokusme se nyní pro přímku nalézt – analogicky jako v případě bodu – jistý podprostor, jehož průnikem s daným podprostorem bude její kolmý průmět.

Vytvoříme-li spojení všech totálně kolmých podprostorů procházejících body dané přímky, tj. podprostor

$$\sum_{X \in p} \mathcal{M}^\perp(X),$$

lze očekávat, že průnikem tohoto podprostoru s $\mathcal{M}$ bude kolmý průmět přímky p do $\mathcal{M}$, protože tento podprostor bude jistě obsahovat kolmé průměty všech jejích bodů (proč?).

Definice 2.2.12 Buďte $\mathcal{M}$ podprostor a p přímka v $\mathcal{E}$. Pak se podprostor označovaný $\mathcal{M}^\perp(p)$ a definovaný vztahem

$$\mathcal{M}^\perp(p) = \sum_{X \in p} \mathcal{M}^\perp(X)$$

nazývá *kolmopromítací podprostor přímky p do podprostoru $\mathcal{M}$.*

Věta 2.2.13 *Buďte $\mathcal{M}$ podprostor a p přímka v $\mathcal{E}$, P její libovolný bod. Pak platí:*

1. $\mathcal{M}^\perp(p) = \{P, V(\mathcal{M})^\perp + V(p)\}$,
2. $\mathcal{M}^\perp(p) \perp \mathcal{M}$,
3. $p^* = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp(p)$.

Důkaz:

Ad 1: Nechť $p = \{P, \mathbf{s}\}$. Uvažme dva libovolné různé body $P, Q \in p$ a spočtěme spojení $\mathcal{M}^{\perp}(P) + \mathcal{M}^{\perp}(Q)$ (viz věta 1.4.16):

$$\begin{gathered}\mathcal{M}^{\perp}(P) + \mathcal{M}^{\perp}(Q) = \\ = \{P, V(\mathcal{M})^{\perp}\} + \{Q, V(\mathcal{M})^{\perp}\} = \{P, V(\mathcal{M})^{\perp} + V(\mathcal{M})^{\perp} + [Q - P]\} = \\ = \{P, V(\mathcal{M})^{\perp} + [Q - P]\} = \{P, V(\mathcal{M})^{\perp} + \mathbf{s}\}.\end{gathered}$$

Je patrno, že spojíme-li nalezený podprostor s jakýmkoli dalším $\mathcal{M}^{\perp}(X)$, kde $X \in p$, tak (protože $X - P \in [\mathbf{s}]$) bude výsledkem opět $\{P, V(\mathcal{M})^{\perp} + \mathbf{s}\}$, čímž je 1 dokázáno.

Ad 2: Jde o evidentní důsledek 1.

Ad 3: Zvolíme-li libovolný $X \in p$, je $\mathcal{M}^{\perp}(X) \subseteq \mathcal{M}^{\perp}(p)$, a proto

$$X^* = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(X) \subseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(p),$$

což značí, že p^*, jakožto množina kolmých průmětů svých bodů, je obsažena v $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(p)$.

Stanovme nyní dimenzi tohoto průniku:

$$\dim(\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(p)) = \dim \mathcal{M} + \dim \mathcal{M}^{\perp}(p) - \dim(\mathcal{M} + \mathcal{M}^{\perp}(p)). \tag{2.4}$$

(i) nechť $p \perp \mathcal{M}$
Pak $V(p) \subseteq V(\mathcal{M})^{\perp}$, takže (dle 1 věty 2.2.13):

$$\dim \mathcal{M}^{\perp}(p) = \dim(V(p) + V(\mathcal{M})^{\perp}) = \dim V(\mathcal{M})^{\perp} = n - \dim \mathcal{M}.$$

Z 1 dále vyplývá, že $V(\mathcal{M})$ i $V(\mathcal{M})^{\perp}$ jsou částí zaměření $\mathcal{M} + \mathcal{M}^{\perp}(p)$, a tudíž toto zaměření je rovno $\mathbf{V}$ (proč?), a tedy

$$\dim(\mathcal{M} + \mathcal{M}^{\perp}(p)) = n.$$

Z (2.4) obdržíme:

$$\dim(\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(p)) = \dim \mathcal{M} + n - \dim \mathcal{M} - n = 0,$$

a jelikož v tomto případě je i $\dim p^* = 0$ (srv. věta 2.2.11), dostáváme, že

$$p^* = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(p).$$

(ii) nechť není $p \perp \mathcal{M}$
V tomto případě $V(p) \not\subseteq V(\mathcal{M})^{\perp}$, takže

$$\dim \mathcal{M}^{\perp}(p) = \dim(V(p) + V(\mathcal{M})^{\perp}) = \dim V(\mathcal{M})^{\perp} + 1 = n + 1 - \dim \mathcal{M}.$$

Pochopitelně i zde je $\dim(\mathcal{M} + \mathcal{M}^{\perp}(p)) = n$, takže z (2.4) dostáváme:

$$\dim(\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(p)) = \dim \mathcal{M} + n + 1 - \dim \mathcal{M} - n = 1,$$

a protože (opět dle věty 2.2.11) je $\dim p^* = 1$, zjišťujeme, že

$$p^* = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(p).$$

□

V případě přímky a roviny v $\mathcal{E}_3$ zjišťujeme, že kolmopromítacím podprostorem je buď přímka sama (je-li kolmá na rovinu), nebo rovina určená bodem přímky, jejím směrovým vektorem a vektorem na rovinu kolmým (pojem *normálový vektor (nad)roviny* teprve zavedeme), což je očekávaný výsledek. Analogicky je tomu i v případě přímky a nadroviny v $\mathcal{E}_n$.

Čtenář jistě intuitivně očekává platnost této věty:

Věta 2.2.14 *Buď v $\mathcal{E}$ dána přímka p a rovnoběžné podprostory $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ téže dimenze.*[12] *Pak pro kolmé průměty p_1^*, p_2^* přímky p po řadě do podprostorů $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$ platí:*

$$p_1^* \parallel p_2^*.$$

Důkaz: V souladu s větou 2.2.13 pro kolmé průměty p_1^*, p_2^* platí (P je některý bod přímky p):

$$p_1^* = \{P, V(\mathcal{M}_1)^{\perp} + V(p)\} \cap \mathcal{M}_1 \wedge p_2^* = \{P, V(\mathcal{M}_2)^{\perp} + V(p)\} \cap \mathcal{M}_2,$$

tudíž dle věty 1.4.12:

$$V(p_1^*) = (V(\mathcal{M}_1)^{\perp} + V(p)) \cap V(\mathcal{M}_1) \wedge V(p_2^*) = (V(\mathcal{M}_2)^{\perp} + V(p)) \cap V(\mathcal{M}_2). \quad (2.5)$$

Protože $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ jsou rovnoběžné téže dimenze, platí $V(\mathcal{M}_1) = V(\mathcal{M}_2)$, a tudíž z (2.5) ihned vyplývá, že $V(p_1^*) = V(p_2^*)$. □

Příklad 2.2.15 Určete kolmý průmět přímky p do podprostoru $\mathcal{M}$, je-li v kartézské soustavě souřadnic prostoru $\mathcal{E}_4$ dáno:

$$p = \{Q; \mathbf{s}\},\ Q = [2, 2, 4, 6],\ \mathbf{s} = (2, -1, 0, -1),$$
$$\mathcal{M} = \{B; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\},\ B = [1, 2, 3, 4],\ \mathbf{u}_1 = (2, 1, 0, 1),\ \mathbf{u}_2 = (1, 1, 1, 1).$$

[12] Požadavek téže dimenze nelze vynechat – uvažme např. situaci, kdy by p a $\mathcal{M}_1 \subseteq\subseteq \mathcal{E}_3$ byla dvojice různoběžných přímek rovnoběžných s rovinou $\mathcal{M}_2$. Pak průmět $p_1^* = \mathcal{M}_1$, průmět p_2^* je však přímka rovnoběžná s p a tudíž není rovnoběžná s p_1^*.

Řešení:
Dle věty 2.2.13 je kolmý průmět p^* přímky p do $\mathcal{M}$ roven průniku $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(p)$, kde podprostor $\mathcal{M}^{\perp}(p)$ je roven $\{Q, V(\mathcal{M})^{\perp} + [\mathbf{s}]\}$.
V příkladu 2.2.9 jsme nalezli $V(\mathcal{M})^{\perp}$:

$$V(\mathcal{M})^{\perp} = [(0,-1,0,1),(1,-2,1,0)],$$

takže

$$\mathcal{M}^{\perp}(p) = \{[2,2,4,6];(0,-1,0,1),(1,-2,1,0),(2,-1,0,-1)\}.$$

Nyní standardním způsobem vyšetříme průnik $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(p)$ a zjistíme, že

$$p^* = \{[2,3,4,5],(1,0,-1,0)\}.$$

Ke stejnému výsledku dojdeme nalezením kolmého průmětu bodů Q a $R = Q + \mathrm{s}$ a stejně jako v příkladu 2.2.9 bychom zjistili:

$$Q^* = [2,3,4,5],\ R^* = [3,3,3,5].$$

Je patrno, že skutečně

$$p^* = \overleftrightarrow{Q^* R^*}.$$

Povšimněme si nyní nadroviny euklidovského prostoru. Je-li $\alpha \subset \mathcal{E}$ některá nadrovina, pak $\dim V(\alpha) = n-1$, a tudíž $\dim V(\alpha)^{\perp} = 1$, což značí existenci jednoznačně určeného směru $\mathbf{N} = V(\alpha)^{\perp}$ kolmého na $V(\alpha)$. Pak ovšem platí:

$$\mathbf{N}^{\perp} = V(\alpha)^{\perp\perp} = V(\alpha),$$

což pro libovolný $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ znamená:

$$\mathbf{x} \in V(\alpha) \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{N}^{\perp} \Leftrightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{N} \Leftrightarrow \mathbf{xn} = 0, \tag{2.6}$$

kde $\mathbf{n}$ je libovolný generátor směru $\mathbf{N}$.
Je-li B některý bod z α, dostáváme z (2.6) pro každý bod $X \in \mathcal{E}$:

$$X \in \alpha \Leftrightarrow (X-B) \in V(\alpha) \Leftrightarrow (X-B)\cdot \mathbf{n} = 0.$$

Získané poznatky shrnují věty 2.2.16 a 2.2.18.

Věta 2.2.16 *Buď α nadrovina euklidovského prostoru $\mathcal{E}$. Pak existuje právě jeden směr $\mathbf{N} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$ tak, že $\mathbf{N} \perp \alpha$.*

Definice 2.2.17 Buď α nadrovina euklidovského prostoru $\mathcal{E}$. Jednoznačně určený směr $\mathbf{N}$ z věty 2.2.16 se nazývá *normálový směr nadroviny* α, jeho libovolný generátor pak *normálový vektor nadroviny* α. Každá přímka normálového směru se nazývá *normála nadroviny* α.

Věta 2.2.18 *Buď α nadrovina euklidovského prostoru $\mathcal{E}$, B její libovolný bod a $\mathbf{n}$ její libovolný normálový vektor. Pak pro každý $X \in \mathcal{E}$ platí:*

$$X \in \alpha \Leftrightarrow (X - B) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Povšimněme si nyní významu koeficientů obecné rovnice nadroviny α. Nechť je nadrovina α dána bodem B a normálovým vektorem $\mathbf{n}$ (srv. věta 2.2.18!).

Zvolme v $\mathcal{E}$ bázi $\mathcal{B}$. Nechť $\mathbf{n} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)_{\mathcal{B}_0}$, $B = [b_1, b_2, \cdots, b_n]_{\mathcal{B}}$. Pak v souladu s větou 2.2.18 můžeme pro každý $X \in \mathcal{E}$, $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]_{\mathcal{B}}$, psát:

$$X \in \alpha \Leftrightarrow (X - B) \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - b_1, x_2 - b_2, \cdots, x_n - b_n)_{\mathcal{B}_0} \cdot (a_1, a_2, \cdots, a_n)_{\mathcal{B}_0} = 0.$$

Je-li báze $\mathcal{B}$ kartézská (a jen tehdy), lze tento skalární součin dále psát takto:

$$a_1(x_1 - b_1) + a_2(x_2 - b_2) + \cdots + a_n(x_n - b_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0,$$
$$a_0 = -(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n),$$

a tudíž X náleží α právě tehdy, když

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0.$$

Důsledek 2.2.19 *Buď α nadrovina euklidovského prostoru $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ kartézská báze v $\mathcal{E}$. Pak pro normálový vektor $\mathbf{n}$ nadroviny α platí:*

$$\mathbf{n} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)_{\mathcal{B}_0},$$

právě když obecná rovnice nadroviny α v bázi $\mathcal{B}$ zní:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0.$$

Poznámka 2.2.20 Podmínka pro souřadnice bodu X náležícího nadrovině plynoucí z relace uvedené ve větě 2.2.18 nabývá přirozeně v *každé* bázi $\mathcal{B}$ tvaru $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$, tj. představuje *obecnou rovnici nadroviny* α, avšak toliko v bázi kartézské tvoří uspořádaná n-tice $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ *souřadnice normálového vektoru* nadroviny α

Poznámka 2.2.21 Buď α nadrovina v $\mathcal{E}_n$. Je-li $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_{n-1}$ některá báze jejího zaměření, pak ortogonální součin [13]

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \times \cdots \times \mathbf{e}_{n-1}$$

určuje normálový směr nadroviny α.

Příklad 2.2.22 Nechť je ve zvolené kartézské soustavě souřadnic prostoru $\mathcal{E}_4$ dáno:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 2, \\ p = \{[1, 2, 3, 4]; (3, 4, -1, 1)\} \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda p je kolmá na $\mathcal{M}$.
Řešení:
Podle definice 2.2.1 je $p \perp \mathcal{M}$, právě když $V(p) \subseteq V(\mathcal{M})^\perp$ (protože $\dim p = 1$). Podprostor $\mathcal{M}$ je dán obecnými rovnicemi, což znamená (viz věta 1.3.28):

$$\mathcal{M} = \nu_1 \cap \nu_2,$$

kde

$$\begin{aligned} \nu_1 : x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \\ \nu_2 : x_1 + x_3 + x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $V(\mathcal{M}) = V(\nu_1) \cap V(\nu_2)$, a proto $V(\mathcal{M})^\perp = V(\nu_1)^\perp + V(\nu_2)^\perp$, což díky větě 2.2.16 znamená: $V(\mathcal{M})^\perp = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$, kde $\mathbf{n}_j$ je normálový vektor nadroviny ν_j, $j = 1, 2$.

[13] Připomeňme, že ke *každým vektorům* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{n-1}$ *náležejícím orientovanému euklidovskému vektorovému prostoru* $\mathbf{V}_n$ *existuje právě jeden* $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ *tak, že platí:*

1. $\mathbf{a} \perp \mathbf{a}_i, \; 1 \leq i \leq n-1$
2. $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{n-1})}$
3. *jsou-li* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{n-1}$ *lineárně nezávislé, tvoří* $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{n-1} \rangle$ *kladnou bázi* $\mathbf{V}_n$.

Uvedený vektor $\mathbf{a}$ se nazývá *ortogonální* (pro $n = 3$ *vektorový*) *součin vektorů* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{n-1}$ a značí se $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$.

Promyslete si, že takto definovaný vektorový součin představuje shodný pojem s vektorovým součinem definovaným ve středoškolské matematice.

Připomeňme dále jeden ze způsobů jeho vyčíslení:
Jsou-li $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_{n-1}$ dány svými souřadnicemi v některé kladné ortonormální bázi $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ prostoru $\mathbf{V}$

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), \; 1 \leq i \leq n-1,$$

je jejich ortogonální součin roven symbolickému determinantu:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}.$$

Užitím důsledku 2.2.19 obdržíme:[14]

$$V(\mathcal{M})^{\perp} = [(1,2,-1,0),(1,0,1,1)].$$

Nyní zbývá vyšetřit, zda směrový vektor přímky p náleží vektorovému podprostoru $[(1,2,-1,0),(1,0,1,1)]$.
Snadno bychom ukázali, že tomu tak je: $(3,4,-1,1) = 2(1,2,-1,0)+(1,0,1,1)$. Přímka p je kolmá na $\mathcal{M}$.

2.3 Vzdálenost podprostorů euklidovského prostoru

V podkapitole 2.1 jsme zavedli vzdálenost dvou bodů euklidovského prostoru (jako normu vektoru jejich rozdílu). Zde se budeme zabývat vzdáleností bodu od podprostoru a vzájemnou vzdáleností dvou podprostorů,[15] přičemž studovat vzdálenost dvou podprostorů má zřejmě význam jen pro podprostory rovnoběžné a mimoběžné.

2.3.1 Vzdálenost bodu od podprostoru euklidovského prostoru

Pro stanovení vzdálenosti bodu od podprostoru očekáváme – na základě názoru – důležitost kolmého průmětu tohoto bodu do zmíněného podprostoru.

Uvažujme proto libovolný podprostor $\mathcal{M} \subseteq\subseteq \mathcal{E}$ a bod $B \in \mathcal{E}$. Zkonstruujme kolmý průmět B^* bodu B do $\mathcal{M}$. Zvolme dále libovolný bod $M \in \mathcal{M}$ a porovnejme vzdálenosti $\rho(B,B^*)$ a $\rho(B,M)$:
Pro vektor $M-B$ lze psát:

$$M - B = (M - B^*) + (B^* - B),$$

pro jeho normu pak:

$$\begin{aligned}\|M-B\|^2 = (M-B)(M-B) = ((M-B^*)+(B^*-B))((M-B^*)+(B^*-B)) = \\ = (M-B^*)(M-B^*) + 2(M-B^*)(B^*-B) + (B^*-B)(B^*-B),\end{aligned}$$

Uvážíme-li, že $M, B^* \in \mathcal{M}$ a $B^*, B \in \mathcal{M}(B)^{\perp}$ (proč?), a tedy

$$(M - B^*) \in V(\mathcal{M}) \wedge (B^* - B) \in V(\mathcal{M})^{\perp},$$

lze po úpravě vztahu pro normu $\|M-B\|$ dále pokračovat a psát:

$$\|M-B\|^2 = (M-B^*)(M-B^*) + (B^*-B)(B^*-B) = \|M-B^*\|^2 + \|B^*-B\|^2,$$

[14] To mimochodem dává návod k určení ortogonálního doplňku zaměření podprostoru daného obecnými rovnicemi.

[15] V metrických prostorech se rovněž zavádí *vzdálenost bodu od množiny* či *vzdálenost dvou množin* – zavedení těchto pojmů pro eukleidovský prostor (jakožto speciálního metrického prostoru) by s těmito obecnějšími definicemi nemělo být kolizní, což vždy ukážeme.

neboli[16]

$$\rho(B, M)^2 = \rho(B^*, M)^2 + \rho(B, B^*)^2. \tag{2.7}$$

Odtud vyplývá, že

$$\rho(B, M)^2 \geq \rho(B, B^*)^2, \tag{2.8}$$

přičemž rovnost nastává jen pro $M = B^*$ (proč?).
Uvážíme-li, že $\forall X, Y \in \mathcal{E} : \rho(X, Y) \geq 0$, vyplývá z (2.8):

$$\rho(B, M) \geq \rho(B, B^*),$$

kde rovnost nastává jen pro $M = B^*$ (proč?).

Dokázali jsme platnost věty následující:

Věta 2.3.1 *Buďte $\mathcal{M}$ podprostor a B bod v $\mathcal{E}$. Pak pro každý bod $M \in \mathcal{M}$ platí:*

$$\rho(B, M) \geq \rho(B, B^*),$$

přičemž rovnost nastává jen v případě $M = B^*$.

Přirozeným způsobem tedy definujeme vzdálenost bodu od podprostoru euklidovského prostoru:[17]

Definice 2.3.2 Buďte $\mathcal{M}$ podprostor, B bod v $\mathcal{E}$ a B^* kolmý průmět bodu B do podprostoru $\mathcal{M}$. Pak *vzdáleností bodu B od podprostoru $\mathcal{M}$* rozumíme číslo označované $\rho(B, \mathcal{M})$ a definované vztahem

$$\rho(B, \mathcal{M}) = \rho(B, B^*).$$

Vyšetřeme nyní vzdálenost bodu od nadroviny s cílem nalézt formuli pro její výpočet.

Uvažujme nadrovinu $\alpha \subset\subset \mathcal{E}$ danou (ve shodě s větou 2.2.18) jejím některým bodem C a normálovým vektorem $\mathbf{n}$. Buď dále B libovolný bod z $\mathcal{E}$.

Nalezněme nyní B^*:
Pro totálně kolmý podprostor $\alpha^{\perp}(B)$ (který je zde ovšem přímkou) platí (viz věta 2.2.4 a dále věta 2.2.16):

$$\alpha^{\perp}(B) = \{B, V(\alpha)^{\perp}\} = \{B, \mathbf{n}\}.$$

Bod B^* náleží průniku $\alpha \cap \alpha^{\perp}(B)$, musí pro něj tedy současně platit:

$$(B^* - C) \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{2.9}$$

[16]Následující rovnost mj. ukazuje, že je platným tvrzení zvané *Pythagorova věta*.
[17]Tato definice je evidentně specializací obecné definice vzdálenosti bodu B od podmnožiny $\mathcal{M}$ metrického prostoru:

$$\rho(B, \mathcal{M}) = \inf_{X \in \mathcal{M}} \{\rho(B, X)\}.$$

$$B^* = B + t\mathbf{n}, \tag{2.10}$$

odkud vyplývá:

$$0 = ((B + t\mathbf{n}) - C) \cdot \mathbf{n} = ((B - C) + t\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = (B - C) \cdot \mathbf{n} + t(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}),$$

tudíž pro parametr t dostáváme:

$$t = \tfrac{(C-B)\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}.$$

Bod B^* je proto dán takto:

$$B + (\tfrac{(C-B)\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}})\mathbf{n},$$

takže pro vzdálenost $\rho(B, \alpha)$ postupně obdržíme:

$$\rho(B, \alpha) = \rho(B, B^*) = \|B^* - B\| = \left\|(\tfrac{(C-B)\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}})\,\mathbf{n}\right\| = \left|\tfrac{(C-B)\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\right| \|\mathbf{n}\| =$$
$$= \tfrac{|(C-B)\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|^2}\|\mathbf{n}\| = \tfrac{|(C-B)\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Odvodili jsme tak následující tvrzení:

Věta 2.3.3 *Buď α nadrovina v $\mathcal{E}$, C její libovolný bod a $\mathbf{n}$ některý její normálový vektor. Pak pro každý bod B z $\mathcal{E}$ platí:*

$$\rho(B, \alpha) = \frac{|(C - B) \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Zvolme nyní v $\mathcal{E}$ libovolnou kartézskou bázi a ukažme, že formule z věty 2.3.3 přejde ve vztah, který pro $n = 2, 3$ je čtenáři znám ze středoškolské matematiky.

Nechť v uvedené bázi zní obecná rovnice nadroviny α:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0,$$

takže pro normálový vektor platí (viz důsledek 2.2.19):

$$\mathbf{n} = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

Nechť $C = [c_1, c_2, \cdots, c_n]$ je bod α a $B = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$ libovolný bod z $\mathcal{E}$.
Pak

$$(C - B)\mathbf{n} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2, \cdots, c_n - b_n)(a_1, a_2, \cdots, a_n) =$$
$$= a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n - (b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n).$$

Protože $C \in \alpha$, jeho souřadnice vyhovují obecné rovnici, a tudíž

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = -a_0.$$

zjistili jsme, že $(C - B)\mathbf{n} = -(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) - a_0$.
Uvážíme-li vztah pro normu vektoru $\mathbf{n}$ v kartézské bázi, dostáváme:

Důsledek 2.3.4 *Buď α nadrovina v $\mathcal{E}$ daná v některé kartézské bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnicí $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$. Pak pro libovolný bod $B \in \mathcal{E}$, $B = [b_1, b_2, \cdots, b_n]_{\mathcal{B}}$, platí:*

$$\rho(B, \alpha) = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n + a_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2}}.$$

Nyní uvažujme libovolný podprostor $\mathcal{M} \subseteq\subseteq \mathcal{E}$ a některý bod $B \in \mathcal{E}$. Hledejme nyní formuli pro výpočet $\rho(B, \mathcal{M})$. K tomuto účelu využijeme řešení tohoto problému pro případ nadroviny. V případě, kdy $B \notin \mathcal{M}$, je totiž $\mathcal{M}$ nadrovinou v podprostoru $\mathcal{S} = \mathcal{M} + \{B\}$.[18] Definujeme-li zobrazení $\odot : V(\mathcal{S}) \times V(\mathcal{S}) \to \mathbb{R}$ relací

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V(\mathcal{S}) : \ \mathbf{u} \odot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

tj. jako restrikci skalárního součinu na $V(\mathcal{S}) \times V(\mathcal{S})$, je zřejmé, že $\odot$ je skalárním součinem na $V(\mathcal{S})$, a tudíž $\mathcal{S}$ je euklidovský prostor. Odlišovat typograficky skalární součin na $V(\mathcal{S})$ od součinu na $\mathbf{V}$ proto nemá smysl a nadále tak činit nebudeme. Totéž platí i pro pojmy pomocí skalárního součinu definované – zaregistrujme především Grammův determinant,[19] normu vektoru a *vzdálenost dvou bodů*.

[18] Skutečně - je-li $\mathcal{M} = \{C, V(\mathcal{M})\}$, pak $\mathcal{M} + \{B\} = \{C, V(\mathcal{M})\} + [B - C]$ a jelikož $B \notin \mathcal{M}$, vektor $B - C$ nenáleží $V(\mathcal{M})$, a tudíž:

$$\dim(\mathcal{M} + \{B\}) = \dim(V(\mathcal{M})\} + [B - C]) = \dim V(\mathcal{M}) + 1 = \dim \mathcal{M} + 1,$$

neboli

$$\dim \mathcal{M} = \dim(\mathcal{M} + \{B\}) - 1.$$

[19] Připomeňme, že jsou-li $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k \in \mathbf{V}_n$, pak *Grammovou maticí vektorů* $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ rozumíme matici $\mathcal{G}(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k) = (a_{ij})_{k \times k}$, kde

$$a_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j, \ 1 \le i, j \le k,$$

neboli

$$\mathcal{G}(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1, & \cdots, & \mathbf{a}_1\mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1, & \cdots, & \mathbf{a}_2\mathbf{a}_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_k\mathbf{a}_1, & \cdots, & \mathbf{a}_k\mathbf{a}_k \end{pmatrix}$$

Grammovým determinantem vektorů $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ pak rozumíme determinant této matice a značíme jej $G(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k)$.

Uveďme některé základní vlastnosti Grammova determinantu:
Pro libovolné $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k \in \mathbf{V}_n$ platí:

1. $G(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k) \ge 0$,
2. $G(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně závislé,
3. $\forall \pi \in S_k G(\mathbf{a}_{\pi(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{\pi(k)}) = G(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k)$.

Nechť $C \in \mathcal{M}$ a nechť $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k \rangle$ je báze zaměření $V(\mathcal{M})$. Pak za normálový vektor nadroviny $\mathcal{M}$ v $\mathcal{S}$ lze v souladu s poznámkou 2.2.21 vzít

$$\mathbf{n} = \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_k,$$

kde symbolem $\otimes$ značíme ortogonální násobení v $\mathcal{S}$.[20]

Pro vzdálenost $\rho(B, \mathcal{M})$ dle věty 2.3.3 můžeme psát:

$$\rho(B, \mathcal{M}) = \frac{|(C - B) \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}. \tag{2.11}$$

(i) norma $\|\mathbf{n}\|$:

$$\|\mathbf{n}\| = \|\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_k\| = \sqrt{G(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k)}$$

(ii) hodnota $|(C - B) \cdot \mathbf{n}|$[21]

$$(C - B) \cdot \mathbf{n} = (C - B)(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}_k) = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k, (C - B)],$$

a dále

$$|[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k, (C - B)]| = \sqrt{G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k, (C - B))},$$

[20] Ortogonální součin ve $V(\mathcal{S})$ však od ortogonálního součinu ve $\mathbf{V}$ rozlišovat musíme – ve $\mathbf{V}$ není ortogonální součin k vektorů při $k \neq n - 1$ definován.

[21] K odvození využijeme následujících vlastností vnějšího součinu vektorů a jeho souvislosti se součinem ortogonálním.

Připomeňme definici vnějšího součinu:
Buď dána *kladná ortonormální* báze prostoru $\mathbf{V}_n$. Jsou-li $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \in \mathbf{V}_n$, $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \cdots a_{in})$, $1 \leq i \leq n$, pak *vnějším součinem vektorů* $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ nazveme následující determinant:

$$[\mathbf{a}_1, \cdots \mathbf{a}_n] = \begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Důležité je, že *hodnota* vnějšího součinu nezávisí na volbě báze - hodnota výše uvedeného determinantu je táž ve všech kladných ortonormálních bázích (zkuste odvodit!). Pokud bychom přešli k záporné bázi (*změnili orientaci* vektorového prostoru), nabyl by vnější součin daných vektorů hodnoty *opačné*.

Pro souvislost vnějšího součinu a Grammova determinantu platí:

$$[\mathbf{a}_1, \cdots \mathbf{a}_n]^2 = G(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n).$$

Pro vztah mezi vnějším součinem a ortogonálním součinem platí:
Jsou-li $\mathbf{a}_1, \cdots \mathbf{a}_{n-1} \in \mathbf{V}_n$, pak $\mathbf{a}$ je roven $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$, právě když $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$ platí:

$$[\mathbf{a}_1, \cdots \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{x}] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}.$$

Připomeňme, že vnější součin vektorů v třírozměrném prostoru se nazývá *smíšený součin* a platí tedy:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

takže
$$|(C-B)\cdot \mathbf{n}| = \sqrt{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_k,(C-B))}.$$

Jak jsme již zdůraznili, je hodnota Grammova determinantu daných vektorů táž, ať již je uvažujeme jako elementy zaměření prostoru $\mathcal{S}$ (se skalárním součinem $\odot$) a nebo zaměření prostoru $\mathcal{E}$ (se skalárním součinem $\cdot$).

Dosazením (i) a (ii) do (2.11) dostáváme (jmenovatel zlomku je díky vlastnostem Grammova determinantu nenulový):

$$\rho(B,\mathcal{M}) = \sqrt{\frac{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_k,(C-B))}{G(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_k)}} \tag{2.12}$$

Předchozí úvaha byla provedena pro $B \notin \mathcal{M}$. Jestliže $B \in \mathcal{M}$, je jeho vzdálenost od $\mathcal{M}$ nulová. Uvážíme, že $B \in \mathcal{M}$, právě když $C - B$ náleží jeho zaměření, tedy jsou-li $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_k,(C-B)$ lineárně závislé. To znamená, že $B \in \mathcal{M}$ tehdy a jen tehdy, když je nulový $G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_k,(C-B))$ – i v případě $B \in \mathcal{M}$ vyjadřuje relace (2.12) vzdálenost B od $\mathcal{M}$.

Zjistili jsme, že následující tvrzení je platné:

Věta 2.3.5 *Buď $\mathcal{M} = \{C;\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_k\}$ podprostor v $\mathcal{E}$. Pak vzdálenost libovolného bodu B od podprostoru $\mathcal{M}$ je dána relací (2.12).*

Příklad 2.3.6 Určete vzdálenost bodu Q od podprostoru $\mathcal{M}$, je-li v kartézské soustavě souřadnic prostoru $\mathcal{E}_4$ dáno:

$$Q = [2,2,4,6],$$
$$\mathcal{M} = \{B;\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\},\ B = [1,2,3,4],\ \mathbf{u}_1 = (2,1,0,1),\ \mathbf{u}_2 = (1,1,1,1).$$

Řešení:
Vzdálenost vypočteme podle věty 2.3.5:

$$\rho(Q,\mathcal{M}) = \sqrt{\frac{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,(Q-B))}{G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)}}.$$

$$G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,(Q-B)) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1(Q-B) \\ \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1(Q-B) \\ \mathbf{u}_1(Q-B) & \mathbf{u}_2(Q-B) & (Q-B)(Q-B) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 16,$$

$$G(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8,$$

a tudíž
$$\rho(Q,\mathcal{M}) = \sqrt{\tfrac{16}{8}} = \sqrt{2}.$$

Porovnejme tento výsledek se vzdáleností zjištěnou dle definice 2.3.2. V příkladu 2.2.9 jsme zjistili, že kolmý průmět bodu Q je roven $Q^* = [2, 3, 4, 5]$. Můžeme proto psát:

$$\rho(Q, \mathcal{M}) = \rho(Q, Q^*) = \|Q^* - Q\| = \|(0, 1, 0, 1)\| = \sqrt{2},$$

což je přirozeně výsledek shodný jako výše.

2.3.2 Vzdálenost rovnoběžných podprostorů euklidovského prostoru

Vzhledem ke způsobu zavedení vzdálenosti bodu od podprostoru euklidovského prostoru očekáváme intuitivně platnost následujícího tvrzení:[22]

Věta 2.3.7 *Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{E}$ a nechť $\mathcal{M} \parallel \mathcal{N}$. Pak pro každé body $B, C \in \mathcal{M}$ platí:*

$$\rho(B, \mathcal{N}) = \rho(C, \mathcal{N}).$$

Důkaz: Položíme-li $\mathbf{u} = C - B$, pak $\mathbf{u} \in V(\mathcal{M})$, a jelikož $\mathcal{M} \parallel \mathcal{N}$, tak $\mathbf{u} \in V(\mathcal{N})$. Sestrojme kolmé průměty B^*, C^* do podprostoru $\mathcal{N}$ a zkoumejme bod

$$M = B^* + \mathbf{u}$$

s cílem ukázat, že $M = C^*$.
Pro vektor $M - C$ můžeme psát:

$$M - C = (M - B^*) + (B^* - C) = \mathbf{u} + (B^* - C) = (C - B) + (B^* - C) = B^* - B, \quad (2.13)$$

což značí, že $M - C \perp \mathcal{N}$, a proto přímka $\overleftrightarrow{MC}$ má (neboť $M \in \mathcal{N}$ – viz věta 2.2.8) s $\mathcal{N}$ jediný společný bod, kterým je C^*, a tudíž $M = C^*$, následkem čehož z (2.13) plyne:

$$C^* - C = B^* - B,$$

a tedy pro vzdálenost B, C od $\mathcal{N}$ dostáváme (viz definice 2.3.2):

$$\rho(B, \mathcal{N}) = \rho(B, B^*) = \|B^* - B\| = \|C^* - C\| = \rho(C, C^*) = \rho(C, \mathcal{N}).$$

□

Věta, kterou jsme právě dokázali, zaručuje korektnost následující definice:

Definice 2.3.8 Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{E}$ a nechť $\mathcal{M} \parallel \mathcal{N}$. Pak *vzdáleností podprostoru $\mathcal{M}$ od podprostoru $\mathcal{N}$* rozumíme vzdálenost libovolného bodu z $\mathcal{M}$ od podprostoru $\mathcal{N}$ a značíme ji $\rho(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

[22] V uvedeném tvrzení je důležité, že $\mathcal{M}$ je rovnoběžné s $\mathcal{N}$, nikoli naopak – uvažte např. přímku a rovinu - zjišťujeme-li vzdálenost bodů roviny od přímky, tvrzení neplatí.

K výpočtu vzdálenosti rovnoběžných podprostorů (pozor na pořadí!) užíváme vztahů pro vzdálenost bodu od podprostoru z předešlého odstavce.

Speciálně pro rovnoběžné nadroviny odvodíme vztah, který je pro $n = 2, 3$ čtenáři znám ze střední školy:

Věta 2.3.9 *Buďte $\alpha, \beta \subset \mathcal{E}$ rovnoběžné nadroviny dané v některé kartézské bázi obecnými rovnicemi*

$$\alpha : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0,$$

$$\beta : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b_0 = 0,$$

pak platí:

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|b_0 - a_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

Důkaz: Předně pro normálové vektory $\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta$ daných nadrovin platí:

$$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow V(\alpha) = V(\beta) \Leftrightarrow V(\alpha)^\perp = V(\beta)^\perp \Leftrightarrow [\mathbf{n}_\alpha] = [\mathbf{n}_\beta] \Leftrightarrow \mathbf{n}_\alpha = t\mathbf{n}_\beta, t \neq 0,$$

což znamená, že je možné vybrat $\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta$ tak, že $\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{n}_\beta = \mathbf{n}$, a tudíž lze bez újmy na obecnosti určit libovolné rovnoběžné nadroviny obecnými rovnicemi tvaru uvedeného v dokazované větě.

Nyní zvolme libovolně $Y \in \alpha$, $Y = [y_1, \cdots, y_n]$.
Pak dle definice 2.3.8 a důsledku 2.3.4 obdržíme:

$$\rho(\alpha, \beta) = \rho(Y, \beta) = \frac{|a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n + b_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}},$$

a jelikož $Y \in \alpha$, je $a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n = -a_0$, odkud již bezprostředně plyne dokazované tvrzení. □

2.3.3 Vzdálenost mimoběžných podprostorů euklidovského prostoru

V souladu s naší intuitivní představou budeme zkoumat existenci takové dvojice bodů v daných mimoběžných podprostorech, jejichž spojnice je na oba kolmá, a jejich vzdálenost následně porovnáme se vzdáleností jakékoli další dvojice bodů z uvedených podprostorů.

Definice 2.3.10 Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{E}$ mimoběžné podprostory. Pak každá jejich příčka kolmá na oba podprostory se nazývá *osa mimoběžných podprostorů* $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$.

Uvažujme mimoběžné podprostory $\mathcal{M} = \{B, \mathbf{U}\}$, $\mathcal{N} = \{C, \mathbf{W}\}$. Najít jejich osu znamená najít příčku o, jejíž směrový vektor s bude kolmý na $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, tj. pro nějž platí:

$$\mathbf{s} \perp \mathcal{M} \wedge \mathbf{s} \perp \mathcal{N} \Leftrightarrow \mathbf{s} \perp \mathbf{U} \wedge \mathbf{s} \perp \mathbf{W} \Leftrightarrow \mathbf{s} \in (\mathbf{U}^\perp \cap \mathbf{W}^\perp) = (\mathbf{U} + \mathbf{W})^\perp. \tag{2.14}$$

Z těchto vektorů vybereme ty, pro něž v souladu s větou 1.4.24 příčka existuje, tedy vektory $\mathbf{s}$ splňující

(i) $\mathbf{s} \in (\mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B])$,

(ii) $\mathbf{s} \notin (\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

Vzhledem ke skutečnosti $\mathbf{V} = (\mathbf{U}+\mathbf{W}) \oplus (\mathbf{U}+\mathbf{W})^{\perp}$ splňuje každý vektor $\mathbf{s}$ vyhovující (2.14) podmínku (ii) automaticky a nutnou a postačující podmínkou existence osy podprostorů $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ směru $[\mathbf{s}]$ tedy je:

$$\mathbf{s} \in ((\mathbf{U} + \mathbf{W})^{\perp} \cap (\mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B])). \tag{2.15}$$

Kolik je směrů, jejichž generátor splňuje (2.15)?
Podle Grasmannova vztahu můžeme psát:

$$\dim((\mathbf{U} + \mathbf{W})^{\perp} \cap (\mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B])) =$$
$$\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})^{\perp} + \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B]) - \dim((\mathbf{U} + \mathbf{W})^{\perp} + (\mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B])).$$

Pro jednotlivé dimenze platí:

- $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ jsou mimoběžné, tj. $C - B \notin \mathbf{U} + \mathbf{W}$ (věta 1.4.17), a tudíž:

$$\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B]) = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + 1,$$

- $(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + (\mathbf{U} + \mathbf{W})^{\perp} = \mathbf{V}$, $(\mathbf{U} + \mathbf{W}) \subset (\mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B])$, takže $(\mathbf{U} + \mathbf{W})^{\perp} + (\mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B]) = \mathbf{V}$, tj.

$$\dim((\mathbf{U} + \mathbf{W})^{\perp} + (\mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B])) = n,$$

- $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})^{\perp} = n - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W})$.

Vzhledem k právě uvedenému lze psát:

$$\dim((\mathbf{U} + \mathbf{W})^{\perp} \cap (\mathbf{U} + \mathbf{W} + [C - B])) = n - \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) + 1 - n = 1,$$

což znamená, že podmínce (2.15) vyhovuje *právě jeden* směr $[\mathbf{s}]$.

Zjištěné poznatky formulujeme jakožto následující větu. Její odstavce 2, 3 vyplývají z věty 1.4.24 (odstavec 3 lze odvodit i z 2 a věty 2.3.7).

Věta 2.3.11 *Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ libovolné mimoběžné podprostory v $\mathcal{E}$. Pak platí:*

1. *každá osa mimoběžných podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ má směr $[\mathbf{s}]$ daný podmínkou:*

$$[\mathbf{s}] = ((V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N}))^{\perp} \cap (V(\mathcal{M}) + V(\mathcal{N}) + [C - B])),$$

kde B, C jsou libovolné body po řadě z $\mathcal{M}, \mathcal{N}$;

2. *jestliže $V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N}) = \{\mathbf{o}\}$, existuje právě jedna osa podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$. V případě, kdy $V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N}) \neq \{\mathbf{o}\}$, je těchto os nekonečně mnoho a jejich průsečíky s $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ vyplňují navzájem rovnoběžné podprostory o zaměření $V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N})$;*

3. *jsou-li $o^{(1)}, o^{(2)}$ dvě osy daných podprostorů a označíme-li $P^{(1)}, Q^{(1)}$, resp. $P^{(2)}, Q^{(2)}$, průsečíky osy $o^{(1)}$, resp. $o^{(2)}$, po řadě s $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$, platí:*

$$\rho(P^{(1)}, Q^{(1)}) = \rho(P^{(2)}, Q^{(2)}).$$

Výjdeme-li z poznámky v úvodu tohoto odstavce, je přirozené definovat vzdálenost dvou mimoběžných podprostorů způsobem následujícím.

Definice 2.3.12 Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ mimoběžné podprostory v $\mathcal{E}$, o jejich libovolná osa, P a Q její průsečíky po řadě s $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$. Pak *vzdáleností podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$* rozumíme číslo označované $\rho(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ a definované takto:

$$\rho(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \rho(P, Q).$$

Korektnost tohoto přístupu v případě existence společných směrů daných podprostorů (a tím nekonečného počtu os) plyne z odstavce 3 věty 2.3.11.

Je tato definice specializací obecné definice vzdálenosti dvou podmnožin $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ metrického prostoru definované následující relací?

$$\rho(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \inf_{\substack{X \in \mathcal{M} \\ Y \in \mathcal{N}}} \{\rho(X, Y)\}.$$

Tuto otázku nyní zodpovíme.

Uvažujme opět mimoběžné podprostory $\mathcal{M} = \{B, \mathbf{U}\}, \mathcal{N} = \{C, \mathbf{W}\}$. Zvolme libovolně $R \in \mathcal{M}$, $S \in \mathcal{N}$ tak, aby $\overleftrightarrow{RS}$ nebyla osou těchto podprostorů.
Buď dále o některá osa daných podprostorů, P, Q její průsečíky po řadě s $\mathcal{M}, \mathcal{N}$. Pak:

$$R - S = (R - P) + (P - Q) + (Q - S),$$

odkud skalárním vynásobením obou stran vektorem $(P - Q)$ plyne:

$$(P - Q)(R - S) = (P - Q)(R - P) + (P - Q)(P - Q) + (P - Q)(Q - S),$$

což vzhledem k tomu, že $R - P \in \mathbf{U}$, $Q - S \in \mathbf{W}$ a $P - Q \in \mathbf{U}^\perp \cap \mathbf{W}^\perp$ (proč?), přejde ve tvar:

$$(P - Q)(R - S) = (P - Q)(P - Q),$$

který lze, označíme-li $\varphi = \measuredangle(P - Q, R - S)$, dále psát:

$$\|P - Q\| \cdot \|R - S\| \cos\varphi = \|P - Q\|^2,$$

neboli $(P \neq Q)$

$$\rho(R, S)\cos\varphi = \rho(P, Q). \tag{2.16}$$

Vzhledem k tomu, že $\overleftrightarrow{RS}$ není osa, nejsou vektory $P - Q$ a $R - S$ kolineární, a tedy $\varphi \notin \{0, \pi\}$,[23] dále $\rho(P, Q), \rho(R, S) > 0$, takže $0 \leq \cos\varphi < 1$. Z relace (2.16) tak plyne:

$$\rho(R, S) > \rho(P, Q),$$

což formuluje následující tvrzení (s ohledem na definici 2.3.12):

Věta 2.3.13 *Buďte $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ mimoběžné podprostory v $\mathcal{E}$. Pak pro libovolné body R, S náležící po řadě $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ takové, že $\overleftrightarrow{RS}$ není osou daných mimoběžných podprostorů, platí:*

$$\rho(R, S) > \rho(\mathcal{M}, \mathcal{N}).$$

Z věty 2.3.13 vyplývá, že definice 2.3.12 je konzistentní s obecnější definicí teorie metrických prostorů.

Příklad 2.3.14 V prostoru $\mathcal{E}_4$ je dána rovina $\alpha = \{B; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, přímka $p = \{C; \mathbf{w}\}$, přičemž ve zvolené kartézské soustavě souřadnic platí:

$$B = [1, 2, 3, 4],\ \mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 0),\ \mathbf{u}_2 = (0, 0, 0, 1),$$
$$C = [5, 3, 2, 4],\ \mathbf{w} = (1, -1, 0, 0).$$

[23] Podrobněji: Uvažujme nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ (což zde platí).

Výjděme z vlastností Grammova determinantu: $G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, právě když $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé, tj. v tomto případě $\exists t \in \mathbb{R}, t \neq 0 :\ \mathbf{v} = t\mathbf{u}$.

Na druhé straně:

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{uu})(\mathbf{vv}) - (\mathbf{uv})^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^2 =$$
$$\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1 - \cos^2\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})),$$

takže $G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, právě když $\cos^2\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1$, neboli $\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \{0, \pi\}$.

Celkem jsme tedy ukázali, že $\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \{0, \pi\}$, právě když jsou $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ kolineární.

Určete vzdálenost $\rho(p, \alpha)$.
Řešení:
Známým způsobem zjistíme, že p, α jsou mimoběžné.
Užitím věty 2.3.11 nalezneme směrový vektor $[\mathbf{s}]$ osy mimoběžných podprostorů p, α:

$$[\mathbf{s}] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}]^{\perp} \cap [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}, C - B].$$

V našem případě je ovšem dimenze podprostoru $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}, C - B]$ rovna čtyřem, tj. tento vektorový podprostor je roven zaměření $V(\mathcal{E}_4)$, a proto

$$[\mathbf{s}] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}]^{\perp}.$$

Tento ortogonální doplněk nalezneme vyřešením soustavy rovnic plynoucí z následující podmínky

$$\mathbf{x}\mathbf{u}_1 = 0 \wedge \mathbf{x}\mathbf{u}_2 = 0 \wedge \mathbf{x}\mathbf{w} = 0$$

obdržíme

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}]^{\perp} = [(1, 1, -1, 0)],$$

takže za směrový vektor osy lze vzít $\mathbf{s} = (1, 1, -1, 0)$.

Nyní bychom mohli nalézt osu uvedených podprostorů, jakožto jejich příčku mající směr $[\mathbf{s}]$ – viz podkapitola 1.4. Zjistili bychom, že $o = \overleftrightarrow{PQ}$, kde $P = [4, 4, 2, 4], Q = [2, 2, 4, 2]$ jsou průsečíky osy o po řadě s p a α, takže dostáváme (srv. definice 2.3.12):

$$\rho(p, \alpha) = \rho(P, Q) = \|(2, 2, -2, 0)\| = 2\sqrt{3}.$$

Vzdálenost zkoumaných podprostorů lze zjistit i jinak
Patrně nadrovina ν_1 určená bodem C a normálovým vektorem $\mathbf{s}$ obsahuje přímku p[24], a dále nadrovina ν_2 určená bodem B a opět normálovým vektorem $\mathbf{s}$ obsahuje rovinu α. S těmito podprostory obsahují uvedené nadroviny i průsečíky osy s těmito podprostory a proto:

$$\rho(p, \alpha) = \rho(\nu_1, \nu_2).$$

Nadroviny ν_1, ν_2 jsou rovnoběžné, a proto $\rho(\nu_1, \nu_2) = \rho(C, \nu_2)$ (srv. definice 2.3.8) a díky větě 2.3.3 konečně platí:

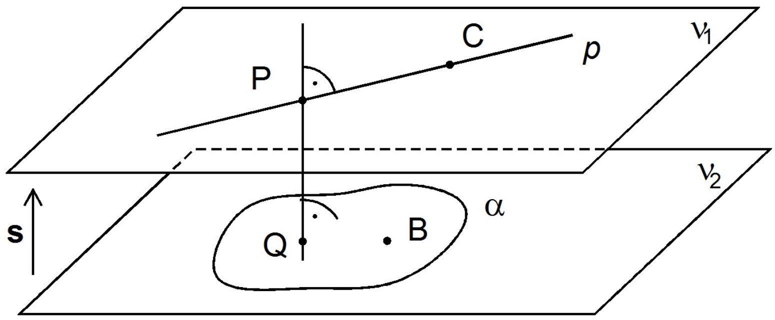
$$\rho(p, \alpha) = \frac{|(C - B) \cdot \mathbf{s}|}{\|\mathbf{s}\|},$$

to v našem případě značí:

$$\rho(p, \alpha) = \frac{|(4, 1, -1, 0)(1, 1, -1, 0)|}{\|(1, 1, -1, 0)\|} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

což je ovšem v souladu s předchozím postupem. Situaci znázorňuje obrázek 2.3.1.

[24] $X \in p \Rightarrow X - C \in [\mathbf{w}] \Rightarrow X - C \perp \mathbf{s}$ (neboť $\mathbf{s} \perp \mathbf{w}$) $\Rightarrow X \in \nu_1$.



Obr. 2.3.1

Uveďme ještě další možnost výpočtu, kde nebude nutno nalézt ani směr osy. Je zřejmé, že zkonstruujeme-li podprostor $\overline{\alpha}$:

$$\overline{\alpha} = \{B; V(\alpha) + V(p)\},$$

platí pro něj:

$$\alpha \subseteq \overline{\alpha} \wedge p \parallel \overline{\alpha}.$$

To ovšem značí, že průsečík osy o a α leží v $\overline{\alpha}$, a tedy

$$\rho(p, \alpha) = \rho(p, \overline{\alpha}) = \rho(C, \overline{\alpha}))$$

a k výpočtu $\rho(C, \overline{\alpha})$ užijeme relace (2.12).

2.4 Odchylka podprostorů euklidovského prostoru

V této podkapitole si všimneme pouze odchylky přímky či nadroviny od podprostoru libovolné dimenze a odchylky dvou nadrovin. Odchylkami podprostorů jiných dimenzí se zabývat nebudeme.[25]

[25]Zabývat se tedy budeme – s ohledem na určení textu – odchylkami podprostorů objevujících se ve školské matematice a v technické praxi.

Definici odchylky podprostorů obecné dimenze uvádíme jen pro úplnost: Jsou-li $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq\subseteq \mathcal{E}$, pak *jejich odchylkou* rozumíme číslo označované $\measuredangle(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ a definované takto:

(i) jestliže $V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N}) = \{\mathbf{o}\}$:

$$\measuredangle(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \inf_{\substack{\mathbf{x} \in V(\mathcal{M}) \\ \mathbf{y} \in V(\mathcal{N}) \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{o}}} \{\measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$$

(ii) jestliže $V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N}) \neq \{\mathbf{o}\}$, $\mathcal{M} \not\parallel \mathcal{M}, \mathcal{N} \not\parallel \mathcal{M}$:

Definice 2.4.1 Buďte p, q přímky euklidovského prostoru $\mathcal{E}$. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou libovolné směrové vektory po řadě přímek p, q. Pak *odchylkou přímek* p *a* q rozumíme číslo označované $\measuredangle(p, q) \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$ a definované takto:

$$\measuredangle(p, q) = \arccos \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}.$$

Poznámka 2.4.2

- Pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ existuje $\varphi \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$ tak, že $\cos \varphi = x$, tudíž ke každé dvojici přímek lze přiřadit úhel z intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$.
- Z vlastností normy reálného násobku vektoru a vlastností skalárního součinu bezprostředně plyne, že odchylka přímek nezávisí na výběru jejich směrových vektorů – definice je i v tomto ohledu korektní (ověřte!).
- Uvědomme si rozdíl mezi odchylkou směrových vektorů,[26] která je v rozmezí $\langle 0, \pi \rangle$ a odchylkou přímek, která je definována jako úhel ostrý nebo pravý.

Nyní přirozeným způsobem zavedeme odchylku přímky od podprostoru euklidovského prostoru.

Definice 2.4.3 Buďte p přímka a $\mathcal{M}$ podprostor v $\mathcal{E}$. Pak odchylkou přímky p od podprostoru $\mathcal{M}$ rozumíme číslo označované $\measuredangle(p, \mathcal{M})$ a definované takto:

1. Je-li $p \perp \mathcal{M}$, klademe $\measuredangle(p, \mathcal{M}) = \frac{1}{2}\pi$,
2. Není-li $p \perp \mathcal{M}$, klademe $\measuredangle(p, \mathcal{M}) = \measuredangle(p, p^*)$.

$$\measuredangle(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \inf_{\substack{\mathbf{x} \in V(\mathcal{M}) \cap (V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N}))^{\perp} \\ \mathbf{y} \in V(\mathcal{N}) \cap (V(\mathcal{M}) \cap V(\mathcal{N}))^{\perp} \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{o}}} \{\measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$$

(iii) jestliže $\mathcal{M} \parallel \mathcal{M}$ nebo $\mathcal{N} \parallel \mathcal{M}$: $\measuredangle(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$.

Úkolem pro čtenáře je ověřit, zda námi probírané speciální případy odchylek jsou s touto obecnou definicí v souladu.

[26] Tj. číslem $\arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}$.

Poznámka 2.4.4

- Z definice plyne, že $\measuredangle(p, \mathcal{M}) \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\pi \right\rangle$.
- Je-li $\mathcal{M}$ přímkou, je definice 2.4.3 v souladu s definicí 2.4.1? Podle věty 2.2.11 je kolmým průmětem p, která není na $\mathcal{M}$ kolmá, přímka, tedy v tomto případě je $p^* = \mathcal{M}$ a definice 2.4.1 a 2.4.3 jsou v souladu. V případě $p \perp \mathcal{M}$ je průmětem jednobodová množina – ani zde kolize nenastává.

Jaké hodnoty nabývá odchylka přímky od podprostoru s nímž je rovnoběžná? Na základě názoru očekáváme platnost následujícího tvrzení:

Věta 2.4.5 *Buďte p přímka a $\mathcal{M}$ podprostor v $\mathcal{E}$. Pak platí, že přímka p je rovnoběžná s podprostorem $\mathcal{M}$, právě když $\measuredangle(p, \mathcal{M}) = 0$.*

Důkaz: Obě strany ekvivalence zřejmě vylučují případ $p \perp \mathcal{M}$ – p^* je tedy přímkou.

Označme $\mathbf{s}$ směrový vektor přímky p a $\mathbf{s}^*$ jejího kolmého průmětu do $\mathcal{M}$.

Jestliže $\mathbf{s} \in V(\mathcal{M})$, náleží i průniku $(V(\mathcal{M})^\perp + [\mathbf{s}]) \cap V(\mathcal{M})$, což je zaměření přímky p^* (viz věta 2.2.11), a tudíž $\exists t \in \mathbb{R}, t \neq 0 : \ \mathbf{s} = t\mathbf{s}^*$.
Obráceně, jestliže $\exists t \in \mathbb{R}, t \neq 0 : \ \mathbf{s} = t\mathbf{s}^*$, pak evidentně $\mathbf{s} \in V(\mathcal{M})$.

Zjistili jsme tedy, že platí:

$$\exists t \in \mathbb{R}, t \neq 0 : \ \mathbf{s} = t\mathbf{s}^* \Leftrightarrow \mathbf{s} \in V(\mathcal{M}) \Leftrightarrow p \parallel \mathcal{M}. \tag{2.17}$$

Na druhé straně zřejmě platí (viz definice 2.4.1, 2.4.3):

$$\measuredangle(p, \mathcal{M}) = 0 \Leftrightarrow \measuredangle(\mathbf{s}, \mathbf{s}^*) \in \{0, \pi\}. \tag{2.18}$$

V důkaze věty 2.3.13 jsme ukázali, že kolinearita nenulových vektorů je ekvivalentní tomu, že jejich odchylka je 0 nebo π. Užitím tohoto faktu dostáváme z (2.17), (2.18), že $p \parallel \mathcal{M}$, právě když $\measuredangle(p, \mathcal{M}) = 0$. $\square$

Jsou-li na přímce p dány dva body, je užitečné znát vztah mezi jejich vzdáleností (*skutečná délka úsečky*) a vzdáleností jejich kolmých průmětů (*délka průmětu úsečky*) v závislosti na odchylce přímky od daného podprostoru.

Nechť je v $\mathcal{E}$ dána přímka p a podprostor $\mathcal{M}$. Zvolme na přímce p libovolně dva body P, Q. Rozlišme tři případy:

(i) $P = Q$;

(ii) $P \neq Q, p \perp \mathcal{M}$;

(iii) $P \neq Q, \neg(p \perp \mathcal{M})$.

V případě (i) je $P^* = Q^*$, tudíž $\rho(P,Q) = \rho(P^*,Q^*) = 0$.
V případě (ii) je dle věty 2.2.11 $P^* = Q^*$, tj. $\rho(P,Q) \neq \rho(P^*,Q^*) = 0$. Dále $\measuredangle(p,\mathcal{M}) = \frac{1}{2}\pi$.
Věnujme se nyní případu (iii):
Pro vektor $Q - P$ lze psát:

$$Q - P = (Q - Q^*) + (Q^* - P^*) + (P^* - P).$$

Uvážíme-li, že $Q-P$ je směrovým vektorem p a Q^*-P^* směrovým vektorem jejího průmětu p^*, pro odchylku $\measuredangle(p,\mathcal{M})$ platí:

$$\cos\measuredangle(p,\mathcal{M}) = \cos\measuredangle(p,p^*) = \frac{|(Q-P)(Q^*-P^*)|}{\|Q-P\|\,\|Q^*-P^*\|} =$$

$$= \frac{|((Q-Q^*)+(Q^*-P^*)+(P^*-P))(Q^*-P^*)|}{\|Q-P\|\,\|Q^*-P^*\|} =$$

$$= \frac{|(Q-Q^*)(Q^*-P^*)+(Q^*-P^*)(Q^*-P^*)+(P^*-P)(Q^*-P^*)|}{\|Q-P\|\,\|Q^*-P^*\|} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{|(Q^*-P^*)(Q^*-P^*)|}{\|Q-P\|\,\|Q^*-P^*\|} = \frac{\|Q^*-P^*\|^2}{\|Q-P\|\,\|Q^*-P^*\|} = \frac{\rho(P^*,Q^*)}{\rho(P,Q)},$$

kde jsme v rovnosti (*) využili faktu, že $Q - Q^*$, $P - P^*$ jsou kolmé na podprostor $\mathcal{M}$.
Všechny tři případy jsou pokryty následující větou.

Věta 2.4.6 *Buďte p přímka a $\mathcal{M}$ podprostor v $\mathcal{E}$. Pak pro libovolné body P, Q přímky p a jejich kolmé průměty do podprostoru $\mathcal{M}$ platí:*

$$\rho(P^*,Q^*) = \rho(P,Q)\cos\measuredangle(p,\mathcal{M}).$$

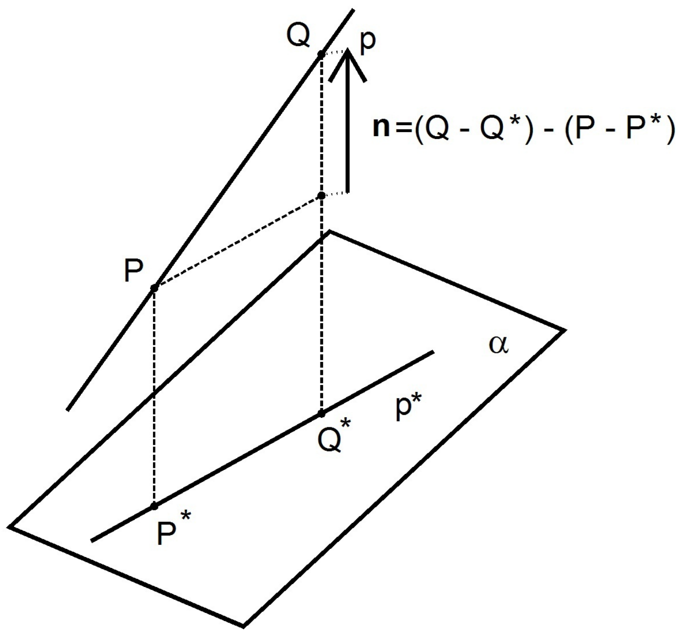
Uvažujme nyní v $\mathcal{E}$ přímku p a nadrovinu α. Nelze z odchylky směrového vektoru přímky p a normálového vektoru nadroviny α určit odchylku přímky od nadroviny? Odpověď je následující:

Věta 2.4.7 *Buďte p přímka a α nadrovina v $\mathcal{E}$. Je-li $\mathbf{n}$ libovolný normálový vektor nadroviny α a $\mathbf{s}$ libovolný směrový vektor přímky p, pak platí:*

$$\measuredangle(p,\alpha) = \arcsin\frac{|\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{s}\|\,\|\mathbf{n}\|}.$$

Důkaz: V případě, kdy $p \parallel \alpha$, je $\measuredangle(p,\alpha) = 0$ a věta platí (proč?). Nechť dále $p \nparallel \alpha$.

Zvolme na přímce p libovolně dva různé body P, Q. Spočtěme odchylku přímky p od některé normály n nadroviny α – směr přímky n je určen např. vektorem $(Q - Q^*) - (P - P^*) = \mathbf{n}$ ($p \nparallel \alpha$ a tudíž $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$). Směr přímky p určuje např. vektor $Q - P$.



Obr. 2.4.1

Pro vektor $Q - P$ lze psát:

$$Q - P = (Q - Q^*) + (Q^* - P^*) + (P^* - P) = \mathbf{n} + (Q^* - P^*), \tag{2.19}$$

tudíž pro odchylku $\measuredangle(p, n)$ dostáváme:

$$\cos\measuredangle(p,n) = \frac{|(Q-P)\cdot\mathbf{n}|}{\|Q-P\|\|\mathbf{n}\|} = \frac{|(\mathbf{n}+(Q^*-P))\cdot\mathbf{n}|}{\|Q-P\|\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}+(Q^*-P^*)\cdot\mathbf{n}|}{\|Q-P\|\|\mathbf{n}\|} \stackrel{(*)}{=}$$
$$= \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}|}{\|Q-P\|\|\mathbf{n}\|} = \frac{\|\mathbf{n}\|^2}{\|Q-P\|\|\mathbf{n}\|} = \frac{\|\mathbf{n}\|}{\|Q-P\|},$$

tj.

$$\cos\measuredangle(p,n) = \frac{\|\mathbf{n}\|}{\rho(P,Q)}, \tag{2.20}$$

kde jsme v rovnosti (*) využili faktu $Q^* - P^* \in V(\alpha)$ a $\mathbf{n} \perp V(\alpha)$.

Nyní zkoumejme sinus odchylky $\measuredangle(p, \alpha)$, což je číslo nezáporné (proč?), a lze tudíž psát:

$$\sin\measuredangle(p,\alpha) = \sqrt{1-\cos^2\measuredangle(p,\alpha)} \stackrel{(a)}{=} \sqrt{1-\frac{\rho^2(P^*,Q^*)}{\rho^2(P,Q)}} =$$
$$= \sqrt{\frac{\rho^2(P,Q)-\rho^2(P^*,Q^*)}{\rho^2(P,Q)}} = \sqrt{\frac{\|Q-P\|^2-\|Q^*-P^*\|}{\rho^2(P,Q)}} =$$
$$= \sqrt{\frac{(Q-P)(Q-P)-(Q^*-P^*)(Q*-P^*)}{\rho^2(P,Q)}} \stackrel{(b)}{=} \sqrt{\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{\rho^2(P,Q)}},$$

tj.

$$\sin\measuredangle(p,\alpha) = \frac{\|\mathbf{n}\|}{\rho(P,Q)}, \tag{2.21}$$

kde jsme v rovnosti (a) užili větu 2.4.6 a v rovnosti (b) následující úpravy plynoucí z (2.19):

$$\begin{aligned}(Q-P)(Q-P) &= (\mathbf{n}+(Q^*-P^*))(\mathbf{n}+(Q^*-P^*)) = \\ &= \mathbf{n}^2+2\mathbf{n}(Q^*-P^*)+(Q^*-P^*)(Q^*-P^*) = \\ &= \mathbf{n}^2+(Q^*-P^*)(Q^*-P^*).\end{aligned}$$

Z rovností (2.20) a (2.21) vyplývá dokazované tvrzení. □

Zabývejme se nyní odchylkou přímky od *podprostoru libovolné dimenze*. Pokusme se pro stanovení této odchylky využít větu 2.3.5 umožňující zjistit vzdálenost bodu od takového podprostoru.

Nechť je tedy dán podprostoru $\mathcal{M}$ a přímka p, která na něj není kolmá. Zvolme na přímce p dva různé body P, Q. Uvažujme nyní podprostor $\mathcal{M}' = \{P; V(\mathcal{M})\}$. Je zřejmé, že podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ jsou rovnoběžnými podprostory téže dimenze a vzhledem k větě 2.2.14 proto platí:

$$\measuredangle(p, \mathcal{M}) = \measuredangle(p, \mathcal{M}'). \tag{2.22}$$

Sestrojme nyní kolmé průměty P^*, Q^* po řadě bodů P, Q do podprostoru $\mathcal{M}'$ (zřejmě $P^* = P$). V souladu s větou 2.4.6 obdržíme:

$$\cos\measuredangle(p, \mathcal{M}') = \frac{\rho(P^*, Q^*)}{\rho(P, Q)}.$$

Můžeme tedy psát:

$$\sin^2\measuredangle(p, \mathcal{M}') = 1-\cos^2\measuredangle(p, \mathcal{M}') = 1-\frac{\rho(P^*,Q^*)^2}{\rho(P,Q)^2} = \frac{\rho(P,Q)^2-\rho(P^*,Q^*)^2}{\rho(P,Q)^2} = \frac{\rho(P,Q)^2-\rho(P,Q^*)^2}{\rho(P,Q)^2}.$$

Přepíšeme-li relaci (2.7) pro body P, Q, Q^*, máme $\rho(P, Q)^2 - \rho(P, Q^*)^2 = \rho(Q, Q^*)^2$, a tudíž pro odchylku $\measuredangle(p, \mathcal{M}')$ dostáváme:

$$\sin^2\measuredangle(p, \mathcal{M}') = \frac{\rho(Q, Q^*)^2}{\rho(P, Q)^2},$$

čili

$$\sin\measuredangle(p, \mathcal{M}') = \frac{\rho(Q, Q^*)}{\rho(P, Q)} = \frac{\rho(Q, \mathcal{M}')}{\rho(P, Q)}. \tag{2.23}$$

Označme $\langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\rangle$ elementy báze zaměření podprostoru $\mathcal{M}'$ (tj. i $\mathcal{M}$) a položme $\mathbf{s} = Q - P$. Pak s využitím relace (2.12) z věty 2.3.5 a vztahu (2.22) dostáváme z (2.23) hledanou formuli pro odchylku přímky p od podprostoru $\mathcal{M}$:

$$\measuredangle(p, \mathcal{M}) = \arcsin\frac{\sqrt{G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k, \mathbf{s}))}}{\|\mathbf{s}\|\sqrt{G(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k)}}. \tag{2.24}$$

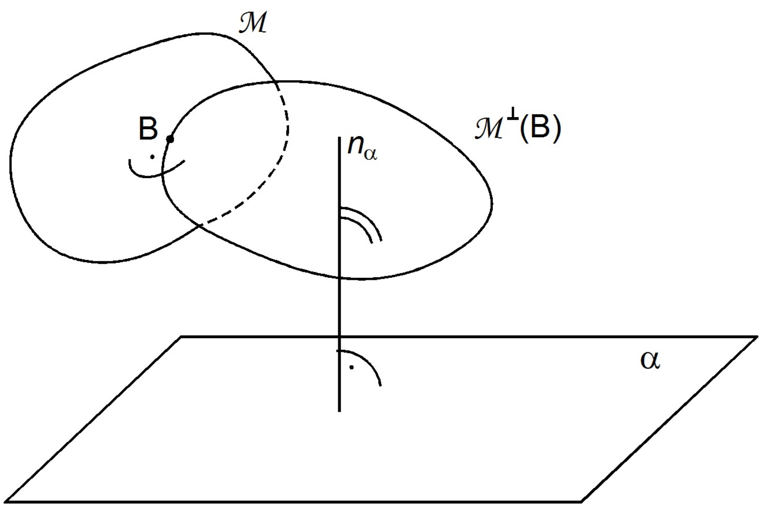
Odvodili jsme tak platnost následující věty:

Věta 2.4.8 *Buďte p přímka a $\mathcal{M}$ podprostor v $\mathcal{E}$. Je-li $\mathbf{s}$ směrový vektor přímky p a $\langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k\rangle$ báze zaměření podprostoru $\mathcal{M}$, pak odchylka $\measuredangle(p, \mathcal{M})$ je dána relací (2.24).*

Definujme nyní odchylku nadroviny od podprostoru libovolné dimenze.

Definice 2.4.9 Buď α nadrovina v $\mathcal{E}$, n_α její libovolná normála. Nechť dále $\mathcal{M}$ je podprostor v $\mathcal{E}$ a B jeho libovolný bod. Pak *odchylkou podprostoru $\mathcal{M}$ od nadroviny α* rozumíme číslo označované $\measuredangle(\mathcal{M},\alpha)$a definované takto:

$$\measuredangle(\mathcal{M},\alpha) = \measuredangle(n_\alpha, \mathcal{M}^\perp(B)).$$



Obr. 2.4.2

Poznámka 2.4.10 Je třeba prozkoumat závislost odchylky $\measuredangle(\mathcal{M},\alpha)$ na výběru bodu $B \in \mathcal{M}$.
Jsou-li B, C dva různé body, jsou $\mathcal{M}^\perp(B), \mathcal{M}^\perp(C)$ zřejmě dva rovnoběžné podprostory téže dimenze, a tudíž kolmý průmět přímky n_α do $\mathcal{M}^\perp(B)$ je dle věty 2.2.14 rovnoběžný s kolmým průmětem n_α do $\mathcal{M}^\perp(C)$, odkud bezprostředně vyplývá, že $\measuredangle(n_\alpha, \mathcal{M}^\perp(B)) = \measuredangle(n_\alpha, \mathcal{M}^\perp(C))$, což znamená, že *odchylka $\measuredangle(\mathcal{M},\alpha)$ nezávisí na výběru bodu B v definici 2.4.9, a tato definice je proto v tomto ohledu korektní.*

Poznámka 2.4.11 V případě, kdy $\mathcal{M}$ je přímka, je již její odchylka od podprostoru zavedena definicí 2.4.3 a je nutno tedy prověřit, zda je s tím definice 2.4.9 v souladu.

Je-li $\mathcal{M}$ přímkou, je $\mathcal{M}^\perp(B)$ nadrovinou, jejíž normálou je právě přímka $\mathcal{M}$. V souladu s větou 2.4.7 lze pro odchylku přímky $\mathcal{M}$ od nadroviny α, jakož i přímky n_α od nadroviny $\mathcal{M}^\perp(B)$ psát:

$$\cos\measuredangle(\mathcal{M},\alpha) = \sin\measuredangle(\mathcal{M}, n_\alpha) \wedge \cos\measuredangle(n_\alpha, \mathcal{M}^\perp(B)) = \sin\measuredangle(\mathcal{M}, n_\alpha),$$

odkud vyplývá rovnost odchylek $\measuredangle(\mathcal{M},\alpha)$ a $\measuredangle(n_\alpha, \mathcal{M}^\perp(B))$, což znamená, že *odchylka $\measuredangle(\mathcal{M},\alpha)$ určená dle definice 2.4.3 je táž, jako odchylka určená dle definice 2.4.9*, která je tedy korektní.

Nechť máme dány dvě nadroviny α, β, bod $B \in \beta$. Dle definice 2.4.9 je odchylka $\measuredangle(\beta, \alpha)$ rovna odchylce některé normály n_α od podprostoru $\beta^\perp(B)$, což je však jedna z normál n_β nadroviny β. Platí proto tvrzení následující:

Věta 2.4.12 *Buďte α, β nadroviny euklidovského prostoru $\mathcal{E}$. Nechť n_α, n_β jsou libovolné normály po řadě nadrovin α, β. Pak platí:*

$$\measuredangle(\alpha, \beta) = \measuredangle(n_\alpha, n_\beta).$$

Vzhledem k tomu, že směrovým vektorem každé normály dané nadroviny je normálový vektor této nadroviny, dostáváme tento důsledek věty 2.4.12 (pro $n = 2, 3$ čtenáři jistě známý):

Důsledek 2.4.13 *Buďte α, β nadroviny euklidovského prostoru $\mathcal{E}$. Nechť $\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta$ jsou libovolné normálové vektory uvedených nadrovin (po řadě). Pak platí:*

$$\measuredangle(\alpha, \beta) = \arccos \frac{|\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta|}{\|\mathbf{n}_\alpha\| \, \|\mathbf{n}_\beta\|}.$$

Příklad 2.4.14 Určete odchylku přímky p od podprostoru $\mathcal{M}$, je-li v kartézské soustavě souřadnic prostoru $\mathcal{E}_4$ dáno:

$$p = \{Q; \mathbf{s}\}, \; Q = [2, 2, 4, 6], \; \mathbf{s} = (2, -1, 0, -1),$$
$$\mathcal{M} = \{B; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}, \; B = [1, 2, 3, 4], \; \mathbf{u}_1 = (2, 1, 0, 1), \; \mathbf{u}_2 = (1, 1, 1, 1).$$

Řešení:
V souladu s definicí 2.4.3 nejprve nalezneme kolmý průmět p^* přímky p do $\mathcal{M}$, což jsme učinili v příkladu 2.2.15:

$$p^* = \{[2, 3, 4, 5], (1, 0, -1, 0)\}.$$

Pak

$$\measuredangle(p, \mathcal{M}) = \measuredangle(p, p^*) = \arccos \frac{|(2, -1, 0, -1)(1, 0, -1, 0)|}{\|(2, -1, 0, -1)\| \|(1, 0, -1, 0)\|} = \frac{2}{\sqrt{12}},$$

takže

$$\measuredangle(p, \mathcal{M}) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ilustrujme ještě platnost věty 2.4.6:
V příkladu 2.2.15 jsme ukázali, že pro kolmé průměty bodů $Q, R \in p$ platí:

$$Q = [2, 2, 4, 6], \quad R = [4, 1, 4, 5],$$
$$Q^* = [2, 3, 4, 5], \; R^* = [3, 3, 3, 5],$$

takže

$$\rho(Q,R) = \|(2,-1,0,-1)\| = \sqrt{6},$$
$$\rho(Q^*,R^*) = \|(1,0,-1,0)\| = \sqrt{2}.$$

Jak vidíme, opravdu $\rho(Q^*,R^*) = \frac{\sqrt{3}}{3}\rho(Q,R)$.
Dle věty 2.2.13 je kolmý průmět p^* přímky p do $\mathcal{M}$ roven průniku $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(p)$, kde podprostor $\mathcal{M}^{\perp}(p)$ je roven $\{Q, V(\mathcal{M})^{\perp} + [\mathrm{s}]\}$.
V příkladu 2.2.9 jsme nalezli $V(\mathcal{M})^{\perp}$:

$$V(\mathcal{M})^{\perp} = [(0,-1,0,1),(1,-2,1,0)],$$

takže

$$\mathcal{M}^{\perp}(p) = \{[2,2,4,6];(0,-1,0,1),(2,-2,1,0),(2,-1,0,-1)\}.$$

Nyní standardním způsobem vyšetříme průnik $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{\perp}(p)$ a zjistíme, že

$$p^* = \{[2,3,4,5],(1,0,-1,0)\}.$$

Ke stejnému výsledku dojdeme nalezením kolmého průmětu bodů Q a $R = Q + \mathrm{s}$ – stejně jako v příkladu 2.2.9 bychom zjistili:

$$Q^* = [2,3,4,5],\ R^* = [3,3,3,5].$$

Je patrno, že skutečně $p^* = \overleftrightarrow{Q^*R^*}$.

2.5 Objem simplexu

Připomeňme, že pojem simplexu byl definován v podkapitole 1.7. V této podkapitole budeme definovat *objem simplexu*, pomocí něhož lze určit objem jakéhokoli útvaru, který lze chápat jako sjednocení simplexů určitého rozměru, a konečně i objem útvarů, které lze považovat za sjednocení infinitezimálních simplexů.

Definice 2.5.1 Buď dán k-rozměrný simplex v $\mathcal{E}_k$[27] o vrcholech $B_0, B_1, \cdots, B_k$. Pak *objemem* nazýváme číslo V definované takto:

$$V = \frac{1}{k!}|[B_1 - B_0, B_2 - B_0, \cdots, B_k - B_0]|.$$

Objem 1-rozměrného simplexu nazýváme *délka*, objem 2-rozměrného simplexu nazýváme *obsah*.

[27] Předpoklad je korektní, neboť simplex rozměru k je obsažen v (jediném) afinním (tedy i euklidovském) podprostoru dimenze k (srv. poznámka 1.7.22 plynoucí z věty 1.7.14).

Přirozeně však můžeme uvažovat v daném euklidovském prostoru $\mathcal{E}$ i simplexy nižší dimenze, než je $\dim \mathcal{E}$. V tom případě však vnější součin vektorů uvažujeme nikoli v $\mathcal{E}$, ale v onom podprostoru $\mathcal{E}'$ určeném vrcholy simplexu – jeho dimenze odpovídá dimenzi simplexu a příslušný vnější součin je tedy v $\mathcal{E}'$ definován.

Uvažujme jednorozměrný simplex o vrcholech B_0, B_1 – tj. úsečku $\overline{B_0B_1}$ (srv. věta 1.7.25). Pak pro jeho délku V dle definice 2.5.1 dostáváme:

$$V = |[B_1 - B_0]| \overset{(*)}{=} \sqrt{G(B_1 - B_0)} \overset{(*)}{=} \sqrt{(B_1 - B_0)(B_1 - B_0)} = \sqrt{\|B_1 - B_0\|^2} =$$

$$= \|B_1 - B_0\| = \rho(B_0, B_1),$$

přičemž úpravy $(*)$ jsou založeny na vlastnostech vnějšího součinu a Grammova determinantu citovaných v důkazu věty 2.3.5.
Platí tedy:

Důsledek 2.5.2 *Buďte B_0, B_1 libovolné body v $\mathcal{E}_n, n \geq 1$. Pak délka úsečky B_0B_1 je rovna vzdálenosti bodů B_0, B_1.*

Poznámka 2.5.3

1. Dvojrozměrný simplex je trojúhelníkem. Zjistěme, zda jeho obsah, vyplývající z definice 2.5.1 odpovídá obsahu trojúhelníka tak, jak jej čtenář zná ze středoškolské matematiky.

   Uvažujme tři lineárně nezávislé body B_0, B_1, B_2 v $\mathcal{E}_2' \subseteq\subseteq \mathcal{E}_n$. Pak můžeme psát

   $$V = \tfrac{1}{2!}|[B_1-B_0, B_2-B_0]| = \tfrac{1}{2}\sqrt{G((B_1-B_0),(B_2-B_0))} =$$

   $$= \tfrac{1}{2}\sqrt{((B_1-B_0)(B_1-B_0))((B_2-B_0)(B_2-B_0))-((B_1-B_0)(B_2-B_0))^2} =$$

   $$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\|B_1-B_0\|^2\|B_2-B_0\|^2-\|B_1-B_0\|^2\|B_2-B_0\|^2\cos^2\measuredangle((B_1-B_0)(B_2-B_0))} =$$

   $$=\tfrac{1}{2}\|B_1-B_0\|\|B_2-B_0\|\sqrt{1-\cos^2\measuredangle((B_1-B_0)(B_2-B_0))}=$$

   $$= \tfrac{1}{2}\rho(B_0,B_1)\rho(B_0,B_2)|\sin\measuredangle((B_1-B_0)(B_2-B_0))|,$$

   kde byly využity již zmíněné vlastnosti vnějšího součinu, Grammova determinantu a dále vztah pro úhel dvou vektorů[28] a ovšem též definice vzdálenosti dvou bodů.

   Zjistili jsme, že *obsah trojúhelníku o vrcholech B_0, B_1, B_2 je roven*

   $$\frac{1}{2}\rho(B_0,B_1)\rho(B_0,B_2)|\sin\measuredangle((B_1-B_0)(B_2-B_0))|,$$

   což je očekávaný výsledek.

2. Třírozměrný simplex je čtyřstěn. Přesvědčme se, zda jeho objem vyplývající z definice 2.5.1 odpovídá objemu čtyřstěnu známému čtenáři ze středoškolské matematiky.

[28] $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{v})$

Nechť jsou dány čtyři lineárně nezávislé body B_0, B_1, B_2, B_3 v $\mathcal{E}'_3 \subseteq\subseteq \mathcal{E}_n$. Pak můžeme psát (v úpravách opět využijeme citovaných vlastností vnějšího a ortogonálního součinu):

$$V = \tfrac{1}{3!}|[B_1 - B_0, B_2 - B_0, B_3 - B_0]| = \tfrac{1}{6}|((B_1 - B_0) \times (B_2 - B_0)) \cdot (B_3 - B_0)|.$$

Vektorový součin $\mathbf{v} = (B_1 - B_0) \times (B_2 - B_0)$ představuje normálový vektor roviny π určené lineárně nezávislou trojicí bodů B_0, B_1, B_2 v prostoru $\mathcal{E}'$. Pro jeho normu platí:

$$\|\mathbf{v}\| = \|(B_1 - B_0) \times (B_2 - B_0)\| = \sqrt{G((B_1 - B_0), (B_2 - B_0))},$$

což dle odstavce 1 představuje dvojnásobek obsahu trojúhelníka $B_0B_1B_2$ (proč?).[29]

Pro vzdálenost $\rho(B_3, \pi)$ platí (srv. věta 2.3.3):

$$\rho(B_3, \pi) = \frac{|(B_3 - B_0) \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

S ohledem na právě uvedené lze pro objem dotčeného čtyřstěnu dále psát:

$$V = \tfrac{1}{6}|\mathbf{v} \cdot (B_3 - B_0)| = \tfrac{1}{6}\|\mathbf{v}\| \cdot \rho(B_3, \pi) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\|\mathbf{v}\|\right)\rho(B_3, \pi),$$

takže označíme-li P obsah trojúhelníka $B_0B_1B_2$ *(obsah podstavy čtyřstěnu)* a symbolem v vzdálenost bodu B_3 od roviny podstavy π *(výška čtyřstěnu)*, zjišťujeme, že *objem čtyřstěnu o vrcholech* B_0, B_1, B_2, B_3 *je roven*

$$\tfrac{1}{3}Pv,$$

což je opět očekávaný výsledek.

Příklad 2.5.4 V prostoru $\mathcal{E}_3$ jsou dány body A, B, C ve zvolené kartézské soustavě souřadnic:

$$A = [1, 2, 3],\ B = [1, 3, 3],\ C = [1, 2, 4].$$

Určete objem trojúhelníka ABC.
Řešení:
Podle definice 2.5.1 lze psát:

$$V = \tfrac{1}{2!}|[(C - A)(B - A)]|.$$

Uvedený vnější součin má smysl toliko v prostoru dimenze 2, tj. v rovině určené body A, B, C. Jednou z možností pro jeho vyčíslení je zavést v této rovině kartézskou bázi, v ní vyjádřit souřadnice bodů A, B, C a pak určit hodnotu uvedeného vnějšího součinu (jako determinant matice typu 2×2 sestavené ze souřadnic uvedených vektorů – promyslete si!).

[29]Toto zjištění představuje *geometrický význam velikosti vektorového součinu*. Jaký význam lze tedy přisoudit obecně velikosti ortogonálního součinu?

Tento postup však není nutný, neboť pro stanovení absolutní hodnoty vnějšího součinu lze užít jeho souvislosti s Grammovým determinantem dotčených vektorů (skalární součin v rovině bodů A, B, C je jen restrikcí skalárního součinu v $\mathcal{E}_3$, tj.:

$$||[(C-A)(B-A)]|| = \sqrt{G((C-A)(B-A))} = \begin{vmatrix} (C-A)(C-A) & (C-A)(B-A) \\ (C-A)(B-A) & (B-A)(B-A) \end{vmatrix},$$

což vzhledem k tomu, že $C - A = (0, 0, 1)$, $B - A = (0, 1, 0)$, je rovno 1. Obsah daného trojúhelníka je roven $\frac{1}{2}$.

Obsah můžeme též zjistit užitím výše uváděné vlastnosti vektorového součinu $V = \frac{1}{2}\|(C-A) \times (B-A)\|$.
Nejprve vypočteme vektorový součin $(C-A) \times (B-A)$:

$$(C-A) \times (B-A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_1,$$

má tedy souřadnice $(-1, 0, 0)$, obsah je tedy (shodně jako výše) roven $\frac{1}{2}$.

Dalším z možných způsobů je výpočet dle vztahu z poznámky 2.5.3.

2.6 Shodná zobrazení

Závěrem kapitoly 2 si – podobně jako v kapitole 1 – všimneme jistého typu zobrazení mezi euklidovskými prostory, zvláště pak těch, která jsou bijekcí euklidovského prostoru na sebe *(shodnosti)* a tvoří *(vzhledem ke skládání)* grupu (pomocí níž by v duchu Kleinova principu bylo možné euklidovskou geometrii vybudovat). Tak jako v případě afinních zobrazení v podkapitole 1.8 se i v případě shodných zobrazení omezíme jen na jejich základní vlastnosti.

Definice 2.6.1 Buďte $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ euklidovské prostory. Zobrazení $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ se nazývá *shodné zobrazení*, jestliže pro každé dva body $B, C \in \mathcal{E}$ platí:

$$\rho(f(B), f(C)) = \rho(B, C).$$

Přímo z definice plyne, že každé shodné zobrazení je prosté. Skutečně – pokud by existovaly body $B, C \in \mathcal{E}$ s vlastností

$$B \neq C \wedge f(B) = f(C),$$

platilo by

$$\rho(B, C) \neq 0 \wedge \rho(f(B), f(C)) = 0,$$

což by byl spor s definicí 2.6.1.

Ukažme dále, že každé shodné zobrazení je afinním zobrazením.
Buďte B, C, D tři kolineární body a nechť jsou označeny tak, že bod D leží mezi body B, C, tedy $D \in \overline{BC}$. Označíme-li $t = (B, C, D)$, pak (s přihlédnutím k poznámce 1.6.7) platí:

$$D - B = t(D - C) \wedge t < 0 \tag{2.25}$$

Protože $D \in \overline{BC}$, platí dle věty 2.1.5:

$$\rho(B, D) + \rho(D, C) = \rho(B, C),$$

tudíž z definice 2.6.1 plyne.

$$\rho(f(B), f(D)) + \rho(f(D), f(C)) = \rho(f(B), f(C)),$$

což (opětovně dle věty 2.1.5) implikuje, že $f(D) \in \overline{f(B)f(C)}$, odkud vyplývá kolinearita obrazů bodů B, C, D a neboť f je prosté, jsou tyto obrazy navzájem různé a existuje proto $t' \in \mathbb{R}$, $t' = (f(B), f(C), f(D))$, tj. platí (s přihlédnutím k poznámce 1.6.7):

$$f(D) - f(B) = t'(f(D) - f(C)) \wedge t' < 0. \tag{2.26}$$

Z relace (2.25) vyplývá

$$\rho(B, D) = \|D - B\| = |t|\|D - C\| = |t|\rho(C, D),$$

a proto

$$\rho(f(B)f(D)) = |t|\rho(f(C), f(D)).$$

Na základě (2.26) však současně

$$\rho(f(B)f(D)) = |t'|\rho(f(C), f(D)),$$

a jelikož jak body B, C, D, tak jejich obrazy jsou navzájem různé, musí platit

$$|t'| = |t|.$$

Znaménka t, t' jsou táž, a tedy $t = t'$, neboli

$$(B, C, D) = (f(B), f(C), f(D)).$$

Platí tedy následující věta:

Věta 2.6.2 *Každé shodné zobrazení je prostým afinním zobrazením.*

Nutnou podmínkou pro existenci shodného zobrazení $\mathcal{E}$ do $\mathcal{E}'$ je tedy $\dim \mathcal{E} \leq \dim \mathcal{E}'$. Nyní si všimneme vlastností homomorfizmu φ asociovaného ke shodnému zobrazení f.

Věta 2.6.3 *Buď f afinní zobrazení $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, φ jeho asociovaný homomorfizmus. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *afinní zobrazení $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ je shodné,*
2. *φ zachovává délku vektorů – tj. $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}: \ \|\mathbf{u}\| = \|\varphi(\mathbf{u})\|$,*
3. *φ zachovává skalární součin – tj. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}: \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v})$.*

Důkaz:

- Protože $\rho(B, C) = \|C - B\|$, je ekvivalence podmínek 1 a 2 zřejmá.
- Uvažme následující identitu platnou ve vektorových prostorech se skalárním součinem:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x}\mathbf{x} + 2\mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{y},$$

odkud pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ plyne:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\mathbf{u}\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2, \tag{2.27}$$

$$\text{a} \quad \|\varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})\|^2 = \|\varphi(\mathbf{u})\|^2 + 2\varphi(\mathbf{u})\varphi(\mathbf{v}) + \|\varphi(\mathbf{v})\|^2.$$

Protože φ je homorfizmus, je $\varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, a druhá rovnost přejde ve tvar:

$$\|\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v})\|^2 = \|\varphi(\mathbf{u})\|^2 + 2\varphi(\mathbf{u})\varphi(\mathbf{v}) + \|\varphi(\mathbf{v})\|^2. \tag{2.28}$$

Pokud φ zachovává délku vektorů (tj. 2), platí:

$$\|\varphi(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|, \ \|\varphi(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|, \ \|\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|.$$

Porovnáním (2.27) a (2.28) obdržíme:

$$\varphi(\mathbf{u})\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{u}\mathbf{v},$$

což znamená platnost 3.

Nechť φ zachovává skalární součin (tj. 3). Pak zřejmě pro každý $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ platí:

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{u}) = \|\varphi(\mathbf{u})\|^2$$

a jelikož $\|\mathbf{u}\|^2, \|\varphi(\mathbf{u})\|^2 \geq 0$, máme:

$$\|\mathbf{u}\| = \|\varphi(\mathbf{u})\|,$$

čili platnost podmínky 2.

□

Naskýtá se nyní otázka, jakou vlastnost má matice afinního zobrazení v případě, že jde o zobrazení shodné.

Buď f afinní zobrazení $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ a φ jeho asociovaný homomorfizmus.

Zvolme v $\mathcal{E}$ afinní bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$.
Pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)_{\mathcal{B}_0}$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)_{\mathcal{B}_0}$, snadno odvodíme:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_i \sum_j x_i y_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j).$$

Protože φ je homomorfizmus, obdržíme:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(\mathbf{e}_i), \; \varphi(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(\mathbf{e}_j),$$

a tudíž

$$\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(\mathbf{e}_i)\varphi(\mathbf{e}_j).$$

Odtud je zřejmé, že φ zachovává skalární součin, právě když jej zachovává pro bázové vektory z $\mathbf{V}$, tj. platí-li

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \varphi(\mathbf{e}_i) \cdot \varphi(\mathbf{e}_j), \; 1 \le i, j \le n.$$

Studujme nyní vlastnost matice afinního zobrazení f vzhledem ke kartézským bázím.
Nechť $\mathbf{A}_0 = (a_{ij})_{nm}$ je matice asociovaného homomorfizmu φ vzhledem ke kartézským bázím $\mathcal{B}$ prostoru $\mathcal{E}$ a $\mathcal{C}$ prostoru $\mathcal{E}'$. Prvky báze $\mathcal{B}$ jsme již označili, nechť dále $\mathcal{C} = \langle Q; \mathbf{d}_1, \cdots$
$\cdots, \mathbf{d}_m \rangle$.
Pak platí pro libovolné $i, j = 1, \cdots, n$:

$$\varphi(\mathbf{e}_i)\varphi(\mathbf{e}_j) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \mathbf{d}_k \right) \left(\sum_{s=1}^{m} a_{js} \mathbf{d}_s \right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} a_{ik} a_{js} \mathbf{d}_k \mathbf{d}_s =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} a_{ik} a_{js} \delta_{ks} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} a_{jk}.$$

Odtud je patrno, že $\varphi(\mathbf{e}_i)\varphi(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ (tj. f je shodné zobrazení), právě když

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}. \tag{2.29}$$

Protože číslo $\sum_{k=1}^{m} a_{ik} a_{jk}$ představuje prvek na pozici (i, j) součinu matic $\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{A}_0^T$, znamená (2.29), že $\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{A}_0^T = \mathbf{E}$.
Dokázali jsme tedy následující větu:

Věta 2.6.4 *Buď $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ afinní zobrazení, $\mathbf{A}_0$ matice jeho asociovaného homomorfizmu vzhledem ke kartézským bázím prostorů $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$. Pak je zobrazení f shodným zobrazením, právě když*[30]

$$\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{A}_0^T = \mathbf{E}.$$

Afinní zobrazení $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}'_m$ je dle věty 1.8.9 jednoznačně určeno zadáním obrazů $Q_0, Q_1, \cdots, Q_n$ lineárně nezávislé $n+1$-tice bodů $B_0, B_1, \cdots, B_n$ z $\mathcal{E}$.

Je-li f *shodným zobrazením*, pak pro každé i, j, $1 \leq i, j \leq n$ musí platit

$$\rho(B_i, B_j) = \rho(Q_i, Q_j). \tag{2.30}$$

Je otázkou, zda tato podmínka je i postačující podmínkou pro to, aby f bylo shodným zobrazením. V souladu s větou 2.6.3 bude f shodným, jestliže k němu asociovaný homomorfizmus φ bude zachovávat skalární součin vektorů, přičemž, (jak jsme ukázali v odvození věty 2.6.4) postačí, zachová-li jej pro vektory některé báze $\mathbf{V}$, za kterou můžeme vzhledem k lineární nezávislosti bodů $B_0, B_1, \cdots, B_n$ vzít vektory

$$B_1 - B_0, B_2 - B_0 \cdots, B_n - B_0.$$

V důkazu věty 2.6.3 jsme odvodili následující implikaci, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

$$(\|\varphi(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\| \wedge \|\varphi(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\| \wedge \|\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|) \Rightarrow \varphi(\mathbf{u})\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{uv}. \tag{2.31}$$

Zvolme nyní libovolné $i, j = 1, \cdots, n$ a položme $\mathbf{u} = B_i - B_0$ a $\mathbf{v} = B_0 - B_j$. Pak díky (2.30) evidentně $\|\varphi(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$ a $\|\varphi(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$ (proč?) a protože $\mathbf{u} + \mathbf{v} = B_i - B_j$, tak též $\|\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$. Z (2.31) tedy vyplývá, že

$$\varphi(B_i - B_0)\varphi(B_0 - B_j) = (B_i - B_0)(B_0 - B_j),$$

protože však φ je homomorfizmus, platí také

$$\varphi(B_i - B_0)\varphi(B_j - B_0) = (B_i - B_0)(B_j - B_0).$$

Souhrnně řečeno, ukázali jsme, že splňuje-li zobrazení f podmínku (2.30), zachovává jeho asociovaný homomorfizmus φ skalární součin, a tedy f je zobrazení shodné.
Platí proto následující tvrzení, zvané též věta o určenosti shodného zobrazení:[31]

[30] Determinant matice $\mathbf{A}_0$ v případě shodného zobrazení je roven 1 nebo -1. Nejde však o podmínku postačující (proč?).

[31] Vzhledem k symetrii metriky ρ postačí podmínce (2.30) podrobit jen ty dvojice bodů, v nichž $i \leq j$, a jelikož pro $i = j$ je podmínka triviální, lze předpoklad ekvivalence formulovat tak, jak činí následující věta.

Věta 2.6.5 *Buďte $B_0, B_1, \cdots, B_n$ libovolné lineárně nezávislé body prostoru $\mathcal{E}_n$, Q_0, Q_1, $\cdots$, Q_n libovolné body prostoru $\mathcal{E}'_m$ takové, že:*

$$\forall i, j, 0 \leq i < j \leq n : \ \rho(B_i, B_j) = \rho(Q_i, Q_j).$$

Pak existuje právě jedno shodné zobrazení $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ s vlastností

$$f(B_i) = Q_i, \ 0 \leq i \leq n.$$

Definice 2.6.6 Shodné zobrazení euklidovského prostoru na sebe se nazývá *shodnost daného euklidovského prostoru.*

Vzhledem k tomu, že každé shodné zobrazení je prosté afinní zobrazení, platí:

Věta 2.6.7 *Každá shodnost afinního prostoru $\mathcal{E}$ je afinitou prostoru $\mathcal{E}$.*

Bezprostředně z definice 2.6.1 plyne, že složení dvou shodností je opět shodnost, jakož i to, že inverzní zobrazení ke shodnosti je opět shodností. Platí proto následující tvrzení (uvedená grupa se nazývá *grupa shodností* či *grupa izometrií* daného euklidovského prostoru):

Věta 2.6.8 *Množina shodností libovolného euklidovského prostoru tvoří spolu se skládáním zobrazení grupu.*

Tato grupa je podgrupou v grupě afinit daného euklidovského prostoru.

Příklad 2.6.9 V rovině $\mathcal{E}_2$ jsou dány dvě dvojice bodů B_0, B_1 a Q_0, Q_1 svými souřadnicemi v některé kartézské bázi:

$$B_0 = [\sqrt{2}, 0], \ B_1 = [0, \sqrt{2}], \ Q_0 = [2, 1], \ Q_1 = [2, -1].$$

Najděte všechna zobrazení f, pro něž $f(B_i) = Q_i, i = 0, 1$.
Řešení:
Protože $\rho(B_0, B_1) = \rho(Q_0, Q_1)$, má smysl vzhledem k definici 2.6.1 shodné zobrazení požadované vlastnosti hledat. Zřejmě však nebude jediné.
Analytické vyjádření zobrazení f zní:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_1 \\ y_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_2, \end{aligned}$$

kde x_1, x_2 jsou souřadnice vzoru a y_1, y_2 souřadnice obrazu, přičemž s ohledem na větu 2.6.4 musí matice $\mathbf{A}_0$ být ortogonální.

Stejným postupem jako v příkladu 1.8.17 zjistíme (proveďte!):

$$\begin{aligned} a_{11} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(2-t_1), & a_{21} &= a_1\tfrac{\sqrt{2}}{2}(2-t_1),\\ a_{12} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-t_2), & a_{22} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1-t_2),\\ a_1 &= t_1, & a_2 &= t_2, \end{aligned}$$

kde $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ jsou parametry. Tím je popsána množina všech *afinních* zobrazení s vlastností $f(B_i) = Q_i, i = 0, 1$. Z nich nyní vybereme ta, pro něž je $\mathbf{A}_0$ ortogonální:

$$\mathbf{A}_0\mathbf{A}_0^T = \mathbf{E},$$

kde přirozeně

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Dosadíme-li zjištěné hodnoty prvků matice $\mathbf{A}_0$, zjistíme, že podmínka ortogonality matice $\mathbf{A}_0$ vede k následující soustavě rovnic pro t_1, t_2:

$$\begin{array}{rcrcrcl} t_1^2 & - & 4t_1 & + & 4 & = & 1 \\ & & t_2^2 & + & 1 & = & 1 \\ -4t_2 & + & 2t_1t_2 & & & = & 0, \end{array}$$

která má dvě řešení:

(i) $t_1 = 1,\ t_2 = 0,$

(ii) $t_1 = 3,\ t_2 = 0.$

Dosadíme-li zjištěné hodnoty parametrů t_1, t_2 do příslušných vyjádření koeficientů a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_1, a_2, zjišťujeme, že existují *právě dvě shodná zobrazení* požadovaných vlastností, jejichž analytická vyjádření znějí:

$$\begin{aligned} f_1 : y_1 &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 1\\ y_2 &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : y_1 &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 3\\ y_2 &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}x_2. \end{aligned}$$

Kapitola 3

Kvadratické formy na vektorových prostorech

V této kapitole budeme především studovat kvadratické formy a ty jejich vlastnosti, které budou tvořit algebraický základ studia kuželoseček a kvadrik, kterým se budeme věnovat v kapitolách 4 a 5.

Naše úvahy budeme provádět v prostorech libovolné dimenze n, abychom výsledky mohli použít pro kuželosečky v rovině ($n = 2$) i pro kvadriky v třírozměrném prostoru.

Písmeno $\mathbf{V}$ bude označovat n-rozměrný vektorový prostor nad T, přičemž těleso T – pokud nebude řečeno jinak – bude v podkapitole 3.1 označovat libovolné komutativní těleso, v dalších podkapitolách dále přidáme požadavek charakteristiky různé od 2, resp. se budeme věnovat jen tělesům $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

3.1 Vlastní vektory a vlastní hodnoty matic

Tato podkapitola je stručným shrnutím jen těch poznatků, které jsou nezbytné pro následné studium bilineárních a kvadratických forem a na které se budeme dále odvolávat. Většině čtenářů poslouží pro připomenutí a shrnutí.

Definice 3.1.1 Buď $\mathbf{A}$ matice z $\mathcal{M}_n(T)$. Platí-li pro skalár $\lambda \in T$ a nenulový aritmetický vektor $\mathbf{u} \in T^n$

$$\mathbf{uA} = \lambda\mathbf{u}, \tag{3.1}$$

řekneme, že λ je *vlastní hodnota matice* $\mathbf{A}$ a $\mathbf{u}$ *vlastní vektor matice* $\mathbf{A}$ *příslušný vlastní hodnotě* λ.[1]

Množina vlastních hodnot matice $\mathbf{A}$ se nazývá *spektrum matice* $\mathbf{A}$ a značí se $\mathrm{Spec}\mathbf{A}$.

[1] V literatuře se též užívá pojmu *charakteristický vektor (hodnota)*.

Aritmetický vektor je uspořádaná n-tice $(u_1, \cdots u_n)$ prvků z T, tj. matice typu $1 \times n$. Ve vztahu (3.1) tedy jde o obvyklé násobení matic.

Věta 3.1.2 *Každý vlastní vektor libovolné matice je příslušný jediné vlastní hodnotě této matice.*

Důkaz: Buď $\mathbf{A}$ některá matice z $\mathcal{M}_n(T)$, λ, λ' její vlastní hodnoty, $\mathbf{u}$ jim příslušný vlastní vektor. Pak tedy současně platí $\mathbf{uA} = \lambda\mathbf{u}$ a $\mathbf{uA} = \lambda'\mathbf{u}$. Odečtením těchto rovností obdržíme $\mathbf{o} = (\lambda - \lambda')\mathbf{u}$. Protože dle definice 3.1.1 je $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, dostáváme $\lambda = \lambda'$. ☐

Podívejme se nyní, jak lze najít vlastní vektory a vlastní hodnoty:
Buď $\mathbf{A}$ libovolná matice z $\mathcal{M}_n(T)$. Dle definice 3.1.1 je $\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, vlastní vektor $\mathbf{A}$ příslušný λ, právě když $\mathbf{uA} = \lambda\mathbf{u}$. Transponujeme-li obě strany rovnosti, dostaneme $\mathbf{A}^T\mathbf{u}^T = \lambda\mathbf{u}^T$, a tedy $\mathbf{A}^T\mathbf{u}^T - \lambda\mathbf{u}^T = \mathbf{o}^T$. Neboť $\lambda\mathbf{u}^T = \lambda(\mathbf{E}\mathbf{u}^T)$, lze poslední výraz upravit na tvar

$$(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{E})\mathbf{u}^T = \mathbf{o}^T. \tag{3.2}$$

To však představuje maticový zápis homogenní soustavy lineárních rovnic, jejíž matice je $\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{E}$.
Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a položíme-li $\mathbf{u} = (u_1, \cdots u_n)$, lze tuto soustavu psát:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(a_{11} - \lambda)u_1 & + & a_{21}u_2 & + & \cdots & + & a_{n1}u_n & = & 0 \\
a_{12}u_1 & + & (a_{22} - \lambda)u_2 & + & \cdots & + & a_{n2}u_n & = & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{1n}u_1 & + & a_{2n}u_2 & + & \cdots & + & (a_{nn} - \lambda)u_n & = & 0
\end{array}$$

Jak víme, tato soustava má netriviální řešení, právě když determinant matice soustavy je roven nule, tedy platí-li $\det(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{E}) = 0$.
Protože $\det(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{E}^T) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^T = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$, je této podmínce ekvivalentní

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0. \tag{3.3}$$

To je tedy nutná a postačující podmínka pro existenci vlastního vektoru matice $\mathbf{A}$ příslušného λ a představuje rovnici pro výpočet λ – jde o algebraickou rovnici n-tého stupně,[2] která se nazývá *charakteristická rovnice matice* $\mathbf{A}$.

Množinou jejích řešení je množina vlastních hodnot (spektrum) matice $\mathbf{A}$. Pro každou vlastní hodnotu dostáváme (dosazením do (3.2)) soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů příslušných této vlastní hodnotě.
Tím je tedy popsán postup nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů libovolné matice.

[2]Počet vlastních čísel dané matice je tedy nejvýše n. Je-li T algebraicky uzavřené (např. $\mathbb{C}$), je počet vlastních čísel (vč. násobnosti) právě n.

Jak víme, tvoří řešení homogenní soustavy vektorový podprostor v T^n. Platí tedy následující věta:

Věta 3.1.3 *Vlastní vektory dané matice řádu n příslušné téže vlastní hodnotě tvoří spolu s nulovým vektorem vektorový podprostor v prostoru T^n.*

Tento podprostor budeme nazývat *vlastní podprostor matice* $\mathbf{A}$ *příslušný vlastní hodnotě* λ a budeme jej značit $\mathcal{N}_\lambda$.
Platí tedy, že

$$\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda \Leftrightarrow \mathbf{xA} = \lambda \mathbf{x}.$$

Přitom $\mathbf{N}_\lambda \setminus \{\mathbf{o}\}$ je množina vlastních vektorů příslušných λ.
Z věty 3.1.2 plyne, že dva vlastní podprostory příslušné různým vlastním hodnotám mají pouze triviální průnik.

Věta 3.1.4 *Vlastní vektory libovolné matice příslušné různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz: Buďte $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ vlastní vektory příslušné vlastním hodnotám po řadě $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, kde pro $i \neq j$ platí $\lambda_i \neq \lambda_j$.
Důkaz provedeme matematickou indukcí pro k.

1. Je-li $k = 1$, je vlastní vektor $\mathbf{u}_1$ nenulový a tedy lineárně nezávislý.

2. Předpokládejme platnost pro všechny takové $(k-1)$-tice. Nechť

$$c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}. \tag{3.4}$$

Vynásobíme-li obě strany této rovnosti maticí $\mathbf{A}$ zprava, dostaneme po úpravě:

$$c_1(\mathbf{u}_1\mathbf{A}) + \cdots + c_{k-1}(\mathbf{u}_{k-1}\mathbf{A}) + c_k(\mathbf{u}_k\mathbf{A}) = \mathbf{o},$$

a neboť $\mathbf{u}_i\mathbf{A} = \lambda_i\mathbf{u}_i$, $1 \leq i \leq k$, obdržíme nakonec:

$$c_1\lambda_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{k-1}\lambda_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + c_k\lambda_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}. \tag{3.5}$$

Nyní uvažujme rovnost (3.4) vynásobenou λ_k – tedy

$$c_1\lambda_k\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{k-1}\lambda_k\mathbf{u}_{k-1} + c_k\lambda_k\mathbf{u}_k = \mathbf{o}$$

a odečteme od ní rovnost (3.5):

$$c_1(\lambda_k - \lambda_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{o}.$$

Tato rovnost představuje nulovou lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{k-1}$, které však dle indukčního předpokladu jsou lineárně nezávislé, a tedy

$$c_1(\lambda_k - \lambda_1) = \cdots = c_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0.$$

Protože vlastní hodnoty jsou dle předpokladu navzájem různé, musí být $c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$. Dosadíme-li tento výsledek do rovnosti (3.4), vyplyne nám, že i $c_k = 0$. Podle principu matematické indukce je tedy věta dokázána.

□

Různé matice mohou mít různá spektra. Pro speciální dvojice matic (tzv. *podobné matice*) platí:

Věta 3.1.5 *Buďte* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(T)$ *a nechť existuje regulární matice* $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_n(T)$ *tak, že* $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}$. *Pak matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *mají tytéž charakteristické rovnice (a tedy i tatáž spektra).*

Důkaz: Dle předpokladů s využitím věty o determinantu součinu matic lze psát:

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} - \lambda\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^{-1}) =$$

$$(\det\mathbf{Q})(\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}))(\det\mathbf{Q}^{-1}) = \det(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1})(\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}).$$

□

Zkoumáme-li matice nad tělesem $\mathbb{R}$, nemusí samozřejmě mít charakteristická rovnice reálné kořeny. Pro speciální případ symetrických matic (takových, že $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$) nad $\mathbb{R}$ platí:

Věta 3.1.6 *Všechny vlastní hodnoty*[3] *reálné symetrické matice jsou reálná čísla. Jejich počet (včetně násobnosti) je roven řádu matice.*

Důkaz: Protože $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené těleso, má charakteristická rovnice libovolné reálně matice řádu n právě n (včetně násobnosti) kořenů, které jsou však obecně komplexní.

Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})$ reálná symetrická matice řádu n – tj. $a_{ij} \in \mathbb{R}$ a $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Nechť λ je libovolná vlastní hodnota matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)$ je její vlastní vektor příslušný λ. Platí tedy

$$\mathbf{u}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{u}. \tag{3.6}$$

Pro matici $\mathbf{C} = (c_{ij})$ libovolného typu nad $\mathbb{C}$ (tj. i aritmetický vektor) označme $\overline{\mathbf{C}} = (\overline{c}_{ij})$ (matice komplexně sdružená k $\mathbf{C}$). Pro součin libovolných matic zřejmě platí $\overline{\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}} = \overline{\mathbf{X}} \cdot \overline{\mathbf{Y}}$.

[3] Vlastní hodnoty matic nad číselnými tělesy se obvykle nazývají vlastní čísla.

Přejděme na obou stranách rovnosti (3.6) k prvkům komplexně sdruženým (ovšemže $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$):

$$\overline{\mathbf{u}}\mathbf{A} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{u}}.$$

Transponujeme-li tuto rovnost a vynásobíme-li ji $\mathbf{u}$ zleva, dostáváme ($\mathbf{A}$ je symetrická):

$$\mathbf{u}\mathbf{A}\overline{\mathbf{u}}^T = \overline{\lambda}\mathbf{u}\overline{\mathbf{u}}^T \tag{3.7}$$

Vynásobíme nyní (3.6) vektorem $\overline{\mathbf{u}}^T$ zprava:

$$\mathbf{u}\mathbf{A}\overline{\mathbf{u}}^T = \lambda\mathbf{u}\overline{\mathbf{u}}^T.$$

Odečteme-li od této rovnosti rovnost (3.7), obdržíme, že

$$0 = (\lambda - \overline{\lambda})(\mathbf{u}\overline{\mathbf{u}}^T).$$

Číslo $\mathbf{u}\overline{\mathbf{u}}^T = u_1\overline{u}_1 + \cdots + u_n\overline{u}_n$ je součtem reálných nezáporných čísel (proč?), mezi nimiž je alespoň jedno kladné ($\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$), a proto $\mathbf{u}\overline{\mathbf{u}}^T \neq 0$. Tedy $\lambda = \overline{\lambda}$, čili $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Vektor $\mathbf{u}$ je řešením soustavy (3.2), což je nyní soustava rovnic nad $\mathbb{R}$ a je proto samozřejmě prvkem z $\mathbb{R}^n$.

Následující vlastnost vlastních vektorů bude pro nás mít význam zejména v prostorech se skalárním součinem.

Věta 3.1.7 *Buď* $\mathbf{A}$ *symetrická matice,* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *její vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám (číslům). Pak platí:*

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{v}\mathbf{u}^T = 0.$$

Důkaz: Buď $\mathbf{u}$ vlastní vektor příslušný λ, $\mathbf{v}$ vlastní vektor příslušný λ' a nechť $\lambda \neq \lambda'$. Tedy

$$\mathbf{u}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\mathbf{A} = \lambda'\mathbf{v}. \tag{3.8}$$

Transponujme první z rovností a pak ji vynásobme zleva $\mathbf{v}$. Tím dostáváme:

$$\mathbf{v}\mathbf{A}\mathbf{u}^T = \lambda\mathbf{v}\mathbf{u}^T. \tag{3.9}$$

Nyní druhou z rovností vynásobme zprava $\mathbf{u}^T$, čímž obdržíme:

$$\mathbf{v}\mathbf{A}\mathbf{u}^T = \lambda'\mathbf{v}\mathbf{u}^T.$$

Odečtěme tuto rovnost od rovnosti(3.9) – dostaneme tak, že

$$0 = (\lambda - \lambda')(\mathbf{u}\mathbf{v}^T),$$

což vzhledem k různosti λ a λ' značí, že $\mathbf{u}\mathbf{v}^T = 0$ neboli (pokud $\mathbf{A}$ je řádu n, $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)$ a $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$):

$$u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = 0.$$

Rovněž platí $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^T = 0$ (proč?). □

Příklad 3.1.8 Najděte vlastní hodnoty a vlastní podprostory matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:
Vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$, právě když jeho složky řeší soustavu rovnic (3.2), která zní:

$$\begin{aligned} (3-\lambda)u_1 + \quad 1u_2 \quad - 1u_3 &= 0 \\ (1-\lambda)u_2 \quad\quad &= 0\,, \\ 2u_1 \quad + \quad 1u_2 \quad - \lambda u_3 &= 0 \end{aligned}$$

kde λ je řešení charakteristické rovnice (3.3), která zní:

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2).$$

Množina vlastních hodnot je $\operatorname{Spec} \mathbf{A} = \{1, 2\}$.
Soustavu (3.2) budeme řešit nejprve pro $\lambda = 1$ (a obdržíme tak vlastní podprostor $\mathbf{N}_1$) a pak pro $\lambda = 2$ (tím získáme vlastní podprostor $\mathbf{N}_2$):

1. $\lambda = 1$ (soustavu zapíšeme maticí):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Její řešení je $\mathbf{N}_1 = [(1, 0, 2), (0, 1, 1)]$.

2. $\lambda = 2$ (soustavu opět zapíšeme maticí):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   Její řešení je $\mathbf{N}_2 = [(1, 0, 1)]$.

Ověřte, že pro libovolný vektor $\mathbf{u}$ z $\mathbf{N}_\lambda$ platí $\mathbf{u}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{u}$!
Skutečně – např. $(1, 1, 3) \in \mathbf{N}_1$ a platí $(1, 1, 3)\mathbf{A} = (1, 1, 3)$, nebo $(\pi, 0, \pi) \in \mathbf{N}_2$ a platí $(\pi, 0, \pi)\mathbf{A} = (2\pi, 0, 2\pi) = 2(\pi, 0, \pi)$.

Příklad 3.1.9 U následující symetrické matice se přesvědčte o platnosti věty 3.1.7,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Postupem jako v předešlém příkladu zjistíme, že $\operatorname{Spec} \mathbf{A} = \{-1, 3\}$ a dále, že $\mathbf{N}_{-1} = [(1, -1)]$, $\mathbf{N}_3 = [(1, 1)]$. Je patrno, že $(1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

3.2 Bilineární formy na vektorových prostorech

Nejprve zavedeme jisté zobrazení, pomocí něhož budeme později definovat pojem kvadratická forma.

Definice 3.2.1 Zobrazení $\Phi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$ se nazývá *bilineární forma na* $\mathbf{V}$, jestliže má následující vlastnosti:

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$: $\quad \Phi(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$
$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{w})$
2. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \forall t \in T$: $\Phi(t\mathbf{u}, \mathbf{v}) = t\,\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
$\Phi(\mathbf{u}, t\mathbf{v}) = t\,\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Jde tedy o *zobrazení*, které *uspořádané dvojici vektorů* z $\mathbf{V}$ přiřadí *skalár* z T, přitom je v obou argumentech *lineární*.

Ověřte, že příkladem bilineární formy na euklidovském vektorovém prostoru je skalární součin vektorů! Dalším příkladem bilineární formy je tzv. nulová (triviální) forma, která libovolnou dvojici vektorů zobrazí na 0 (budeme ji značit o).

Definice 3.2.2 Buď Φ bilineární forma na $\mathbf{V}$ a $\mathcal{B} = \langle \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ báze prostoru $\mathbf{V}$. Označme $f_{ij} = \Phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, $1 \leq i, j \leq n$. Pak matice $\mathbf{F} = (f_{ij}) \in \mathcal{M}_n(T)$ se nazývá *matice bilineární formy* Φ *v bázi* $\mathcal{B}$ (užívá se rovněž termínu *vzhledem k bázi* $\mathcal{B}$).

Odtud je zřejmé, že Φ má v určité bázi *jedinou* matici (proč?).

Podívejme se nyní, jak vypočíst hodnotu $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, známe-li souřadnice zmíněných vektorů v některé bázi prostoru $\mathbf{V}$:

Buď Φ bilineární forma na $\mathbf{V}$, $\mathcal{B} = \langle \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ libovolná báze $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ matice Φ v $\mathcal{B}$ (tj. máme zadány hodnoty formy Φ na uspořádaných dvojicích vektorů báze $\mathcal{B}$).

Nechť $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)_{\mathcal{B}}$[4]. Počítejme $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Nejprve za $\mathbf{u}$ dosaďme $\sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i$ (proč?) – (a), pak opakovaně užijeme vlastnost 1 z definice 3.2.1 – (b), následně vlastnost 2 z téže definice – (c). Dále dosadíme za $\mathbf{v}$ $\sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e}_i$ a pokračujeme

[4]Skutečnost, že $\mathbf{u}$ má v bázi $\mathcal{B}$ souřadnice $(u_1, \cdots, u_n)$ se v lineární algebře zapisuje též takto: $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}} = (u_1, \cdots, u_n)$. Bude-li to účelné, využijeme v této podkapitole i této symboliky, i když v této publikaci jinak preferujeme zápis v geometrii obvyklejší.

analogicky pro druhý argument – (d).

$$\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) \overset{(a)}{=} \Phi\left(\sum_{i=1}^n u_i\mathbf{e}_i,\mathbf{v}\right) \overset{(b)}{=} \sum_{i=1}^n \Phi(u_i\mathbf{e}_i,\mathbf{v}) \overset{(c)}{=} \sum_{i=1}^n u_i\Phi(\mathbf{e}_i,\mathbf{v}) \overset{(d)}{=}$$
$$= \sum_{i=1}^n u_i\Phi\left(\mathbf{e}_i,\sum_{j=1}^n v_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n u_iv_j\Phi(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j).$$

Označíme-li $f_{ij} = \Phi(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$, dostáváme:
$\{\mathbf{u}\}_\mathcal{B} = (u_1,\cdots,u_n),\ \{\mathbf{v}\}_\mathcal{B} = (v_1,\cdots,v_n)$:

$$\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f_{ij}u_iv_j. \tag{3.10}$$

Rozepišme nyní pro názornost sumační zápis (3.10):

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) & = & f_{11}u_1v_1 & + & f_{12}u_1v_2 & + & \cdots & + & f_{1n}u_1v_n & + \\
 & + & f_{21}u_2v_1 & + & f_{22}u_2v_2 & + & \cdots & + & f_{2n}u_2v_n & + \\
 & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & & & \cdots\cdots & \cdots \\
 & + & f_{i1}u_iv_1 & + & f_{i2}u_iv_2 & + & \cdots & + & f_{in}u_iv_n & + \\
 & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & & & \cdots\cdots & \cdots \\
 & + & f_{n1}u_nv_1 & + & f_{n2}u_nv_2 & + & \cdots & + & f_{nn}u_nv_n &
\end{array}$$

Tento zápis můžeme rovněž velmi úsporně zapsat maticově:

$$\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (u_1,\cdots,u_n)\mathbf{F}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

neboli

$$\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \{\mathbf{u}\}_\mathcal{B}\mathbf{F}\{\mathbf{v}\}_\mathcal{B}^T \tag{3.11}$$

(Přesvědčte se o tom!)

Zejména poslední z nich (maticový) bude velmi užitečný při odvozování či důkazech. Vždy si však pod ním představte názornější předchozí.

Definice 3.2.3 Buď Φ bilineární forma na $\mathbf{V}$, $\mathcal{B}$ libovolná báze $\mathbf{V}$, $\mathbf{F} = (f_{ij})$ matice formy Φ v bázi $\mathcal{B}$. Pak formuli (3.10) nazýváme *analytické vyjádření bilineární formy Φ v bázi $\mathcal{B}$.*[5]

Prvky $f_{11}, f_{12},\cdots,f_{nn}$ nazýváme *koeficienty analytického vyjádření v bázi $\mathcal{B}$.*

[5] Analytické vyjádření je homogenním polynomem, tedy *formou* ve smyslu teorie polynomů.

Napište analytické vyjádření skalárního součinu vektorů v ortonormální bázi a určete jeho matici! Jak by vypadala matice skalárního součinu v ortogonální bázi?

V předešlé úvaze jsme ukázali, jak k dané bilineární formě Φ sestrojit v libovolné bázi $\mathcal{B}$ její matici a jak pomocí této matice (tj. jejích prvků) určit hodnotu $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.
Předpokládejme nyní, že máme zvolenu bázi $\mathcal{B}$ a nechť máme dánu libovolnou čtvercovou matici $\mathbf{F} = (f_{ij})$ řádu n.
Zkonstruujme nyní zobrazení $\Phi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$ tak, že každé dvojici $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$, $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}} = (u_1, \cdots, u_n)$, $\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}} = (v_1, \cdots, v_n)$ přiřadíme hodnotu $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ takto:

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, \cdots, u_n)\mathbf{F} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Snadno se přesvědčíme (z vlastností násobení a sčítání matic), že takto definované zobrazení Φ splňuje podmínky definice 3.2.1 a jedná se tedy o bilineární formu. Také je zřejmé, že $\mathbf{F}$ je její matice v bázi $\mathcal{B}$ (proč?) a že Φ je touto maticí určena jednoznačně - pokud by totiž Ψ byla další bilineární forma mající v bázi $\mathcal{B}$ matici $\mathbf{F}$, pak by evidentně platilo $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ z $\mathbf{V}$.
Platí tedy následující věta:

Věta 3.2.4 *Je-li $\mathcal{B}$ libovolná báze prostoru $\mathbf{V}$, pak každá čtvercová matice řádu n je maticí právě jedné bilineární formy na $\mathbf{V}$.*

Platí tedy, že dvě bilineární formy se rovnají, právě když se v některé bázi (a pak tedy ve všech bázích) rovnají jejich matice.

Je zřejmé, že přechodem k jiné bázi se obecně změní matice a tím i analytické vyjádření dané bilineární formy. Ukažme si to na příkladu.

Příklad 3.2.5 Nechť $\dim \mathbf{V} = 2$, $T = \mathbb{R}$ a nechť ve zvolené bázi $\mathcal{B} = \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \rangle$ je bilineární forma Φ zadána:

$$f_{11} = \Phi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 2,\ f_{12} = \Phi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = -1,\ f_{21} = \Phi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 3,\ f_{22} = \Phi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = -1.$$

Je-li $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}} = (u_1, u_2)$, $\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}} = (v_1, v_2)$, pak její analytické vyjádření v bázi $\mathcal{B}$ zní (viz 3.10):

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2u_1v_1 - 1u_1v_2 + 3u_2v_1 - 1u_2v_2.$$

Např. pro $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}} = (1, 1)$, $\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}} = (4, -2)$ výjde $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 24$.

Zvolme nyní další bázi $\mathcal{B}' = \langle \mathrm{e}'_1, \mathrm{e}'_2 \rangle$ takto: $\{\mathrm{e}'_1\}_{\mathcal{B}} = (1, -2)$, $\{\mathrm{e}'_2\}_{\mathcal{B}} = (2, -1)$. Jak víme, pro souřadnice (u'_1, u'_2) vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\mathcal{B}'$ platí:

$$\begin{array}{rcl} u_1 &=& 1u'_1 + 2u'_2 \\ u_2 &=& -2u'_1 - 1u'_2 \end{array},$$

kde (u_1, u_2) jsou jeho souřadnice v $\mathcal{B}$.
Analogicky pro vektor $\mathbf{v}$.

Chceme-li nyní spočítat hodnotu $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ pomocí souřadnic $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ v bázi $\mathcal{B}'$, můžeme např. dosadit za u_1, u_2, v_1, v_2 jejich vyjádření pomocí čárkovaných souřadnic do předešlého analytického vyjádření Φ. Po úpravě (proveďte ji!) obdržíme analytické vyjádření formy Φ v čárkované bázi:

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -6u_1'v_1' - 9u_1'v_2' + 3u_2'v_1' + 3u_2'v_2'.$$

Spočteme, že zvolené vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ mají v $\mathcal{B}'$ souřadnice $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}'} = (-1, 1)$, $\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}'} = (0, 2)$ (jak?) a dosazením do právě odvozeného vyjádření zjistíme, že $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 24$, neboť hodnota $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je dána pouze zvolenou dvojicí vektorů (jde o zobrazení $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$).

Na konkrétním příkladu jsme si ukázali, jak se analytické vyjádření bilineární formy transformuje při změně báze. Takto bychom mohli postupovat i v obecném případě, avšak tento postup není příliš elegantní.
Pomocí maticového zápisu najdeme velmi jednoduchý vztah pro nalezení matice formy (a tím i jejího analytického vyjádření) v jiné bázi.

Zvolme ve $\mathbf{V}$ báze $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, $\mathbf{P}$ nechť je matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$. Mezi souřadnicemi vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ v $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ platí transformační vztah:

$$\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}} = \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}'}\mathbf{P}.$$

Buď Φ bilineární forma ne $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ její matice v $\mathcal{B}$. Dle (3.11): $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}}^T$. Po dosazení z transformačního vztahu:

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}'}\mathbf{P})\,\mathbf{F}\,(\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}'}\mathbf{P})^T = (\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}'}\mathbf{P})\,\mathbf{F}\left(\mathbf{P}^T\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}'}^T\right) = \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^T)\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}'}^T.$$

To ovšem znamená, že matice $\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^T$ je maticí $\mathbf{F}'$ formy Φ v bázi $\mathcal{B}'$.
Dokázali jsme tedy následující významnou větu:

Věta 3.2.6 *Buď Φ bilineární forma na $\mathbf{V}$. Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ jsou libovolné báze prostoru $\mathbf{V}$, $\mathbf{P}$ matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$. Je-li $\mathbf{F}$ matice formy Φ v bázi $\mathcal{B}$, pak pro matici $\mathbf{F}'$ formy Φ v bázi $\mathcal{B}'$ platí:*

$$\mathbf{F}' = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^T.$$

V předchozím příkladu je $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Dále $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Ověřte si provedením součinu dle předchozí věty, že skutečně vyjde $\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Vytkněme dva významné případy vztahu mezi hodnotami $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ a $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

Definice 3.2.7 Bilineární formu Φ na $\mathbf{V}$ nazveme

1. *symetrická*, jestliže $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}: \ \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$,
2. *antisymetrická*, jestliže $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}: \ \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

Příkladem symetrické bilineární formy je skalární součin, příkladem antisymetrické formy je vnější součin ve dvourozměrném vektorovém prostoru (proč?). Forma nulová je současně symetrická a antisymetrická a je jedinou formou této vlastnosti (proč?).

Samozřejmě uvedené dělení není úplné – existují formy, jež nejsou ani symetrické ani antisymetrické. Ukážeme si však, že ke *každé* bilineární formě lze jednoznačně přiřadit symetrickou a antisymetrickou formu. Nejprve zaveďme přirozeně součet forem a skalární násobek formy.

Definice 3.2.8 Buďte Φ, Ψ bilineární formy na $\mathbf{V}$, c skalár z T. Pak *součtem bilineárních forem* Φ, Ψ rozumíme zobrazení $\Phi + \Psi : \ \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$ definované vztahem:

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}: \ (\Phi + \Psi)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

a *c-násobkem bilineární formy* Φ rozumíme zobrazení $c\Phi : \ \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$ definované vztahem

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}: \ (c\Phi)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c \cdot \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Snadno vidíme (prověřte!), že součtem bilineárních forem stejně jako skalárním násobkem bilineární formy je opět *bilineární forma*.

Následující věta bezprostředně vyplývá z předchozí definice a z definice matice bilineární formy (jak?).

Věta 3.2.9 *Buďte Φ, Ψ bilineární formy na $\mathbf{V}$, c skalár z T. Nechť $\mathbf{F}$, resp. $\mathbf{G}$, je matice formy Φ, resp. Ψ v libovolné bázi $\mathcal{B}$. Pak*

1. *$\mathbf{F} + \mathbf{G}$ je matice bilineární formy $\Phi + \Psi$ v $\mathcal{B}$,*
2. *$c\mathbf{F}$ je matice bilineární formy $c\Phi$ v $\mathcal{B}$.*

Uvažujme nyní libovolnou bilineární formu Φ.

Definujme nyní dvojici zobrazení $\Phi_S, \Phi_A : \ \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$ následujícími formulemi:

$$\begin{aligned} \Phi_S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \tfrac{1}{2}\left(\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})\right) \\ \Phi_A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \tfrac{1}{2}\left(\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u})\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Snadno vidíme, že Φ_S je symetrická a Φ_A antisymetrická bilineární forma.

Z (3.12) je patrno, že $\forall(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$: $\Phi_S(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \Phi_A(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})$, neboli v souladu s definicí 3.2.8: $\Phi = \Phi_S + \Phi_A$.

Nechť Ψ_S, Ψ_A je další dvojice bilineárních forem, z nichž první je symetrická a druhá antisymetrická, pro něž $\Phi = \Psi_S + \Psi_A$.

To tedy znamená (viz definice 3.2.8), že $\forall(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$:

$$\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \Psi_S(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \Psi_A(\mathbf{u},\mathbf{v}) \tag{3.13}$$

a současně

$$\Phi(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \Psi_S(\mathbf{v},\mathbf{u}) + \Psi_A(\mathbf{v},\mathbf{u}) \tag{3.14}$$

Protože Ψ_S je symetrická a Ψ_A antisymetrická, plyne z (3.14):

$$\Phi(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \Psi_S(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \Psi_A(\mathbf{u},\mathbf{v}) \tag{3.15}$$

Sečtením rovností (3.13) a (3.15) dostáváme $\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v},\mathbf{u}) = 2\Psi_S(\mathbf{u},\mathbf{v})$, neboli (viz (3.12)) $\Phi_S = \Psi_S$. Podobně (odečtením) odvodíme $\Phi_A = \Psi_A$.

Dokázali jsme tedy platnost následující věty, která bude mít zásadní význam pro konstrukci kvadratických forem. V jejím odvození byla patrna nutnost úvodního požadavku, aby existoval v T prvek $\frac{1}{2}$, tj. aby $\mathrm{char} T \neq 2$.

Věta 3.2.10 *Buď Φ bilineární forma na $\mathbf{V}$. Pak existuje právě jedna symetrická bilineární forma Φ_S a právě jedna antisymetrická bilineární forma Φ_A tak, že*

$$\Phi = \Phi_S + \Phi_A.$$

Odvoďme nyní vztah pro matice forem Φ_S, Φ_A (tyto formy se nazývají *symetrická* a *antisymetrická složka formy* Φ):

Nechť forma Φ je v některé bázi $\mathcal{B}$ dána maticí $\mathbf{F}$.
Je-li $\mathcal{B}$ některá báze $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ matice formy Φ v $\mathcal{B}$, pak dle (3.11) platí:[6]

$$\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \{\mathbf{u}\}\mathbf{F}\{\mathbf{v}\}^T \tag{3.16}$$

$$\Phi(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \{\mathbf{v}\}\mathbf{F}\{\mathbf{u}\}^T. \tag{3.17}$$

Transponujeme-li obě strany druhé rovnosti[7], dostáváme

$$\Phi(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \left(\{\mathbf{v}\}\mathbf{F}\{\mathbf{u}\}^T\right)^T = \{\mathbf{u}\}\mathbf{F}^T\{\mathbf{v}\}^T. \tag{3.18}$$

[6] Dohodněme se, že pokud neuvažujeme současně více bází, budeme nadále v symbolu $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}$ vynechávat znak báze, o niž se jedná, a psát jen $\{\mathbf{u}\}$.

[7] Nezapomeňme, že $\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})$ je skalár, a tedy se transpozicí nemění.

Vyjádřeme nyní $\Phi_S(\mathbf{u},\mathbf{v})$ a $\Phi_A(\mathbf{u},\mathbf{v})$ ze vztahů (3.12) s použitím (3.16) a (3.18):

$$\Phi_S(\mathbf{u},\mathbf{v})=\tfrac{1}{2}\left(\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})+\Phi(\mathbf{v},\mathbf{u})\right)=\tfrac{1}{2}\left(\{\mathbf{u}\}\mathbf{F}\{\mathbf{v}\}^T+\{\mathbf{u}\}\mathbf{F}^T\{\mathbf{v}\}^T\right)=\{\mathbf{u}\}\left[\tfrac{1}{2}(\mathbf{F}+\mathbf{F}^T)\right]\{\mathbf{v}\}^T,$$

$$\Phi_A(\mathbf{u},\mathbf{v})=\tfrac{1}{2}\left(\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})-\Phi(\mathbf{v},\mathbf{u})\right)=\tfrac{1}{2}\left(\{\mathbf{u}\}\mathbf{F}\{\mathbf{v}\}^T-\{\mathbf{u}\}\mathbf{F}^T\{\mathbf{v}\}^T\right)=\{\mathbf{u}\}\left[\tfrac{1}{2}(\mathbf{F}-\mathbf{F}^T)\right]\{\mathbf{v}\}^T.$$

Protože $\mathbf{u},\mathbf{v}$ byly zvoleny libovolně, plyne odtud, že formy Φ_S a Φ_A mají v bázi $\mathcal{B}$ matice po řadě $\frac{1}{2}(\mathbf{F}+\mathbf{F}^T)$ a $\frac{1}{2}(\mathbf{F}-\mathbf{F}^T)$.
Platí tedy následující věta:

Věta 3.2.11 *Buď Φ bilineární forma na $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ její matice v libovolné bázi, Φ_S,Φ_A nechť jsou její složky dle předchozí věty. Pak pro matici $\mathbf{F}_S$ formy Φ_S a matici $\mathbf{F}_A$ formy Φ_A v bázi $\mathcal{B}$ platí:*

$$\mathbf{F}_S=\tfrac{1}{2}(\mathbf{F}+\mathbf{F}^T)$$

$$\mathbf{F}_A=\tfrac{1}{2}(\mathbf{F}-\mathbf{F}^T).$$

Dle následující věty poznáme snadno již z matice formy (v libovolné bázi), zda jde o formu symetrickou či antisymetrickou.

Věta 3.2.12 *Nechť Φ je bilineární forma na $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ její matice v libovolné bázi. Pak platí:*

1. *Φ je symetrická, právě když $\mathbf{F}=\mathbf{F}^T$,*
2. *Φ je antisymetrická, právě když $\mathbf{F}=-\mathbf{F}^T$*

Důkaz: Nechť $\Phi=\Phi_S+\Phi_A$ je rozklad formy Φ na součet symetrické a antisymetrické formy a platí tedy pro libovolné $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})&=\Phi_S(\mathbf{u},\mathbf{v})+\Phi_A(\mathbf{u},\mathbf{v})\\ \Phi(\mathbf{v},\mathbf{u})&=\Phi_S(\mathbf{u},\mathbf{v})-\Phi_A(\mathbf{u},\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Odtud plyne, že Φ je symetrická, právě když Φ_A je nulová forma (proč?) a její matice $\mathbf{F}_A$ je tedy nulová, čili (dle věty 3.2.11) $\mathbf{F}=\mathbf{F}^T$.

Podobně, aby Φ byla antisymetrická, je nutné a stačí, aby Φ_S byla nulová forma, neboli $\mathbf{F}=-\mathbf{F}^T$.

Zřejmě, je-li $\mathbf{F}=(f_{ij})$, pak $\mathbf{F}=\mathbf{F}^T$ znamená $f_{ij}=f_{ji}$ a $\mathbf{F}=-\mathbf{F}^T$ znamená $f_{ij}=-f_{ji}$, obé pro všechna $1\le i,j\le n$. V prvním případě je tedy matice $\mathbf{F}$ souměrná podle hlavní diagonály, v druhém se se záměnou indexů mění znaménko prvku matice.[8] (Jak tedy vypadá hlavní diagonála matice antisymetrické formy?) □

[8] Takové matice se shodně nazývají symetrické, resp. antisymetrické.

V dalším výkladu bude užitečným pojmeme hodnost matice bilineární formy. Zjistěme, zda je táž pro matice téže formy nad různými bázemi.

Buď Φ bilineární forma, $\mathbf{F}$ její matice v bázi $\mathcal{B}$. Označme r hodnost $\mathbf{F}$. Přejděme nyní k libovolné další bázi $\mathcal{B}'$, nechť $\mathbf{P}$ je matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$. Pak pro matici $\mathbf{F}'$ formy Φ v bázi $\mathcal{B}'$ platí (dle věty 3.2.6): $\mathbf{F}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T$.

Připomeňme, že matice přechodu je maticí regulární (proč?). Pak lze konečným počtem elementárních řádkových transformací převést matici jednotkovou na tuto matici – tj. označíme-li $\mathbf{T}_1, \cdots, \mathbf{T}_k$ matice těchto transformací – víme, že platí:

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_k(\mathbf{T}_{k-1} \cdots (\mathbf{T}_2(\mathbf{T}_1\mathbf{E})) \cdots) = \mathbf{T}_k\mathbf{T}_{k-1} \cdots \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{E}.$$

Rovněž víme, že provedením elementární řádkové transformace se hodnost matice nezmění. Vyjádříme-li si nyní součin $\mathbf{PF}$ dosazením za $\mathbf{P}$, obdržíme

$$\mathbf{PF} = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{T}_k\mathbf{T}_{k-1} \cdots \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{F},$$

tedy pomocí elementárních řádkových transformací lze přejít od $\mathbf{F}$ k $\mathbf{PF}$, a tedy $h(\mathbf{PF}) = h(\mathbf{F})$.[9]

Matice $\mathbf{P}^T$ je ovšem také regulární, a proto analogicky

$$h((\mathbf{PF})\mathbf{P}^T) = h(\mathbf{PF}) = h(\mathbf{F}), \text{ neboli } h(\mathbf{F}') = h(\mathbf{F}) = r.$$

Hodnost matice formy Φ je tedy táž *ve všech bázích* prostoru $\mathbf{V}$.

Následující definice je proto korektní.

Definice 3.2.13 Buď Φ bilineární forma na $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ nechť je její matice v libovolné bázi. Pak *hodností bilineární formy* Φ rozumíme hodnost její matice $\mathbf{F}$ a značíme $h(\Phi)$.

Všimněme si nyní determinantu matice bilineární formy. Je-li $\mathbf{F}$ matice bilineární formy Φ v bázi $\mathcal{B}$ a $\mathbf{F}'$ její matice v bázi $\mathcal{B}'$, pak dle věty 3.2.6 platí $\mathbf{F}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T$, kde $\mathbf{P}$ je matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$. Označíme-li $\delta = \det \mathbf{F}$ a $\delta' = \det \mathbf{F}'$, platí:

$$\delta' = \det(\mathbf{P} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T) = \det \mathbf{P} \cdot \det \mathbf{P}^T \cdot \det \mathbf{F} = (\det \mathbf{P})^2 \cdot \delta. \tag{3.19}$$

Obecně se tedy oba determinanty nerovnají – rovnost $\delta = \delta'$ nastane, právě když $(\det \mathbf{P})^2 = 1$. (Tuto vlastnost, jak víme, mají např. ortogonální transformace soustavy souřadné v euklidovských (vektorových) prostorech).

Je-li však navíc $\mathbf{V}$ prostor nad reálnými čísly [10] (tj. $T = \mathbb{R}$), pak protože matice $\mathbf{P}$ je regulární a tedy $(\det \mathbf{P})^2 > 0$, plyne $\operatorname{sgn}\delta = \operatorname{sgn}\delta'$.

Dokázali jsme tedy následující větu:

[9] Dokázali jsme tedy, že vynásobíme-li matici $\mathbf{X}$ libovolnou *regulární* maticí $\mathbf{Y}$, pak $h(\mathbf{YX}) = h(\mathbf{X})$. Zaregistrujme tuto skutečnost.

[10] Stačilo by, aby T bylo uspořádané těleso.

Věta 3.2.14 *Buď Φ bilineární forma na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$. Pak znaménko determinantu matice formy Φ nezávisí na volbě báze.*

Poznámka 3.2.15 Společná vlastnost všech matic dané bilineární formy (tj. vlastnost nezávislá na výběru báze) je tedy vlastností formy Φ. Taková vlastnost se nazývá *invariant bilineární formy* Φ.

Hodnost bilineární formy, znaménko determinantu formy v některé bázi jsou příklady invariantů.

Invariantem však není například determinant matice formy.

3.3 Kvadratické formy na vektorových prostorech

Pomocí bilineární formy $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to T$ zkonstruujme zobrazení $\mathbf{V} \to T$.

Definice 3.3.1 Buď Φ bilineární forma na $\mathbf{V}$. Zobrazení $\Phi_2 : \mathbf{V} \to T$ definované vztahem

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} : \ \Phi_2(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

se nazývá *kvadratická forma na* $\mathbf{V}$ *určená bilineární formou* Φ.

Uvažujeme-li na euklidovském vektorovém prostoru skalární součin jako bilineární formu ($\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$), pak kvadratická forma jím určená je druhá mocnina délky vektoru ($\Phi_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$).

Zvolme ve $\mathbf{V}$ bázi $\mathcal{B}$ a nechť je dána bilineární forma Φ na $\mathbf{V}$ maticí $\mathbf{F}$. *Analytické vyjádření* kvadratické formy Φ_2 pak obdržíme z analytického vyjádření formy Φ, dosadíme-li do vztahů (3.10) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$:

$\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}} = (u_1, \cdots, u_n)$

$$\Phi_2(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} u_i u_j, \tag{3.20}$$

po rozepsání

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Phi_2(\mathbf{u}) & = & f_{11}u_1^2 & + & f_{12}u_1u_2 & + \cdots + & f_{1n}u_1u_n & + \\
 & + & f_{21}u_2u_1 & + & f_{22}u_2^2 & + \cdots + & f_{2n}u_2u_n & + \\
 & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
 & + & f_{n1}u_nu_1 & + & f_{n2}u_nu_2 & + \cdots + & f_{nn}u_n^2 &
\end{array}$$

Maticový zápis

$$\Phi_2(\mathbf{u}) = (u_1, \cdots, u_n)\mathbf{F} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

neboli

$$\Phi_2(\mathbf{u}) = \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}^T. \tag{3.21}$$

Naskýtá se otázka, kolika bilineárními formami je určená táž kvadratická forma. Uvažujme např. dvojrozměrný vektorový prostor nad $\mathbb{R}$:
Zvolme v něm bázi $\mathcal{B}$ a uvažujme dvě *různé* bilineární formy Φ, Ψ určené po řadě maticemi $\mathbf{F}, \mathbf{G}$:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analytické vyjádření jimi určených kvadratických forem jsou: $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}} = (u_1, u_2)$

$$\Phi_2(\mathbf{u}) = 2u_1^2 + u_1u_2 + 3u_2u_1 + u_2^2 = 2u_1^2 + 4u_1u_2 + u_2^2$$
$$\Psi_2(\mathbf{u}) = 2u_1^2 + 2u_1u_2 + 2u_2u_1 + u_2^2 = 2u_1^2 + 4u_1u_2 + u_2^2.$$

Tedy $\Phi_2 = \Psi_2$, ačkoli $\Phi \neq \Psi$.

To znamená, že zobrazení $\Phi \mapsto \Phi_2$ není bijekcí množiny *všech* bilineárních forem a množiny forem kvadratických.
Tento „nedostatek“ odstraníme tím, že nebudeme uvažovat *všechny* bilineární formy.

Buď Φ libovolná bilineární forma, rozložme ji dle věty 3.2.10 na součet symetrické a antisymetrické formy $\Phi = \Phi_S + \Phi_A$. Pak platí: $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}$:

$$\Phi_2(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \Phi_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \Phi_A(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Čemu se rovná $\Phi_A(\mathbf{u}, \mathbf{u})$? Forma Φ_A je antisymetrická, a tedy

$$\Phi_A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -\Phi_A(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Avšak (v tělese charakteristiky různé od 2) je prvek roven prvku k sobě opačnému právě, když jde o prvek nulový. Tedy $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} : \Phi_A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$. To znamená, že

$$\Phi_2(\mathbf{u}) = \Phi_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \Phi_{S_2}(\mathbf{u}),$$

neboli bilineární forma a její symetrická složka určují *tutéž* kvadratickou formu. Platí tedy věta:

Věta 3.3.2 *Dvě bilineární formy na $\mathbf{V}$ určují jedinou kvadratickou formu na $\mathbf{V}$ právě tehdy, když mají tytéž symetrické složky.*

Důsledkem právě uvedené věty je věta následující, která zodpovídá úvodem položenou otázku:

Věta 3.3.3 *Každá kvadratická forma na $\mathbf{V}$ je určená právě jednou* symetrickou *bilineární formou na $\mathbf{V}$.*

To znamená, že ke konstrukci všech kvadratických forem na $\mathbf{V}$ stačí uvažovat jen *symetrické* bilineární formy.

Definice 3.3.4 Symetrická bilineární forma Φ určující kvadratickou formu Φ_2 se nazývá *polární bilineární forma kvadratické formy* Φ_2.

Úmluva 3.3.5 V následujících částech budeme předpokládat, že každá kvadratická forma Φ_2 je určena symetrickou bilineární formou Φ (tedy právě svou polární bilineární formou).

Definice 3.3.6 *Maticí kvadratické formy* Φ_2 *v bázi* $\mathcal{B}$ rozumíme matici její polární bilineární formy Φ v bázi $\mathcal{B}$.

Hodností kvadratické formy Φ_2 rozumíme hodnost její polární bilineární formy Φ.

Vzhledem k větě 3.3.3 má každá kvadratická forma nad danou bází *jedinou* matici.

Zaveďme nyní pojem *sdružených směrů*, který bude významný při studiu kuželoseček i kvadrik.

Definice 3.3.7 Buď Φ_2 kvadratická forma na $\mathbf{V}$. O vektorech $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ řekneme, že jsou *sdružené*[11] *vzhledem ke kvadratické formě* Φ_2, jestliže

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0.$$

O směrech $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}]$ řekneme, že jsou *sdružené vzhledem ke kvadratické formě* Φ_2, jestliže jsou vzhledem k Φ sdružené vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Poznamenejme, že nulový vektor je sdružen se všemi vektory.

Jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sdružené vzhledem k Φ_2, pak z bilinearity formy Φ plyne, že rovněž jejich libovolné násobky jsou sdružené vzhledem k Φ_2 a tedy definice sdruženosti *směrů* je nezávislá na výběru jejich reprezentantů a je tedy korektní.

Poznámka 3.3.8 Je-li $\mathbf{F}$ matice kvadratické formy Φ_2 v některé bázi $\mathcal{B}$, pak vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou sdružené vzhledem k formě Φ_2, právě když

$$\{\mathbf{u}\}\mathbf{F}\{\mathbf{v}\}^T = 0.$$

Definice 3.3.9 Vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se nazývá *singulární vektor kvadratické formy* Φ_2, jestliže je sdružený vzhledem k Φ_2 se všemi vektory z $\mathbf{V}$.

V opačném případě se nazývá *regulární vektor kvadratické formy* Φ_2.

Směr určený vektorem singulárním (regulárním) vzhledem k Φ_2 se nazývá *singulární (regulární) směr kvadratické formy* Φ_2.

[11] Φ je symetrická, proto „symetričnost“ definice je oprávněná.

Definice 3.3.10 Množina singulárních vektorů kvadratické formy Φ_2 se nazývá *vrchol kvadratické formy* Φ_2 a značí se $\mathbf{N}(\Phi)$.[12]

Vyšetřeme nyní množinu singulárních vektorů dané kvadratické formy Φ_2. Zvolme ve $\mathbf{V}$ bázi $\mathcal{B}$, $\mathbf{F}$ nechť je matice formy Φ_2 v bázi $\mathcal{B}$.

Vektor $\mathbf{v}$ je singulární, právě když

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}: \;\; \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0,$$

neboli v maticové symbolice $\{\mathbf{u}\}\mathbf{F}\{\mathbf{v}\}^T = \{\mathbf{u}\}(\mathbf{F}\{\mathbf{v}\}^T) = 0$. Má-li tato rovnost být splněna pro každý vektor $\mathbf{u}$, tedy i jednotlivé vektory báze $\mathcal{B}$, musí být $(\mathbf{F}\{\mathbf{v}\}^T)$ roven nulovému sloupcovému vektoru,[13] tedy

$$\mathbf{F}\{\mathbf{v}\}^T = \{\mathbf{o}\}^T, \tag{3.22}$$

což představuje soustavu lineárních homogenních rovnic o matici $\mathbf{F}$.
Rozepišme ji pro přehlednost: $\{\mathbf{v}\} = (v_1, \cdots, v_n)$

$$\begin{array}{ccccccccc} f_{11}v_1 & + & f_{12}v_2 & + & \cdots & + & f_{1n}v_n & = & 0 \\ f_{21}v_1 & + & f_{22}v_2 & + & \cdots & + & f_{2n}v_n & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & & \cdots & & \cdots\cdots & \\ f_{n1}v_1 & + & f_{n2}v_2 & + & \cdots & + & f_{nn}v_n & = & 0 \end{array}. \tag{3.23}$$

Řešením této soustavy obdržíme souřadnice právě všech singulárních vektorů formy Φ_2. Zároveň odtud vyplývá, že množina těchto vektorů tvoří podprostor dimenze $n - h(\mathbf{F})$, tj. $n - h(\Phi_2)$.
Než vyslovíme dokázanou větu, uveďme ještě, že soustavu rovnic (3.23) je možné odvodit i ze sumačního zápisu $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ (3.10). (Jak?)

Věta 3.3.11 *Vrchol kvadratické formy Φ_2 je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Pro jeho dimenzi platí:*

$$\dim \mathbf{N}(\Phi) = n - h(\Phi).$$

Poznámka 3.3.12 Ze zápisu (3.22)[14] plyne, že vektor $\mathbf{v}$ je singulárním vektorem formy Φ_2,

[12]Pojem vrcholu lze definovat i pro bilineární formy. Není-li však bilineární forma symetrická, rozlišuje se tzv. levý a pravý vrchol.
[13]Podrobněji: Nechť $\{\mathbf{u}\} = (u_1, \cdots, u_n)$ a sloupcový vektor $\mathbf{F}\{\mathbf{v}\}^T$ má složky $y_1, \cdots, y_n$. Dosadíme-li za $\mathbf{u}$ i-tý vektor báze $\mathcal{B}$, jsou všechny jeho souřadnice, s výjimkou i-té, rovny 0 a i-tá je rovna 1. Vyšetřovaný součin je pak roven y_i. Postupnou volbou $i = 1, \cdots, n$ obdržíme $y_1 = \cdots = y_n = 0$.
[14]Jeho transpozicí.

právě když jeho souřadnice $\{\mathbf{v}\}$[15] v *libovolné bázi* jsou *vlastním vektorem* matice $\mathbf{F}$ formy Φ_2 příslušným vlastnímu číslu $\lambda = 0$.

Poznámka 3.3.13 Z definice 3.3.9 vyplývá, že množina regulárních vektorů formy Φ_2 je rovna množinovému rozdílu $\mathbf{V} \setminus \mathbf{N}(\Phi)$. Protože $\mathbf{N}(\Phi)$ tvoří dle věty 3.3.11 podprostor ve $\mathbf{V}$, množina regulárních vektorů *netvoří* podprostor ve $\mathbf{V}$ (proč?). Na rozdíl od singulárních vektorů tedy není pravdou, že by libovolná lineární kombinace regulárních vektorů byl opět regulární vektor.

Rozdělme nyní kvadratické formy do dvou skupin.

Definice 3.3.14 Kvadratická forma Φ_2 na $\mathbf{V}$ se nazývá *singulární*, existuje-li alespoň jeden nenulový singulární vektor této formy.

V opačném případě se nazývá *regulární*.

Singulární kvadratická forma tedy má alespoň jeden singulární směr, regulární kvadratická forma nemá žádný singulární směr.

Věta 3.3.15 *Buď Φ_2 kvadratická forma na $\mathbf{V}$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *Φ_2 je singulární;*
2. *$\mathbf{N}(\Phi) \neq \{\mathbf{o}\}$;*
3. *$h(\Phi) < n$;*
4. *$\delta = 0$, kde δ je determinant matice formy Φ_2 v libovolné bázi.*

Důkaz:
$1 \Leftrightarrow 2$ – vyplývá přímo z definice singulární formy.
$2 \Leftrightarrow 3$ – dle věty 3.3.11 je $\mathbf{N}(\Phi)$ netriviální, právě když $n - h(\Phi) \neq 0$.
$3 \Leftrightarrow 4$ – je zřejmé. □

Forma je singulární, právě když není regulární. Proto je následující věta přímým důsledkem věty 3.3.15.

[15] Přesnější by bylo říci „vektor souřadnic“, pro zjednodušení však nadále pojmem „souřadnice“ budeme rozumět onu uspořádanou n-tici.

Věta 3.3.16 *Buď Φ_2 kvadratická forma na $\mathbf{V}$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *Φ_2 je regulární;*
2. *$\mathrm{N}(\Phi) = \{\mathbf{o}\}$;*
3. *$h(\Phi) = n$;*
4. *$\delta \neq 0$, kde δ je determinant matice formy Φ_2 v libovolné bázi.*

Na svém vrcholu je každá kvadratická forma nulová (proč?). Ukážeme, že každá nenulová singulární forma na $\mathbf{V}$ je regulární na jistém podprostoru $\mathbf{M} \subseteq\subsetneq \mathbf{V}$.

Věta 3.3.17 *Buď Φ_2 nenulová kvadratická forma na $\mathbf{V}$, $\mathrm{N}(\Phi)$ její vrchol. Je-li $\mathbf{M} \subseteq\subsetneq \mathbf{V}$ takový, že $\mathrm{N}(\Phi) \oplus \mathbf{M} = \mathbf{V}$, pak restrikce $\Phi_2|\mathbf{M}$ je regulární kvadratická forma na $\mathbf{M}$.*

Důkaz: Namísto $\mathrm{N}(\Phi)$ pišme jen $\mathbf{N}$. Pak, jak víme z algebry, existuje (obecně ne jediný) podprostor $\mathbf{M}$ tak, že $\mathbf{N} \oplus \mathbf{M} = \mathbf{V}$ (proč?).
Nyní dokažme, že $\Phi_2|\mathbf{M}$ je regulární.

Označíme-li $\varphi = \Phi|\mathbf{M}\times\mathbf{M}$, dostáváme bilineární formu, která je polární formou kvadratické formy $\Phi_2|\mathbf{M}$, tj. $\varphi_2 = \Phi_2|\mathbf{M}$ (proč?).
Vrchol $\mathbf{Q}$ této formy tvoří vektory z $\mathbf{M}$, které jsou sdruženy vzhledem k φ (a tím i k Φ) se všemi vektory z $\mathbf{M}$, neboli

$$\mathbf{v} \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow \forall \mathbf{u} \in \mathbf{M} : \ 0 = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Buď $\mathbf{v} \in \mathbf{Q}$. Zvolme libovolně $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. Pak $\mathbf{u}$ lze jednoznačně psát:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u_N} + \mathbf{u_M}, \ \mathbf{u_N} \in \mathbf{N}, \ \mathbf{u_M} \in \mathbf{M}.$$

Pak $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u_N}) = 0$, neboť $\mathbf{u_N} \in \mathbf{N}$. A protože $\mathbf{u_M} \in \mathbf{M}$, $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u_M}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u_M}) = 0$. Nyní

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u_N} + \mathbf{u_M}) = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u_N}) + \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u_M}) = 0,$$

což ovšem znamená, že $\mathbf{v} \in \mathbf{N}$, neboť je vzhledem k Φ sdružen s libovolným $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. Dostáváme $\mathbf{v} \in \mathbf{Q} \cap \mathbf{N}$ a následně $\mathbf{v} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$, neboť $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{M}$. Vzhledem k tomu, že $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \{\mathbf{o}\}$ (proč?), obdrželi jsme $\mathbf{v} = \mathbf{o}$, a tak vrchol kvadratické formy $\varphi_2 = \Phi_2|\mathbf{M}$ je triviální. Podle věty 3.3.16 (podmínka 1) je tato forma $\Phi_2|\mathbf{M}$ regulární. $\square$

Analytické vyjádření kvadratické formy je obecně dáno formulí (3.20). V následující části si ukážeme, že ke každé kvadratické formě existují báze, v nichž se analytické vyjádření značně zjednoduší a bude obsahovat jen kvadratické členy.

Definice 3.3.18 Buď Φ_2 kvadratická forma na $\mathbf{V}$. Báze $\mathcal{B} = \langle \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n \rangle$ prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá *polární báze vzhledem ke kvadratické formě* Φ_2, jestliže pro všechna $i, j = 1, \cdots, n$ platí:

$$i \neq j \Rightarrow \Phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0.$$

Poznámka 3.3.19 Báze je tedy polární vzhledem k Φ_2, právě když každé její dva různé vektory jsou *sdružené* vzhledem k Φ_2.

Jak vypadá matice $\mathbf{F}$ formy Φ_2 v polární bázi? Všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou nulové (proč?). Jde o tzv. *diagonální matici*:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Počet nenulových prvků této matice udává přímo hodnost formy Φ_2.

Analytické vyjádření formy Φ_2 v polární bázi pak nabývá jednoduchého tvaru: Je-li $\{\mathbf{x}\} = (x_1, \cdots, x_n)$, pak

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_{ii} x_i^2, \tag{3.25}$$

obsahuje tedy jen druhé mocniny jednotlivých souřadnic.

Uvažujeme-li v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ formu Φ_2, jejíž polární bilineární formou je skalární součin ($\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$), pak *ortogonální báze* prostoru $\mathbf{V}$ jsou právě všechny polární báze vzhledem k uvažované formě.

Přirozená otázka je, zda ke každé kvadratické formě takovou bázi nalezneme.

Věta 3.3.20 *Ke každé kvadratické formě na* $\mathbf{V}$ *existuje polární báze prostoru* $\mathbf{V}$.

Důkaz: Je-li Φ_2 nulová forma, pak je libovolná báze k ní polární (proč?).
Nechť Φ_2 není nulová. Pokračujme matematickou indukcí pro $n = \dim \mathbf{V}$.

(i) $n = 1$. Pak není splněn předpoklad implikace v definici polární báze (proč?), a tedy každá báze prostoru $\mathbf{V}$ je polární vzhledem k Φ_2.

(ii) Předpokládejme platnost věty pro prostory dimenze $n - 1$.
Buď $\mathbf{e}_1 \in \mathbf{V}$ takový, že $\Phi_2(\mathbf{e}_1) \neq 0$. Označme $\mathbf{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V}, \Phi(\mathbf{e}_1, \mathbf{x}) = 0\}$.[16]
Vyšetřeme množinu $\mathbf{W}$. Zvolme ve $\mathbf{V}$ některou bázi $\mathcal{C}$, $\mathbf{F}$ ať je matice Φ nad $\mathcal{C}$. Pak

$$\mathbf{x} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow \{\mathbf{e}_1\}\mathbf{F}\{\mathbf{x}\}^T = 0. \tag{3.26}$$

[16] Jde o vektory sdružené s $\mathbf{e}_1$.

Položíme-li $(a_1, \cdots, a_n) = \{\mathbf{e}_1\}\mathbf{F}$ a $\{\mathbf{x}\} = (x_1, \cdots, x_n)$,pak poslední maticovou rovnost přepíšeme:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Řešení této soustavy rovnic (o jedné rovnici) tvoří $n-1$-rozměrný podprostor (protože $\Phi_2(\mathbf{e}_1) \neq 0$, je alespoň jedno $a_i \neq 0$). Tedy $\mathbf{W} \subseteq\subseteq \mathbf{V}$, $\dim \mathbf{W} = n - 1$.

Zřejmě restrikce $\Phi_2|\mathbf{W}$ formy Φ_2 na podprostor $\mathbf{W}$ je kvadratická forma na $\mathbf{W}$ (co je její polární bilineární formou?). Pak podle indukčního předpokladu existuje na $\mathbf{W}$ polární báze vzhledem k $\Phi_2|\mathbf{W}$. Označme ji $\langle \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\rangle$ – pak $\forall i \neq j,\ 2 \leq i, j \leq n :$ $\Phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$.

Vektor $\mathbf{e}_1 \notin \mathbf{W}$ (neboť $\Phi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \neq 0$), nelze jej tedy psát jako lineární kombinaci (lineárně nezávislých) vektorů $\mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ a proto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ jsou lineárně nezávislé a tvoří tedy bázi ve $\mathbf{V}$. Tato báze je polární, neboť i $\Phi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_j) = 0, 2 \leq j \leq n$, (viz (3.26)).

$\square$

Uvedený důkaz poskytuje zároveň jeden z postupů, jak polární bázi nalézt – opakováním indukčního kroku pro prostor $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{n-1}$ přejdeme k prostoru $\mathbf{W}_{n-2}$ a tak dále, až nakonec máme nalézt polární bázi v prostoru $\mathbf{W}_1$, což je triviální – je jí nenulový prvek z $\mathbf{W}_1$.[17]

Z tohoto postupu rovněž vyplývá, že polární báze k dané formě není obecně jediná.

Ilustrujme tento postup alespoň na jednom příkladu:

Příklad 3.3.21 Na prostoru $\mathbf{V}_3$ je dána kvadratická forma Φ_2 svým analytickým vyjádřením v jisté bázi $\mathcal{C}$:

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x1x_3 + 4x_2x_3.$$

Najděte (některou) bázi polární vzhledem ke kvadratické formě Φ_2.

Řešení:

Sestavíme matici formy Φ_2 v bázi $\mathcal{C}$:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nejprve najdeme vektor $\mathbf{e}_1 :\ \Phi_2(\mathbf{e}_1) \neq 0$. Například $\{\mathbf{e}_1\}_\mathcal{C} = (1, 0, 0,)$.[18] Podprostor $\mathbf{W}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V},\ \Phi(\mathbf{e}_1, \mathbf{x}) = 0\}$ je dán podmínkou $\{\mathbf{e}_1\}\mathbf{F}\{\mathbf{x}\}^T = 0$, tj.

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0.$$

[17] Narazíme-li ovšem v průběhu tohoto postupu na podprostor W_k, na němž již je forma Φ nulová, doplníme dosud získané elementy polární báze libovolnými vektory tvořícími bázi W_k.

[18] Znak $\mathcal{C}$ budeme u souřadnic v tomto případě nadále vynechávat.

Nyní znovu proveďme indukční krok na $\mathbf{W}_2$. Nejprve najděme $\mathrm{e}_2 \in \mathbf{W}_2$ tak, aby $\Phi_2(\mathrm{e}_2) \neq 0$. Je to např. vektor $\{\mathrm{e}_2\} = (1, 1, 0)$.
Nyní ve $\mathbf{W}_2$ zkonstruujme podprostor $\mathbf{W}_1$ vektorů sdružených s e_2 – tj.

$$\mathbf{x} \in \mathbf{W}_1 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{W}_2 \wedge \Phi(\mathbf{e}_2, \mathbf{x}) = 0,$$

tj.

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \wedge 3x_2 + x_3 = 0.$$

Těmto podmínkám již vyhovuje jediný směr $(\mathbf{W}_1)$ určený vektorem e_3, $\{\mathrm{e}_3\} = (1, -2, 6)$.
Množina $\mathcal{B} = \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3 \rangle$ je bází $\mathbf{V}$ polární vzhledem k Φ_2.
Proveďme zkoušku – nalezněme analytické vyjádření formy Φ_2 v bázi $\mathcal{B}$:
Matice $\mathbf{P}$ přechodu od $\mathcal{C}$ k $\mathcal{B}$ má tvar

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

podle věty 3.2.6 je matice $\mathbf{F}'$ formy Φ_2 v $\mathcal{B}$ rovna součinu $\mathbf{PFP}^T$, tedy

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}.$$

Odtud je patrno, že $\mathcal{B}$ je skutečně bází polární vzhledem k Φ_2 (jak zní analytické vyjádření formy Φ_2 v bázi $\mathcal{B}$?).

Rovněž známou Gramm-Schmidtovu metodu hledání ortogonální báze lze snadno zobecnit na metodu nalezení polární báze libovolné kvadratické formy (zkuste si promyslet, jak).

Poznámka 3.3.22 Všimněme si nyní případu, kdy $\mathbf{V}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$:
Uvažujme kvadratickou formu Φ_2 a nechť $\mathcal{B} = \langle \mathrm{e}_1, \cdots, \mathrm{e}_n \rangle$ je některá vzhledem k ní polární báze. Nechť jsou její prvky očíslovány tak, že právě $\Phi(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_1), \cdots, \Phi(\mathrm{e}_r, \mathrm{e}_r)$ jsou nenulové.
Zaveďme nyní vektory $\mathrm{e}'_1, \cdots, \mathrm{e}'_r$ takto:

$$\mathrm{e}'_i = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{\Phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)}}, \ i = 1, \cdots, r.$$

Snadno se přesvědčíme, že $\Phi(\mathrm{e}'_i, \mathrm{e}'_i) = 1$, $1 \leq i \leq r$. Přitom n-tice $\mathcal{B}' = \langle \mathrm{e}'_1, \cdots, \mathrm{e}'_r, \mathrm{e}_{r+1}, \cdots, \mathrm{e}_n \rangle$ zřejmě tvoří rovněž bázi polární k Φ_2. Matice formy $\Phi_2$vzhledem k $\mathcal{B}'$ má velmi jednoduchý tvar:

$$\left(\begin{array}{|ccc|cc} \hline 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right),$$

přitom vyznačený blok je jednotková matice řádu $r = h(\Phi)$.
Této speciální bázi se říká *normální polární báze*.

Promyslete si, jak v případě vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$ dosáhnout toho, aby na hlavní diagonále matice vzhledem k polární bázi byly pouze prvky $1, -1$ a 0 (toho, aby to byly jen prvky $0, 1$ nad $\mathbb{R}$ obecně zřejmě dosáhnout nelze). Rovněž této bázi se říká normální polární báze.

Všimněme si významu, jaký v souvislosti s konstrukcí polární báze hrají vlastní vektory matice kvadratické formy. Významnou roli budou hrát především v euklidovských vektorových prostorech. To bude využito při studiu kuželoseček a kvadrik pro konstrukci určitých výlučných, tzv. *kanonických* bází.

Buď nyní Φ_2 libovolná kvadratická forma, zvolme některou bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}$ a nechť $\mathbf{F}$ je matice dané formy v této bázi (tj. symetrická).

Nechť dále $\mathbf{x}$ je vektor, jehož souřadnice $\{\mathbf{x}\}$[19] v $\mathcal{B}$ jsou vlastním vektorem matice $\mathbf{F}$ příslušným vlastnímu číslu λ a $\mathbf{y}$ další vektor, jehož souřadnice $\{\mathbf{y}\}$ jsou též vlastním vektorem $\mathbf{F}$ příslušným vlastnímu číslu λ', přičemž $\lambda \neq \lambda'$.Užijeme-li definici vlastního vektoru a větu 3.1.7, obdržíme:

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\{\mathbf{x}\}\mathbf{F})\,\{\mathbf{y}\}^T = \lambda\{\mathbf{x}\}\{\mathbf{y}\}^T = 0,$$

což značí, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou sdružené vzhledem k Φ_2.
Platí tedy následující věta:

Věta 3.3.23 *Buď* $\mathbf{F}$ *matice kvadratické formy* Φ_2 *v libovolné bázi. Pak vektory, jejichž souřadnice jsou vlastní vektory matice* $\mathbf{F}$ *příslušné různým vlastním hodnotám, jsou sdružené vzhledem k formě* Φ_2.

Nechť všechna vlastní čísla matice $\mathbf{F}$ v bázi $\mathcal{B}$ jsou navzájem různá (je jich právě n). Najděme ke každému z nich vlastní aritmetický vektor, který budeme považovat za souřadnice jistého vektoru z $\mathbf{V}$ v bázi $\mathcal{B}$. Pak dle věty 3.1.4 je tato n-tice bází prostoru $\mathbf{V}$ a dle věty 3.3.23 jde o bázi polární vzhledem k uvažované kvadratické formě.
Jak tomu však bude v případě, je-li některé z vlastních čísel násobným kořenem charakteristické rovnice? Věta, kterou (pro případ reálného vektorového prostoru) uvedeme, řeší tento problém obecně.
Uvádíme ji na tomto místě pro úplnost, její důkaz provedeme později, upřednostníme při něm geometrické aspekty (viz. věta 3.4.7)

Věta 3.3.24 *Buď* Φ_2 *kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ *její matice v libovolné bázi* $\mathcal{B}$. *Pak existuje báze* $\mathcal{B}'$ *polární vzhledem k formě* Φ_2 *sestavená z vektorů, jejichž souřadnice v bázi* $\mathcal{B}$ *jsou vlastními vektory matice* $\mathbf{F}$.

[19] Tj. aritmetický vektor z T^n.

Promyslete si, jak vypadá matice formy Φ_2 v bázi $\mathcal{B}'$!

3.4 Kvadratické formy na euklidovských vektorových prostorech

Nechť nadále $\mathbf{V}$ označuje n-rozměrný euklidovský vektorový prostor,[20] skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ budeme značit $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ nebo jen $\mathbf{uv}$.

Věta 3.4.1 *Buď Φ_2 kvadratická forma, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ libovolné ortonormální báze, $\mathbf{F}, \mathbf{F}'$ matice této formy po řadě v bázích $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Pak obě matice mají tytéž charakteristické rovnice (a tedy i tatáž spektra).*

Důkaz: Buď $\mathbf{P}$ matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$. Pak pro matici $\mathbf{F}'$ platí (dle věty 3.2.6) $\mathbf{F}' = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^T$. V souladu s větou 2.1.9 je $\mathbf{P}$ ortogonální matice, a tedy $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$. Užitím věty 3.1.5 dostáváme tvrzení. □

Následující pojem bude mít významnou roli při studiu kuželoseček a kvadrik v euklidovských prostorech.

Definice 3.4.2 Buď Φ_2 kvadratická forma na $\mathbf{V}$. Směr $[\mathbf{u}]$ se nazývá *hlavní směr kvadratické formy* Φ_2, jestliže je sdružený s každým směrem na něj kolmým.

O vektoru $\mathbf{u}$ řekneme, že *určuje hlavní směr kvadratické formy* Φ_2.

Všimneme si, že v této definici nevystupuje pojem báze. Proto jde o geometrickou vlastnost daného směru a dané kvadratické formy.

Následující věta nám poskytne návod, jak nalézt hlavní směry – určí jejich algebraický význam.

Věta 3.4.3 *Buď Φ_2 kvadratická forma, $\mathbf{F}$ její matice v libovolné ortonormální bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\mathbf{V}$. Potom je směr $[\mathbf{u}]$ hlavním směrem kvadratické formy Φ_2, právě když aritmetický vektor souřadnic vektoru $\mathbf{u}$ je vlastním vektorem matice $\mathbf{F}$.*

Důkaz: Dle definice 3.4.2 je směr $[\mathbf{u}]$ hlavním směrem, právě když platí

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V} : \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0 \Rightarrow \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0. \tag{3.27}$$

[20] Těleso T je tedy těleso reálných čísel $\mathbb{R}$.

Zvolme nyní libovolnou *ortonormální* bázi $\mathcal{B}$.
Označme $\{\mathbf{x}\} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\{\mathbf{u}\} = (u_1, \cdots, u_n)$ v této bázi. Pak lze skalární součin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}$ psát:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n. \tag{3.28}$$

Použitím maticového zápisu dostáváme $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = (\{\mathbf{u}\}\mathbf{F})\{\mathbf{x}\}^T$. Označíme-li $(y_1, \cdots, y_n)$ řádkovou matici $(\{\mathbf{u}\}\mathbf{F})$, pak

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n. \tag{3.29}$$

S přihlédnutím k (3.28) a (3.29) je implikace (3.27) ekvivalentní s následující:
Je-li $(x_1, \cdots, x_n)$ libovolné řešení lineární rovnice $u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n = 0$, pak je též řešením rovnice $u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n = 0$. To je možné tehdy a jen tehdy, pokud druhá z nich je násobkem první.[21] Musí tedy existovat $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $y_i = \lambda u_i$, $1 \le i \le n$, neboli

$$(y_1, \cdots, y_n) = \lambda(u_1, \cdots, u_n). \tag{3.30}$$

Dosadíme-li zpět za $(y_1, \cdots, y_n)$, dostáváme, že vektor $\mathbf{u}$ určuje hlavní směr formy Φ_2, právě když

$$\exists \lambda \in \mathbb{R};\ \{\mathbf{u}\}\mathbf{F} = \lambda\{\mathbf{u}\},$$

což znamená, že jeho souřadnice $\{\mathbf{u}\}$ jsou vlastním vektorem matice $\mathbf{F}$ příslušným vlastnímu číslu λ matice $\mathbf{F}$. □

Poznámka 3.4.4 Uveďme výslovně, že předpoklad *ortonormálnosti báze* nelze (s výjimkou singulárního směru, viz. poznámka 3.3.12) vynechat. Ilustrujme to následujícím příkladem.

Uvažujme kvadratickou formu Φ_2, která je nad ortonormální bází $\mathcal{B}$ dána analytickým vyjádřením $\Phi_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$. Její matice v $\mathcal{B}$ má dvě vlastní čísla – $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$. Prvnímu odpovídá vlastní podprostor (dle věty 3.4.3 je to hlavní směr) $[\mathbf{u}]$, $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}} = (1, 0)$ a druhému$[\mathbf{v}]$, $\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}} = (0, 1)$ (přesvědčte se o tom). Další hlavní směry forma Φ_2 nemá. Přejděme nyní k bázi $\mathcal{B}'$ maticí přechodu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Tato matice není ortogonální, a tedy $\mathcal{B}'$ (dle věty 2.1.9) není ortonormální. Snadno se přesvědčíte, že analytické vyjádření v $\mathcal{B}'$ zní: $\Phi_2(x_1', x_2') = x_1'^2 + x_2'^2$. Matice formy v $\mathcal{B}'$ je jednotková a má tedy jediné vlastní číslo $\lambda' = 1$. Vlastními vektory jsou v tomto případě *všechny* vektory prostoru $\mathbf{V}$. Přitom, jak jsme ukázali výše, má tato forma pouze dva hlavní směry $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}]$.

Vlastní vektory matice v jiné, než ortonormální bázi tedy obecně neurčují hlavní směry kvadratické formy.

Buď Φ_2 kvadratická forma, $[\mathbf{u}]$ její hlavní směr. Zvolme dvojici ortonormálních bází $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Jsou-li $\mathbf{F}, \mathbf{F}'$ po řadě matice formy Φ_2 v těchto bázích, pak v souladu s předchozí větou existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}\mathbf{F} = \lambda\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}.$$

[21] Nikoli naopak (proč?).

Označíme-li $\mathbf{P}$ matici přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$, jde o ortogonální matici (věta 2.1.9) a platí

$$\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}} = \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}'}\mathbf{P} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{F}' = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^T.$$

Můžeme tedy psát[22]

$$\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}'}\mathbf{F}' = (\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}'}\mathbf{P})\mathbf{F}\mathbf{P}^T = \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}\mathbf{P}^T = (\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}\mathbf{F})\mathbf{P}^T = \lambda\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}\mathbf{P}^{-1} = \lambda\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}'}.$$

Číslo λ je tedy pro daný hlavní směr $[\mathbf{u}]$ nezávislé na volbě ortonormální báze.

Důsledek 3.4.5 *Vektor $\mathbf{u}$ určuje hlavní směr kvadratické formy Φ_2, právě když existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že v některé (a tedy ve všech) ortonormální bázi platí*

$$\{\mathbf{u}\}\mathbf{F} = \lambda\{\mathbf{u}\}, \tag{3.31}$$

kde $\mathbf{F}$ je matice v této bázi a λ je její vlastní číslo. Je korektní říci, že hlavní směr $[\mathbf{u}]$ je příslušný vlastnímu číslu λ.

Singulární směr kvadratické formy je tedy jejím hlavním směrem (příslušným vlastnímu číslu $\lambda = 0$) a naopak.

Významné postavení (zejména pro geometrii kuželoseček a kvadrik) budou mít báze, které jsou ortogonální (resp. ortonormální) a *zároveň* polární vzhledem k dané kvadratické formě. Následující věta uvádí tyto vlastnosti do souvislosti s pojmem hlavní směr dané formy.

Věta 3.4.6 *Buď Φ_2 kvadratická forma na $\mathbf{V}$, $\mathcal{B}$ nechť je báze prostoru $\mathbf{V}$. Potom platí:*

1. *je-li $\mathcal{B}$ ortogonální báze polární vzhledem k Φ_2, pak vektory tvořící $\mathcal{B}$ určují hlavní směry formy Φ_2;*
2. *je-li $\mathcal{B}$ ortogonální báze, jejíž vektory určují hlavní směry formy Φ_2, pak je $\mathcal{B}$ polární vzhledem k Φ_2;*
3. *je-li $\mathcal{B}$ polární vzhledem k Φ_2 a určují-li její vektory regulární hlavní směry formy Φ_2, pak je $\mathcal{B}$ ortogonální.*

Důkaz: Označme prvky báze $\mathcal{B} = \langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n \rangle$.

1. Uvažujme některý $\mathbf{u}_i \in \mathcal{B}$, $1 \le i \le n$. Buď $\mathbf{x}$ libovolný vektor z $\mathbf{V}$ kolmý na $\mathbf{u}_i$. Lze tedy psát:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{u}_j. \tag{3.32}$$

[22] $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$

Vynásobme tuto rovnost skalárně $\mathbf{u}_i$. Protože báze $\mathcal{B}$ je ortogonální (a tedy pro $i \neq j$ je $\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j = 0$), obdržíme postupně:

$$0 = \mathbf{u}_i\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j(\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j) = x_i(\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i). \tag{3.33}$$

Vzhledem k tomu, že $\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i \neq 0$ (proč?), dostáváme, že $x_i = 0$. Pak lze (3.32) psát:

$$\mathbf{x} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j\mathbf{u}_j. \tag{3.34}$$

Zjistěme nyní, zda jsou vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}_i$ sdružené. Φ je bilineární forma a lze tedy po dosazení za $\mathbf{x}$ dle (3.34) psát:

$$\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{x}) = \Phi\left(\mathbf{u}_i, \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j\mathbf{u}_j\right) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j). \tag{3.35}$$

Předpokládejme, že $\mathcal{B}$ je polární – pro $i \neq j$ je $\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0$. Ze vztahu (3.35) pak plyne, že $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) = 0$ - tedy vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}_i$ jsou vzhledem k Φ sdružené. Protože byl $\mathbf{x}$ zvolen libovolně, dokázali jsme, že všechny vektory báze $\mathcal{B}$ určují hlavní směry formy Φ.

2. Přímo z definice 3.4.2 plyne, že každé dva navzájem kolmé hlavní směry jsou sdružené, a tedy báze $\mathcal{B}$ je polární.

3. Zvolme ve $\mathbf{V}$ ortonormální bázi $\mathcal{C}$, $\mathbf{F}$ nechť je matice Φ_2 v $\mathcal{C}$.
   Uvažujme dva různé $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \in \mathcal{B}$. Podle věty 3.4.3 je $\{\mathbf{u}_i\}_\mathcal{C}$ vlastní vektor matice $\mathbf{F}$ – nechť odpovídá vlastnímu číslu λ.
   Pak lze psát:
   $$\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = (\{\mathbf{u}_i\}_\mathcal{C}\mathbf{F})\{\mathbf{u}_j\}_\mathcal{C}^T = \lambda(\{\mathbf{u}_i\}_\mathcal{C}\{\mathbf{u}_j\}_\mathcal{C}^T) = \lambda(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j).$$
   Protože $\lambda \neq 0$ (proč?), vyplývá ze sdruženosti vektorů $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j$ jejich kolmost.

$\square$

Poznamenejme zejména, že jedinými ortogonálními bázemi, které jsou polární vzhledem k dané formě, jsou tedy báze, jejichž vektory určují hlavní směry této formy.
Věta tak ukazuje na významné postavení, které hlavní směry zaujímají.

Tato věta však nehovoří o existenci těchto bází k libovolné kvadratické formě – tu zaručí až věta následující.

Věta 3.4.7 *Buď Φ_2 kvadratická forma na $\mathbf{V}$. Pak existují vektory $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ tak, že určují hlavní směry formy Φ_2 a tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbf{V}$. Tato báze je polární vzhledem k Φ_2.*

Důkaz: Důkaz tvrzení provedeme matematickou indukcí pro $n = \dim \mathbf{V}$.

1. Nechť $n = 1$.
   Je-li $\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, libovolný vektor z $\mathbf{V}$, určuje jistě hlavní směr, neboť neexistuje $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ tak, aby $\mathbf{x} \perp \mathbf{u}$ ($\dim \mathbf{V} = 1$). Není tedy splněn předpoklad implikace (3.27) a tato tedy platí. Je-li vektor $\mathbf{u}$ jednotkový, čehož lze snadno dosáhnout, pak zřejmě $\langle \mathbf{u} \rangle$ tvoří ortonormální bázi (opět užijeme $\dim \mathbf{V} = 1$).

2. Nechť $n \geq 2$. Předpokládejme platnost věty pro všechny prostory $\mathbf{W}$, $\dim \mathbf{W} \leq n-1$. Zvolme ve $\mathbf{V}$ některou ortonormální bázi $\mathcal{C}$. Příslušná matice formy Φ_2 je reálná symetrická, a tedy dle věty 3.1.6 existuje alespoň jedno její (reálné) vlastní číslo. Nechť $\mathbf{u}_1$ je příslušný vlastní vektor jednotkové délky. V souladu s větou 3.4.3 je $[\mathbf{u}_1]$ hlavní směr formy Φ_2.

   Označme $\mathbf{W} = [\mathbf{u}_1]^\perp$. Pak $\mathbf{W} \subseteq\subsetneq \mathbf{V}$, $\dim \mathbf{W} = n-1$.
   Dle indukčního předpokladu existuje soustava ortonormálních vektorů $\mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ určujících hlavní směry formy $\Phi_2|\mathbf{W}$, tvořící bázi prostoru $\mathbf{W}$ polární k $\Phi_2|\mathbf{W}$. Určují však $\mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ hlavní směry i formy Φ_2 na $\mathbf{V}$? Prověříme, zda jsou splněny podmínky definice 3.4.2.
   Především je patrno, že $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ tvoří ortonormální (a pak tedy lineárně nezávislou) soustavou vektorů – tj. ortonormální bázi $\mathbf{V}$. Buď nyní i některé z čísel $2, \cdots, n$ a nechť $\mathbf{x}$ je libovolný vektor $\mathbf{V}$, $\mathbf{x} \perp \mathbf{u}_i$. Pak, jak jsme již odvodili v důkaze věty 3.4.6 (1), lze $\mathbf{x}$ psát:
   $$\mathbf{x} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j \mathbf{u}_j.$$
   Ukažme, že $\mathbf{x}$ a $\mathbf{u}_i$ jsou sdružené:
   $$\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{x}) = \Phi\left(\mathbf{u}_i, \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j \mathbf{u}_j\right) = x_1 \cdot \Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_1) + \sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n} x_j \Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j).$$
   Vzhledem k tomu, že vektor $\mathbf{u}_1$ určuje hlavní směr formy Φ_2 a $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_1$, je $\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_1) = 0$. Protože $\mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{W}$ jsou vzájemně ortogonální vektory určující hlavní směry $\Phi_2|\mathbf{W}$, platí $\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0$ pro $j = 2, \cdots, n$, $j \neq i$. Máme tedy dokázáno, že $\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{x}) = 0$ – tj. určuje hlavní směr formy Φ_2.
   Podle věty 3.4.6 (2) je získaná báze polární vzhledem k Φ_2.

□

Vlastnosti hlavních směrů doplňuje následující věta.

Věta 3.4.8 *Hlavní směry kvadratické formy příslušné různým vlastním číslům jsou kolmé.*

Důkaz: Zvolme ve $\mathbf{V}$ ortonormální bázi $\mathcal{B}$, $\mathbf{F}$ nechť je matice formy Φ_2 v $\mathcal{B}$.
Buďte $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}]$ hlavní směry příslušné různým vlastním číslům po λ, λ'. Dle věty 3.4.3 to znamená, že $\{\mathbf{u}\}, \{\mathbf{v}\}$ jsou vlastní vektory matice $\mathbf{F}$ příslušné uvedeným vlastním číslům. V souladu s větou 3.1.7 pak platí, že $\{\mathbf{u}\}\{\mathbf{v}\}^T = 0$. Protože $\mathcal{B}$ je ortonormální, platí $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \{\mathbf{u}\}\{\mathbf{v}\}^T = 0$, a tedy $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. □

Podívejme se nyní, jak vypadá matice kvadratické formy Φ_2 v ortonormální bázi, která je polární vzhledem k dané kvadratické formě (a jejíž vektory tedy určují hlavní směry formy Φ_2), tj. bázi, jejíž existenci zaručuje věta 3.4.7.

Věta 3.4.9 *Buď Φ_2 kvadratická forma na $\mathbf{V}$. Nechť $\mathcal{B} = \langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n \rangle$ je ortonormální báze, jejíž vektory určují hlavní směry příslušné po řadě vlastním číslům $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (ne nutně různým). Pak matice formy Φ_2 v bázi $\mathcal{B}$ má tvar:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Důkaz: Zvolme libovolnou ortonormální bázi $\mathcal{C}$, $\mathbf{F}$ nechť je matice Φ_2 v bázi $\mathcal{C}$. Pak v souladu s větou 3.4.3 jsou souřadnice vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ v bázi $\mathcal{C}$ vlastními vektory matice $\mathbf{F}$. Nechť přísluší po řadě vlastím číslům $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (ta nemusí být nutně různá).

Spočtěme nyní hodnoty $\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$, $1 \leq i, j \leq n$ – použijeme maticového vyjádření a vztahu (3.31):

$$\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = (\{\mathbf{u}_i\}\mathbf{F})\{\mathbf{u}_j\}^T = \lambda_i\{\mathbf{u}_i\}\{\mathbf{u}_j\}^T = \lambda_i(\{\mathbf{u}_i\}\{\mathbf{u}_j\}^T).$$

Neboť $\mathcal{C}$ je ortonormální, platí dále $\{\mathbf{u}_i\}\{\mathbf{u}_j\}^T = \mathbf{u}_i\mathbf{u}_j = \delta_{ij}$, takže dostáváme:

$$\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \lambda_j\delta_{ij},\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Odtud již v souladu s definicí matice formy v dané bázi plyne tvrzení věty. □

V závěrečné části této kapitoly si všimneme vlastnosti, která spojuje všechny matice dané kvadratické formy v libovolné polární bázi.

Buď Φ_2 kvadratická forma, $\mathcal{B} = \langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n \rangle$ libovolná báze polární vzhledem k Φ_2. Pak analytické vyjádření formy Φ_2 má tvar:

$$\{\mathbf{x}\} = (x_1, \cdots, x_n) \Rightarrow \Phi_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_{ii}x_i^2,$$

neboť matice $\mathbf{F} = (f_{ij})$ má tvar (3.24).
Označme si:

p počet prvků, které jsou kladné,

q počet prvků, které jsou záporné a

m počet prvků, které jsou nulové.

(zřejmě $p + q = h(\Phi)$)

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jsme vektory báze očíslovali tak, že

$$\begin{aligned} &f_{11}, \cdots, f_{pp} > 0, \\ &f_{p+1,p+1}, \cdots, f_{p+q,p+q} < 0, \\ &f_{p+q+1,p+q+1}, \cdots, f_{nn} = 0. \end{aligned} \tag{3.37}$$

V následujícím se budeme snažit dokázat, že p, q, m nezávisí na volbě polární báze. Provedeme to tak, že stanovíme geometrický význam těchto čísel.
Označme si $\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_p]$, $\mathcal{M} = [\mathbf{u}_{p+1}, \cdots, \mathbf{u}_n]$. Zřejmě

$$\mathbf{P} \oplus \mathbf{M} = \mathbf{V} \tag{3.38}$$

a pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ platí (proč?):[23]

$$\mathbf{x} \in \mathbf{P} \Rightarrow \Phi_2(\mathbf{x}) > 0, \; \mathbf{x} \in \mathbf{M} \Rightarrow \Phi_2(\mathbf{x}) \leq 0. \tag{3.39}$$

Buď nyní $\tilde{\mathbf{P}}$ podprostor největší dimenze ve $\mathbf{V}$ takový, že na všech jeho nenulových vektorech nabývá forma Φ_2 kladné hodnoty. V definici podprostoru $\tilde{\mathbf{P}}$ nevystupuje pojem *báze*, a proto je jeho dimenze vlastností formy Φ_2. Budeme se snažit dokázat, že $\dim \tilde{\mathbf{P}} = p$. Tím dokážeme, že číslo p nezávisí na volbě polární báze.

Na nenulových vektorech z $\mathbf{P}$ je $\Phi_2 > 0$, a tedy $\dim \mathbf{P} \leq \dim \tilde{\mathbf{P}}$, neboli $\dim \tilde{\mathbf{P}} = p + k$, $k \geq 0$. Dle Grassmannovy formule lze psát:

$$\dim(\tilde{\mathbf{P}} \cap \mathbf{M}) = \dim \tilde{\mathbf{P}} + \dim \mathbf{M} - \dim(\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{M}),$$

po dosazení za $\dim \tilde{\mathbf{P}} = p + k$, $\dim \mathbf{M} = n - p$:

$$\dim(\tilde{\mathbf{P}} \cap \mathbf{M}) = (n + k) - \dim(\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{M}). \tag{3.40}$$

Pro dimenzi podprostoru $\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{M}$ zřejmě platí: $(n - p) \leq \dim(\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{M}) \leq n$ (proč?), takže dle (3.40) dostáváme pro $\dim(\tilde{\mathbf{P}} \cap \mathbf{M})$:

$$(p + k) \geq \dim(\tilde{\mathbf{P}} \cap \mathbf{M}) \geq k.$$

Pokud by $\dim \tilde{\mathbf{P}} \neq p$ (neboli $k > 0$), plynulo by odtud, že $(\tilde{\mathbf{P}} \cap \mathbf{M})$ má dimenzi alespoň 1 a obsahuje tedy nenulový vektor $\mathbf{x}$, pro který by současně muselo platit (užitím (3.39):

$$\Phi_2(\mathbf{x}) > 0 \quad (\text{neboť } \mathbf{x} \in \tilde{\mathbf{P}}) \quad \text{a} \quad \Phi_2(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (\text{neboť } \mathbf{x} \in \mathbf{M}).$$

[23] Promyslete si, jaké má $\mathbf{x}$ souřadnice v jednotlivých případech.

To však není možné, a proto tedy $\dim \tilde{\mathbf{P}} = p$.

Dokázali jsme právě, že p nezávisí na volbě polární báze. Číslo $p+q$ udává hodnost formy Φ, a proto také nezávisí na volbě báze - nezávisí na ní ani číslo q. Protože $m = n-(p+q) = n - h(\Phi)$, nezávisí na výběru báze ani číslo m.
Zjistili jsme tedy (mimo jiné), že číslo p, resp. q, má význam dimenze největšího z podprostorů ve $\mathbf{V}$, na jehož nenulových vektorech nabývá forma Φ_2 kladné, resp. záporné, hodnoty. Číslo m, (tzv. nulita formy) pak udává dimenzi jejího vrcholu.
Dokázali jsme následující větu – tzv. Sylvestrův zákon setrvačnosti:

Věta 3.4.10 *Buď Φ_2 kvadratická forma, $\mathbf{F}$ její matice v libovolné polární bázi. Pak počet kladných i počet záporných prvků této matice nezávisí na volbě polární báze.*

Definice 3.4.11 Buď Φ_2 kvadratická forma, $\mathbf{F}$ její matice v libovolné polární bázi. Označme p počet kladných a q počet záporných prvků této matice. Pak uspořádaná dvojice (p,q) se nazývá *signatura kvadratické formy* Φ_2.

Věta 3.4.10 tedy říká, že signatura kvadratické formy nezávisí na volbě polární báze, v níž ji zjišťujeme, a je tedy vlastností této kvadratické formy (invariantem), podobně jako například její hodnost.

Následující věta uvádí do souvislosti signaturu kvadratické formy a spektrum její matice v libovolné ortonormální bázi. Později ukážeme, že požadavek ortonormálnosti lze vynechat – že totiž signatura je určena spektrem matice v libovolné bázi.

Věta 3.4.12 *Buď Φ_2 kvadratická forma, $\mathbf{F}$ její matice v libovolné ortonormální bázi, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ nechť jsou vlastní čísla*[24] *matice $\mathbf{F}$. Pak pro signaturu (p,q) formy Φ_2 platí, že p udává počet kladných vlastních čísel a q počet záporných vlastních čísel.*

Důkaz: Je-li $\mathbf{F}$ matice kvadratické formy v ortonormální bázi, jejíž vektory určují hlavní směry, pak $\mathbf{F}$ má tvar popsaný ve větě 3.4.9 a platnost tvrzení je v tomto případě evidentní. Protože dle věty 3.4.1 mají všechny matice dané formy nad ortonormálními bázemi tatáž spektra, platí tvrzení v každé ortonormální bázi. □

Důkaz věty 3.3.24:
Nyní dokážeme větu 3.3.24, neboť z ní vyplyne vztah signatury a spektra matice kvadratické formy v *libovolné* bázi.

Nejprve si uvědomme, co z algebraického hlediska znamená platnost věty 3.4.7 spolu s větou 3.4.3.

[24] Každé je uvedeno tolikrát, kolikanásobným kořenem je charakteristické rovnice.

Mějme dánu libovolnou symetrickou reálnou matici $\mathbf{F}$. Zvolíme-li některou ortonormální bázi ve $\mathbf{V}$, pak lze $\mathbf{F}$ považovat za matici jisté kvadratické formy v této bázi. Souřadnice vektoru určujícího hlavní směr této kvadratické formy tvoří (dle věty 3.4.3) vlastní vektor matice $\mathbf{F}$. Podle věty 3.4.7 tedy existuje n lineárně nezávislých aritmetických vektorů $u_1, \cdots, u_n$,[25] které jsou vlastními vektory matice $\mathbf{F}$ (nechť přísluší po řadě vlastním číslům[26] $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$) a mají vlastnost: $i \neq j \Rightarrow u_i \mathbf{F} u_j^T = 0$ pro všechna $i, j = 1, \cdots, n$ (proč?).

Nyní uvažujme kvadratickou formu Φ_2, $\mathcal{C}$ nechť je libovolná báze (ne nutně ortonormální) v prostoru $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ ať je matice této formy v $\mathcal{C}$.
Jak jsme právě ukázali, existuje n lineárně nezávislých aritmetických vektorů $u_1, \cdots, u_n$ a n reálných čísel $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ s vlastnostmi:

1. $\forall i,\ 1 \leq i \leq n:\ u_i \mathbf{F} = \lambda_i u_i$,
2. $\forall i, j\ 1 \leq i, j \leq n:\ i \neq j \Rightarrow u_i \mathbf{F} u_j^T = 0$.

Zkonstruujme si nyní n-tici vektorů $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ z $\mathbf{V}$ tak, že položíme

$$\{\mathbf{u}_i\}_{\mathcal{C}} = u_i.$$

Tato n-tice jistě tvoří bázi prostoru $\mathbf{V}$ a vzhledem k vlastnosti 2 jde o bázi polární vzhledem k Φ_2. Jejich souřadnice přitom tvoří vlastní vektory matice $\mathbf{F}$.[27] Tím je věta 3.3.24 dokázána.
$\square$

Podívejme se, jak vypadá matice formy Φ_2 v bázi dle věty 3.3.24, tedy v právě zkonstruované bázi $\mathcal{B} = \langle \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n \rangle$. Mimo hlavní diagonálu jsou samozřejmě samé nuly (proč?) a i-tý prvek hlavní diagonály je roven $\Phi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$, což je rovno $\{\mathbf{u}_i\}_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \{\mathbf{u}_i\}_{\mathcal{C}}^T = \lambda_i \left(\{\mathbf{u}_i\}_{\mathcal{C}} \{\mathbf{u}_i\}_{\mathcal{C}}^T\right)$. Matice má tedy tvar:[28]

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \{\mathbf{u}_1\}\{\mathbf{u}_1\}^T & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_2 \{\mathbf{u}_2\}\{\mathbf{u}_2\}^T & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \{\mathbf{u}_n\}\{\mathbf{u}_n\}^T \end{pmatrix}.$$

Buď $i = 1, \cdots, n$. Protože $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{o}$, je součin $\{\mathbf{u}_i\}\{\mathbf{u}_i\}^T$ číslo kladné. Znaménko i-tého prvku na hlavní diagonále je tedy rovno znaménku příslušného vlastního čísla λ_i. Proto tedy pro signaturu (p, q) platí, že p je počet kladných a q je počet záporných vlastních čísel matice $\mathbf{F}$.

Platí tedy následující věta.

[25] Neznačíme je tučně, aby nedošlo k záměně s vektory prostoru $\mathbf{V}$.
[26] Tato nemusí být různá.
[27] Jak ale víme, neurčují hlavní směry formy Φ_2.
[28] Symbol $\mathcal{C}$ u souřadnic vynecháme.

Věta 3.4.13 *Buď Φ_2 kvadratická forma* $\mathbf{F}$ *její matice v libovolné bázi, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ nechť jsou vlastní čísla*[29] *matice* $\mathbf{F}$. *Pak pro signaturu (p, q) formy Φ_2 platí, že p udává počet kladných vlastních čísel a q počet záporných vlastních čísel*

Poznamenejme závěrem, že větu 3.3.24 je možno dokázat přímo, prostředky algebry matic. Pak by věta 3.4.7 byla jejím důsledkem.

[29] Každé je uvedeno tolikrát, kolikanásobným je kořenem charakteristické rovnice.

Kapitola 4

Teorie kuželoseček

V této kapitole se budeme zabývat jistými množinami bodů v euklidovské rovině, které budeme nazývat *kuželosečkami*.
Euklidovskou rovinu budeme označovat $\mathcal{E}_2$, její zaměření, které je vektorovým prostorem se skalárním součinem, budeme značit $\mathbf{V}$.
Pod pojmem *báze* budeme (pokud nebude uvedeno jinak) rozumět *afinní bázi* roviny $\mathcal{E}_2$.

Pojem kuželosečka není pro čtenáře jistě nový. S tímto pojmem, stejně jako s pojmy *kružnice, elipsa, hyperbola, parabola* jste se již setkali na střední škole a v předmětu konstrukční geometrie, kde byly tyto křivky definovány *metricky*, tj. pomocí pojmu *vzdálenost*. Nyní, v analytické geometrii, zvolíme postup jiný. Všimneme si typů formulí (*obecných rovnic*), kterým budou vyhovovat *souřadnice* bodů těchto křivek.

Budeme zde budovat *analytickou teorii* kuželoseček – nebudeme tedy vycházet z jejich vlastností, které jste v konstrukční geometrii zjistili *synteticky*. Volně řečeno, „zapomeňme" na chvíli vše, co o zmíněných křivkách víme.

4.1 Definice a základní pojmy

4.1.1 Obecná rovnice a matice kuželosečky

Nejprve tedy zaveďme pojem *kuželosečka*.[1]

Definice 4.1.1 Nechť je v $\mathcal{E}_2$ zvolena báze $\mathcal{B}$. Množina bodů $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}_2$, k níž existuje polynom $F(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ druhého stupně tak, že platí

$$X = [x, y]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow F(x, y) = 0, \tag{4.1}$$

se nazývá *kuželosečka v $\mathcal{E}_2$*.

[1]Užívá se též pojmů *kvadratická křivka* či *křivka 2. stupně*.

Rovnice $F(x,y) = 0$ se nazývá *obecná rovnice kuželosečky $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}$.* O polynomu $F(x,y)$ budeme říkat, že *určuje v bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnicí $F(x,y) = 0$ kuželosečku $\mathcal{K}$.* (V obou případech se užívá též termínu *vzhledem k bázi $\mathcal{B}$.*)

Koeficienty polynomu $F(x,y)$ budeme vždy indexovat následujícím způsobem:

$$F(x,y) = f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 + 2f_{13}x + 2f_{23}y + f_{33}, \tag{4.2}$$

jeho kvadratickou část budeme značit φ – tj.

$$\varphi(x,y) = f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2, \tag{4.3}$$

přičemž alespoň jeden z koeficientů f_{11}, f_{12}, f_{22} není nula.

Poznamenejme, že pro proměnné polynomu φ budeme též užívat i jiné označení – např. u_1, u_2 (což je otázka čistě formální).

Kuželosečkami jsou tedy například množiny bodů dané v jisté bázi obecnými rovnicemi $x^2+y^2-1 = 0$, či $y^2+x = 0$ (o těchto má jistě již čtenář svou představu), nebo $17x^2+12xy+8y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$ a podobně. Všimněme si, že i přímku lze považovat za kuželosečku – skutečně obecnou rovnicí $x^2 = 0$ je dána přímka o rovnici $x = 0$.
Je například dvojice přímek kuželosečkou ve smyslu naší definice?

Pro řadu úvah bude vhodné vyjádřit polynom určující v dané bázi kuželosečku i jeho kvadratickou část v maticovém tvaru. Zkonstruujme pomocí koeficientů polynomu $F(x,y)$ (při označení (4.2)) *symetrickou matici* $\mathbf{F} = (f_{ij})_{3\times 3}$[2] a *symetrickou matici* $\mathbf{F}_0 = (f_{ij})_{2\times 2}$:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

kde $f_{ij} = f_{ji}$, $1 \leq i, j \leq 3$.
Poznamenejme, že matice $\mathbf{F}_0$ musí být nenulová, tj. $h(\mathbf{F}_0) \geq 1$ (proč?).
Lze se snadno přesvědčit, že polynom F i jeho kvadratickou část φ jde psát následujícím způsobem:

$$F(x,y) = (x,y,1) \cdot \mathbf{F} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

$$\varphi(u_1,u_2) = (u_1,u_2) \cdot \mathbf{F}_0 \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

což lze využít i k *maticovému zápisu* obecné rovnice.

[2]Polynom i příslušnou matici budeme vždy značit stejným písmenem (v odlišném fontu).

Definice 4.1.2 Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka, $\mathcal{B}$ báze roviny $\mathcal{E}_2$ a nechť $F(x, y)$ je libovolný polynom 2. stupně určující v bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnicí $F(x, y) = 0$ kuželosečku $\mathcal{K}$.

Pak matice $\mathbf{F}$, resp. $\mathbf{F}_0$, sestrojená výše, se nazývá *matice*, resp. *malá matice, kuželosečky $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}$*, číslo $\Delta = \det \mathbf{F}$, resp. $\delta = \det \mathbf{F}_0$, se nazývá *velký*, resp. *malý*, *diskriminant kuželosečky $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}$*.

Poznamenejme, že mezi obecnou rovnicí a maticí dané kuželosečky (v téže bázi) je zřejmě vzájemně jednoznačný vztah. Určení kuželosečky jejím polynomem (obecnou rovnicí) či její maticí je zcela rovnocenné. Budeme užívat toho způsobu, který bude v dané situaci vhodnější.

Naskýtá se přirozená otázka, zda má kuželosečka nad danou bází jediné vyjádření (tj. jedinou rovnici či jedinou matici). Je zřejmé, že nikoli – obecné rovnice $F(x, y) = 0$ i $cF(x, y) = 0$ určují pro všechna $c \neq 0$ tutéž kuželosečku – platí tedy následující věta:

Věta 4.1.3 *Buďte $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{E}_2$ kuželosečky určené nad bází $\mathcal{B}$ po řadě maticemi $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$. Jestliže platí $\mathbf{F}_2 = c\mathbf{F}_1$, $c \neq 0$, pak $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$.*

Platí i věta obrácená? Obecně nikoli – vždyť například obecnými rovnicemi $x^2 + y^2 = 0$ i $3x^2 + y^2 = 0$ je určena tatáž kuželosečka (bod $[0, 0]$) a přitom tyto rovnice nejsou úměrné.[3]

Ukážeme, že pro mnohé kuželosečky lze tuto větu obrátit (viz *Věta o jednoznačnosti 4.3.2*) a tyto tedy v dané bázi budou určeny sice nekonečně mnoha maticemi (obecnými rovnicemi), všechny však budou (po dvou) úměrné, čímž se jejich studium značně zjednoduší.

Poznámka 4.1.4 Vždy musíme respektovat, že **vlastnosti kuželosečky** lze zkoumat prostřednictvím právě těch těch vlastností její matice, které jsou **společné** pro všechny matice této kuželosečky – tj.

1. nezávisí na výběru báze, ve které je matice dána,
2. nezávisí na výběru matice, která v této bázi určuje danou kuželosečku.

Těmto vlastnostem říkáme *geometrické vlastnosti*.[4]
(Je např. hodnota Δ geometrickou vlastností?)

(Ve srovnání s bilineárními formami, které měly v dané bázi pouze jedinou matici a stačilo tedy respektovat pouze bod 1., je pro kuželosečky situace složitější.)

4.1.2 Obecná rovnice při transformaci soustavy souřadné

Nechť kuželosečka $\mathcal{K}$ je dána v bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnicí $F(x, y) = 0$. Je otázkou, zda i v libovolné jiné bázi $\mathcal{B}'$ bude existovat polynom F' 2. stupně, který by obecnou rovnicí

[3] To je zapříčiněno tím, že $\mathbb{R}$ není algebraicky uzavřené těleso.

[4] Někdy se též užívá pojmu *invariant kuželosečky* (nezaměňujte však s pojmem *invariant transformace soustavy souřadné* dále zavedeným).

$F'(x', y') = 0$ určoval křivku $\mathcal{K}$.
Současně se budeme ptát, jak jej zkonstruovat.

K řešení této otázky použijeme maticového zápisu obecné rovnice.

Buďte $\mathcal{B} = \langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, $\mathcal{B}' = \langle P', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle$ báze $\mathcal{E}_2$.
Je-li $P' = [b_1, b_2]_{\mathcal{B}}$ a $\mathbf{e}'_i = (a_{i1}, a_{i2})_{\mathcal{B}_0}$, $i = 1, 2$[5], pak dle věty 1.2.11 pro souřadnice libovolného bodu $X = [x, y]_{\mathcal{B}} = [x', y']_{\mathcal{B}'}$ platí tyto transformační rovnice:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{21}y' + b_1 \\ y &= a_{12}x' + a_{22}y' + b_2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Uvažíme-li matice přechodu od báze $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$ a od báze $\mathcal{B}_0$ k $\mathcal{B}'_0$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

lze (viz poznámka 1.2.14) transformační rovnice (4.7) psát též takto:

$$(x, y) = (x', y')\mathbf{P}_0 + (b_1, b_2),$$

což lze dále přepsat takto:

$$X = [x, y]_{\mathcal{B}} = [x', y']_{\mathcal{B}'} \Leftrightarrow (x, y, 1) = (x', y', 1)\mathbf{P}. \tag{4.9}$$

Vraťme se k otázce formulované úvodem.
Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka určená v $\mathcal{B}$ maticí $\mathbf{F}$, $X = [x, y]_{\mathcal{B}} = [x', y']_{\mathcal{B}'}$ nechť je bod $\mathcal{E}_2$. Pak (v souladu s definicí 4.1.1) bod Xnáleží $\mathcal{K}$, právě když (užitím (4.5)):

$$(x, y, 1) \cdot \mathbf{F} \cdot (x, y, 1)^T = 0.$$

Dosadíme-li ovšem za nečárkované souřadnice bodu X ze vztahu (4.9), obdržíme:

$$X \in \mathcal{K} \Leftrightarrow ((x', y', 1)\mathbf{P})\,\mathbf{F}\,((x', y', 1)\mathbf{P})^T = 0 \Leftrightarrow (x', y', 1)(\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^T)(x', y', 1)^T = 0.$$

Označme $\mathbf{F}' = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^T$. Pak $\mathbf{F}'^T = (\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^T)^T = \mathbf{P}\mathbf{F}^T\mathbf{P}^T = \mathbf{F}'$, neboť $\mathbf{F}$ je symetrická. Obdrželi jsme tedy symetrickou matici $\mathbf{F}'$, přičemž platí:

$$X \in \mathcal{K} \Leftrightarrow (x', y', 1) \cdot \mathbf{F}' \cdot (x', y', 1)^T = 0,$$

což můžeme též psát

$$F'(x', y') = 0.$$

Je tedy patrno, že je-li $h(\mathbf{F}'_0) \neq 0$ (a tudíž $F'(x', y')$ je 2. stupně), pak $\mathbf{F}'$ určuje kuželosečku $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}'$.

[5] opět budeme preferovat (v geometrii obvyklejší) zápis $\mathbf{x} = (x_1, x_2)_{\mathcal{B}_0}$ před $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}_0} = (x_1, x_2)$.

Všimněme si, jak získáme malou matici $\mathbf{F}'_0$.

Z tvaru posledního sloupce matice $\mathbf{P}$ plyne, že pro součin matic $\mathbf{PF}$ lze psát (prvky pro nás „nezajímavé“ jsou vytečkovány):

$$\mathbf{PF} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & & 0 \\ & & 0 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_0 & & f_{13} \\ & & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0\mathbf{F}_0 & & \cdot \\ & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Podobně nulovost prvních dvou prvků třetího řádku matice $\mathbf{P}^T$ nás opravňuje dále psát

$$\mathbf{F}' = (\mathbf{PF})\mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0\mathbf{F}_0 & & \cdot \\ & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0^T & & b_1 \\ & & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0\mathbf{F}_0\mathbf{P}^T & & \cdot \\ & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

tedy malá matice $\mathbf{F}'_0$ je rovna $\mathbf{P}_0\mathbf{F}_0\mathbf{P}^T$.
Matice $\mathbf{P}_0$ je regulární (proč?), proto platí, že $h(\mathbf{F}'_0) = h(\mathbf{F}_0)$ (jak jsme ukázali v podkapitole 3.2 před definicí 3.2.13). Proto $h(\mathbf{F}'_0) \geq 1$ a matice $\mathbf{F}'$ je skutečně maticí kuželosečky $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}'$ (jak víme, je jednou z matic $\mathcal{K}$ v $\mathcal{B}'$).
Dokázali jsme tedy následující tvrzení:

Věta 4.1.5 *Buďte $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ báze v $\mathcal{E}_2$, $\mathbf{P}$ matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$. Nechť kuželosečka $\mathcal{K}$ je v bázi $\mathcal{B}$ určena maticí $\mathbf{F}$. Pak matice $\mathbf{F}'$, pro niž platí*

$$\mathbf{F}' = \mathbf{PFP}^T,$$

určuje kuželosečku $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}'$.
Přitom pro malou matici platí:

$$h(\mathbf{F}'_0) \neq 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{F}'_0 = \mathbf{P}_0\mathbf{F}_0\mathbf{P}_0^T.$$

O polynomu $F'(x', y')$ řekneme, že *vznikl z polynomu $F(x, y)$ transformací soustavy souřadné*. Totéž řekneme o matici $\mathbf{F}'$, resp. o polynomu $\varphi'(x', y')$ a matici $\mathbf{F}'_0$.

Je zřejmé, že polynom $F'(x', y')$ bychom mohli také získat přímým dosazením za x, y do $F(x, y)$ z transformačních rovnic (4.7).

Ukázali jsme, že provedením transformace soustavy souřadné vznikne z polynomu 2. stupně opět polynom 2. stupně – daná množina je tedy kuželosečkou *nezávisle* na volbě báze (definice 4.1.1 je v tomto smyslu korektní).

Všimněme si, že matice $\mathbf{F}_0$ se transformuje stejně, jako matice bilineární formy na zaměření $\mathbf{V}$ (viz věta 3.2.6) – $\mathbf{P}_0$ je maticí přechodu bází ve $\mathbf{V}$. To nám umožňuje předpisem

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} : \mathbf{u} = (u_1, u_2)_{\mathcal{B}_0} \wedge \mathbf{v} = (v_1, v_2)_{\mathcal{B}_0} \Rightarrow \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1 u_2)\mathbf{F}_0 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

korektně (tj. nezávisle na volbě báze $\mathcal{B}_0$) definovat bilineární formu Φ, která je polární bilineární formou kvadratické formy Φ_2 dané vztahem

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} : \mathbf{u} = (u_1, u_2)_{\mathcal{B}_0} \Rightarrow \Phi_2(\mathbf{u}) = (u_1 u_2)\mathbf{F}_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Povšimněme si, že pro její analytické vyjádření platí (viz (4.3)):[6]

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)_{\mathcal{B}_0} \Rightarrow \Phi_2(\mathbf{u}) = \varphi(u_1, u_2) = f_{11}u_1^2 + 2f_{12}u_1u_2 + f_{22}u_2^2,$$

tj. tímto vyjádřením je kvadratická část polynomu $F(x, y)$.

Výše uvedené formuluje následující definice:

Definice 4.1.6 Buď $\mathbf{F}$ matice kuželosečky $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}$. Pak kvadratická forma Φ_2 na $\mathbf{V}$ určená v bázi $\mathcal{B}_0$ maticí $\mathbf{F}_0$ se nazývá *kvadratická forma kuželosečky* $\mathcal{K}$, její polární bilineární forma Φ se nazývá *polární bilineární forma kuželosečky* $\mathcal{K}$.

Naskýtá se otázka, kolik polárních bilineárních (resp. kvadratických) forem má daná kuželosečka. Zvolme libovolně bázi $\mathcal{B}$ a nechť $\mathbf{F}$ je matice $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}$. Pak ovšem i $c\mathbf{F}$ je pro libovolné $c \neq 0$ maticí $\mathcal{K}$. Tedy kromě formy Φ (sestrojené pomocí $\mathbf{F}$) jsou i všechny $c\Phi$, $c \neq 0$, polárními bilineárními formami téže kuželosečky $\mathcal{K}$. Protože nemůžeme vyloučit ani existenci matice $\mathbf{G}$, která není násobkem matice $\mathbf{F}$, nemůžeme apriorně vyloučit ani existenci formy Ψ, která není násobkem formy Φ.

Zejména tedy odtud vyplývá:

Poznámka 4.1.7 Vlastnosti kuželosečky lze zkoumat prostřednictvím pouze těch vlastností její formy (polární bilineární nebo kvadratické), které jsou **společné** pro všechny formy této kuželosečky (*geometrické vlastnosti*).
(Je například hodnota $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ geometrickou vlastností vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a uvažované kuželosečky?)

4.1.3 Invarianty transformace soustavy souřadné

Transformacím soustav souřadných budeme obecně říkat *afinní transformace*. Speciálně transformace kartézské soustavy souřadné v kartézskou soustavu souřadnou jsme nazvali *ortogonální transformace*.[7]

Je patrno, že změna počátku či otočení kartézské soustavy souřadné představují ortogonální transformace. Podobně též změna označení os či orientace některé z os.

Připomeňme, že dle věty 2.1.9 je transformace soustavy souřadné daná maticí $\mathbf{P}$ ortogonální, právě když matice $\mathbf{P}_0$ je ortogonální, tj. platí-li $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_0^T = \mathbf{E}$.

[6] Jak zní analytické vyjádření formy Φ?
[7] viz definice 2.1.8.

Uvažujme nyní kuželosečku $\mathcal{K}$ danou v bázi $\mathcal{B}$ maticí $\mathbf{F}$. Zvolme další bázi $\mathcal{B}'$, $\mathbf{P}$ nechť je příslušná matice přechodu. Matice $\mathbf{F}'$ vzniklá z $\mathbf{F}$ transformací soustavy souřadné má tvar dle věty 4.1.5 a určuje $\mathcal{K}$ v $\mathcal{B}'$. Společná vlastnost matic $\mathbf{F}$ a $\mathbf{F}'$ se nazývá *invariant* uvažované *transformace soustavy souřadné*.
Označme $\Delta = \det \mathbf{F}$, $\Delta' = \det \mathbf{F}'$, $\delta = \det \mathbf{F}_0$, $\delta' = \det \mathbf{F}_0'$. Užitím věty 4.1.5 dostáváme: $\Delta' = \det(\mathbf{PFP}^T) = \det \mathbf{P} \cdot \det \mathbf{F} \cdot \det \mathbf{P}^T = (\det \mathbf{P})^2 \cdot \Delta$, podobně $\delta' = (\det \mathbf{P}_0)^2 \cdot \delta$.
Ze vztahu (4.9) plyne, že $\det \mathbf{P} = \det \mathbf{P}_0$ a protože matice $\mathbf{P}_0$ je regulární, je $(\det \mathbf{P})^2 = (\det \mathbf{P}_0)^2 > 0$, v případě ortogonální transformace dokonce $(\det \mathbf{P})^2 = (\det \mathbf{P}_0)^2 = 1$.
Invariant hodnosti malé matice jsme již ukázali výše (viz. důkaz věty 4.1.5). Protože matice $\mathbf{P}$ je regulární a matice $\mathbf{F}'$ je dána formulí dle věty 4.1.5, je ze stejného důvodu invariantní i hodnost matice $\mathbf{F}$.

Z těchto skutečností plyne následující věta.

Věta 4.1.8 *Velký a malý diskriminant je invariant libovolné ortogonální transformace soustavy souřadné. Znaménko velkého a malého diskriminantu je invariant libovolné afinní transformace soustavy souřadné.*
Hodnost velké a malé matice je invariant libovolné afinní transformace soustavy souřadné.

Poznámka 4.1.9 Uvědomme si však, že odtud neplyne, že jde o geometrické vlastnosti kuželosečky.
Již z toho, že $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2 = c\mathbf{F}_1$ $(c \neq 0)$ jsou matice téže kuželosečky a tedy $\Delta_2 = c^3\Delta_1$, dostáváme, že pro klasifikaci kuželoseček lze u Δ využít nejvýše jeho nulovost či nenulovost. (Na rozdíl od malého diskriminantu $(\delta_2 = c^2\delta_1)$, kde půjde využít i jeho znaménka.)
V případě existence neúměrných matic však ani poslední dvě jmenované vlastnosti nemusí být geometrické vlastnosti kuželosečky, stejně jako zmíněné hodnosti matic.

Všimněme si nyní, zda charakteristická rovnice malé matice je invariantem ortogonální transformace. Buďte $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ kartézské báze. Pak, jak jsme již připomněli, je matice $\mathbf{P}_0$ ortogonální, a tedy $\mathbf{P}_0^T = \mathbf{P}_0^{-1}$. Je-li $\mathbf{F}$ matice kuželosečky $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}$ a $\mathbf{F}'$ matice $\mathcal{K}$ v $\mathcal{B}'$ vzniklá uvažovanou transformací soustavy souřadné, pak užitím věty 4.1.5 dostáváme $\mathbf{F}_0' = \mathbf{P}_0\mathbf{F}_0\mathbf{P}_0^{-1}$. Z věty 3.1.5 nyní bezprostředně plyne, že charakteristická rovnice je invariantem ortogonální transformace.

Charakteristická rovnice malé matice zní:

$$\lambda^2 - (f_{11} + f_{22})\lambda + (f_{11}f_{22} - f_{12}^2) = 0.$$

Označíme-li $\mathcal{S}$ stopu malé matice,[8] můžeme psát

$$\lambda^2 - \mathcal{S}\lambda + \delta = 0, \tag{4.10}$$

[8] Toto označení budeme nadále vždy dodržovat.

což značí, že i $\mathcal{S}$ je invariantem ortogonální transformace.
Dokázali jsme tedy následující větu:

Věta 4.1.10 *Charakteristická rovnice malé matice kuželosečky a stopa malé matice jsou invarianty ortogonální transformace soustavy souřadné.*

4.2 Rozbor obecné rovnice. Definice jednotlivých kuželoseček

4.2.1 Rozbor obecné rovnice

V tomto odstavci ukážeme, které množiny bodů roviny jsou kuželosečkami ve smyslu definice 4.1.1.

Nechť kuželosečka $\mathcal{K}$ je v bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ dána obecnou rovnicí

$$f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 + 2f_{13}x + 2f_{23}y + f_{33} = 0, \tag{4.11}$$

kde $\{f_{11}, f_{12}, f_{22}\} \neq \{0\}$ neboli $h(\mathbf{F}_0) \neq 0$.
Předpokládejme, že $\mathcal{B}$ je kartézská (pokud by tomu tak nebylo, provedli bychom vhodnou transformaci soustavy souřadné).

Naším cílem nyní bude najít takovou bázi, v níž bude mít obecná rovnice co nejjednodušší tvar.

V prvním kroku se budeme snažit, aby vymizel člen f_{12}.
Protože dle definice 4.1.6 je

$$\varphi(x, y) = f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 \tag{4.12}$$

analytickým vyjádřením kvadratické formy Φ_2 kuželosečky $\mathcal{K}$, znamená to hledat bázi $\mathcal{B}'_0 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ zaměření $\mathbf{V}$ *polární* vzhledem k této formě. Aby zůstaly zachovány kartézské formule pro skalární součin, délku vektoru ap., budeme požadovat, aby tato báze byla navíc *ortonormální*. Dle věty 3.4.6 tedy musí vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ určovat ortogonální *hlavní směry* formy Φ. (Existenci takovéto báze zaručuje věta 3.4.7.)
V souladu s větou 3.4.3 budeme jejich souřadnice[9] hledat jako *vlastní vektory matice* $\mathbf{F}_0$ (zda tyto vektory budou mít geometrický význam, zjistíme později). Řešíme tedy charakteristickou rovnici matice $\mathbf{F}_0$, kterou můžeme (viz (4.10)) psát takto:

$$\lambda^2 - \mathcal{S}\lambda + \delta = 0. \tag{4.13}$$

Vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)_{\mathcal{B}}$ určuje hlavní směr, právě když (a_1, a_2) je řešením soustavy (viz (3.2)):

$$\begin{aligned} (f_{11} - \lambda)a_1 + f_{12}a_2 &= 0 \\ f_{12}a_1 + (f_{22} - \lambda)a_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

[9] Tj. aritmetické vektory z $\mathbb{R}^2$.

Kořeny charakteristické rovnice (vlastní čísla) λ_1, λ_2 jsou reálné (proč?) a protože je (4.13) kvadratická, platí:

$$\delta = \lambda_1\lambda_2, \quad \mathcal{S} = \lambda_1 + \lambda_2. \tag{4.15}$$

Očíslujme je následujícím způsobem:

- $\delta \geq 0 \Rightarrow |\lambda_1| \leq |\lambda_2|$,
- $\delta < 0 \wedge \Delta \neq 0 \Rightarrow \mathrm{sgn}\lambda_1 = \mathrm{sgn}\Delta$ (a tedy $\mathrm{sgn}\Delta \neq \mathrm{sgn}\lambda_2$ - proč?),
- $\delta < 0 \wedge \Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0$ (a tedy $\lambda_2 < 0$).

Diskutujme nyní počet kořenů rovnice (4.13):

(i) Nechť $\lambda_1 = \lambda_2$ (označme λ). To nastane, právě když diskriminant rovnice (4.13) je nulový, tj. $\mathcal{S}^2 - 4\delta = 0$. Dosadíme-li za $\mathcal{S}$ a δ, obdržíme po úpravě:

$$(f_{11} - f_{22})^2 + 4f_{12}^2 = 0,$$

což však nastane (jde o čtverce reálných čísel), právě když

$$f_{11} = f_{22} \quad \text{a} \quad f_{12} = 0,$$

a tedy $\lambda = \frac{\mathcal{S}}{2} = f_{11}$. To je ovšem ekvivalentní s tím, že soustava (4.14) je nulová. Platí tedy, že $\lambda_1 = \lambda_2$, právě když libovolný směr je hlavním směrem formy Φ_2. Každá ortonormální dvojice vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ pak tvoří hledanou bázi zaměření $\mathbf{V}$.

(ii) Nechť $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Pak v souladu s větou 3.4.8 je každý hlavní směr příslušný λ_1 kolmý na každý hlavní směr příslušný λ_2, z čehož (v rovině) plyne, že hlavní směry jsou v tomto případě dva, a to ortogonální.
Vyberme tedy jejich ortonormální reprezentanty $\mathbf{a}_1$ (přísluší λ_1) a $\mathbf{a}_2$ (přísluší λ_2), které pak tvoří hledanou bázi zaměření $\mathbf{V}$.

Přejděme nyní k soustavě souřadné určené bází $\mathcal{B}' = \langle P; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$, kde $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2})_{\mathcal{B}}$ pro $i = 1, 2$ jsou výše nalezené vektory.
Snadno se sestaví matice $\mathbf{P}$ přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$ a rovnice pro transformaci souřadnic (4.7) zní:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{21}y' \\ y &= a_{12}x' + a_{22}y' \ . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Z konstrukce báze $\mathcal{B}'$ plyne, že jde o bázi kartézskou, v níž má malá matice $\mathbf{F}'_0$ tvar dle věty 3.4.9 (jde o matici formy Φ_2). Velká matice má tudíž tvar

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & f'_{13} \\ 0 & \lambda_2 & f'_{23} \\ f'_{13} & f'_{23} & f'_{33} \end{pmatrix}$$

a obecná rovnice tedy zní

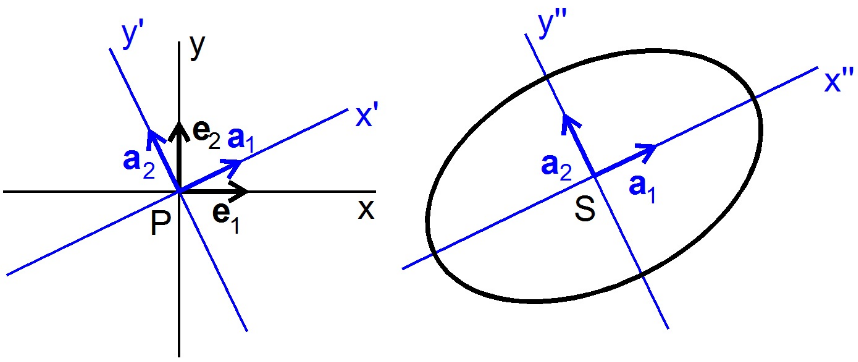
$$\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + 2f'_{13}x' + 2f'_{23}y' + f'_{33} = 0. \tag{4.17}$$

Poznamenejme, že v tomto kroku (i všech následujících) je možno matici $\mathbf{F}'$ získat i přímým výpočtem dle věty 4.1.5 – tj. jako součin $\mathbf{PFP}^T$. Tak bychom obdrželi vztahy i pro koeficienty f'_{12}, f'_{23} a f'_{33}.[10] Tento postup se uplatní např. při řešení konkrétních úloh.

Pro názornost si nyní popišme provedenou ortogonální transformaci soustavy souřadné. Počátek se nezměnil, změnil se jen směr os. Snadno lze docílit, aby báze $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ byly souhlasné (případnou změnou orientace jednoho z vektorů báze $\mathcal{B}'$) a pak lze provedenou transformaci chápat jako *otočení* soustavy souřadné kolem počátku o úhel $\measuredangle(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}_1)$ (samozřejmě je týž, jako $\measuredangle(\mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2)$).
V dalších krocích vyplyne *geometrický význam* směrů os nové soustavy souřadné.

Postup pro další zjednodušení obecné rovnice již čtenář zná ze střední školy – spočívá v tzv. úpravě na úplné čtverce, což znamená *posunutí* počátku soustavy souřadné (dostaneme tak bázi $\mathcal{B}''$).

Postupný přechod od báze $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ k bázi $\mathcal{B}' = \langle P; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ až konečně k bázi $\mathcal{B}'' = \langle S; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ je (pro konkrétní kuželosečku) ilustrován následujícím obrázkem (jeho „oprávněnost“ vyplyne z dalšího):



Obr. 4.2.1

Dále rozlišme dva případy dle nulovosti vlastních čísel - tj. dle nulovosti δ (viz (4.15)):
I. $\delta \neq 0$, II. $\delta = 0$.

<u>I. $\delta \neq 0$</u>
Rovnici (4.17) lze přepsat ($\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$) takto:

$$\lambda_1({x'}^2 + 2\tfrac{f'_{13}}{\lambda_1}x') + \lambda_2({y'}^2 + 2\tfrac{f'_{23}}{\lambda_2}y') + f_{33} = 0\,,$$

[10] Např. $f'_{33} = f_{33}$ (jaký je poslední řádek matice $\mathbf{P}$?). Pro další postup tato skutečnost není významná.

což lze upravit na tvar (tzv. úplné čtverce):

$$\lambda_1(x'-s_1')^2+\lambda_2(y'-s_2')^2+f_{33}''=0, \quad \text{kde } s_i'=-\tfrac{f_{i3}'}{\lambda_i},\ i=1,2\,.$$

Označme $S=[s_1',s_2']_{\mathcal{B}'}$ a uvažujme bázi $\mathcal{B}''=\langle S;\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\rangle$. Transformační rovnice pro přechod od $\mathcal{B}'$ k $\mathcal{B}''$ zní:[11]

$$\begin{aligned} x' &= x''+s_1' \\ y' &= y''+s_2' \end{aligned}.$$

Obecná rovnice tedy v bázi $\mathcal{B}''$ nabude tvaru

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+f_{33}''=0.$$

Zjistěme, čemu se rovná f_{33}''. Napišme matici $\mathbf{F}''$ kuželosečky $\mathcal{K}$ v $\mathcal{B}''$:

$$\mathbf{F}''=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & f_{33}''\end{pmatrix},$$

spočtěme její velký diskriminant $\Delta''=(\lambda_1\lambda_2)f_{33}''=\delta f_{33}''$ (viz (4.15). Báze $\mathcal{B}''$ je ovšem kartézská (proč?), a tedy v souladu s větou 4.1.8 je $\Delta=\Delta''$, kde Δ je velký diskriminant ve výchozí bázi $\mathcal{B}$. Odtud $f_{33}''=\frac{\Delta}{\delta}$.
Obecnou rovnici v bázi $\mathcal{B}''$ lze psát

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+\frac{\Delta}{\delta}=0. \tag{4.18}$$

Povšimněme si, že pokud je $\mathcal{K}\neq\emptyset$,[12] je bod S středem souměrnosti kuželosečky $\mathcal{K}$ a přímky $o_1=\{S,\mathbf{a}_1\}$ a $o_2=\{S,\mathbf{a}_2\}$ jsou jejími osami souměrnosti.[13] Zda má $\mathcal{K}$ ještě nějaké další středy a osy souměrnosti vyšetříme později.

Rozlišme nyní dva případy:1. $\delta>0$, 2.$\delta<0$, a každý z nich ještě dle nulovosti Δ.

I.1. $\delta>0$ – tj. $\operatorname{sgn}\lambda_1=\operatorname{sgn}\lambda_2$

I.1.1. $\delta>0,\Delta\neq0$
V tomto případě lze rovnici (4.18) vydělením $-\frac{\Delta}{\delta}$ upravit na tvar

$$\frac{x''^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}}+\frac{y''^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}}=1.$$

[11] Souřadnice bodu S vzhledem k výchozí bázi $\mathcal{B}$ bychom zjistili z transformačních dle (4.16), později ukážeme obecný způsob jejich výpočtu.

[12] Pro množinu prázdnou tyto pojmy nezavádíme.

[13] $S=[0,0]_{\mathcal{B}''}$ a je patrno, že $X=[x'',y'']_{\mathcal{B}''}\in\mathcal{K}\Leftrightarrow Y=[-x'',-y'']_{\mathcal{B}''}\in\mathcal{K}$, přičemž S je střed úsečky XY. Přímka o_1 (osa x'') má rovnici $y''=0$. Platí $X=[x'',y'']_{\mathcal{B}''}\in\mathcal{K}\Leftrightarrow Y=[x'',-y'']_{\mathcal{B}''}\in\mathcal{K}$, což jsou body sdružené podle o_1. Počátek báze $\mathcal{B}''$ se nazývá *střed* příslušné kuželosečky.

Zřejmě $\mathrm{sgn}(-\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}) = \mathrm{sgn}(-\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}) = -\mathrm{sgn}(\lambda_i\Delta)$, $i = 1, 2$, neboť $\delta > 0$. Diskutujeme proto dvě možnosti: (a) $\mathrm{sgn}(\lambda\Delta) < 0$, (b) $\mathrm{sgn}(\lambda\Delta) > 0$, kde λ je libovolné z vlastních čísel λ_1, λ_2.

I.1.1.(a) $\delta > 0, \Delta \neq 0, \underline{\mathrm{sgn}(\lambda\Delta) < 0}$
Pak jsou oba jmenovatelé kladná čísla a obecnou rovnici lze psát ve tvaru:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \tag{4.19}$$

$$\text{kde} \quad a = \sqrt{\frac{-\Delta}{\lambda_1\delta}}, \; b = \sqrt{\frac{-\Delta}{\lambda_2\delta}},$$

přičemž $a,\ b$ jsou kladná reálná čísla. Množina $\mathcal{K}$ je neprázdná (ověřte).
Zaznamenejme, že $a = b \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, jinak je $a > b$ ($|\lambda_1| < |\lambda_2|$).

I.1.1.(b) $\delta > 0, \Delta \neq 0, \underline{\mathrm{sgn}(\lambda\Delta) > 0}$
Zde jsou oba jmenovatelé záporná čísla, tedy množina $\mathcal{K} = \emptyset$.[14]

Tím je případ I.1.1 vyčerpán.

<u>I.1.2 $\delta > 0, \Delta = 0$</u>
V tomto případě se rovnice (4.18) redukuje na tvar

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0$$

a jejím řešením je jediný bod – $[0, 0]_{\mathcal{B}''}$ – což je právě bod S.

Tím je vyčerpán celý případ I.1.

<u>I.2 $\delta < 0$</u> – tj. $\mathrm{sgn}\lambda_1 = -\mathrm{sgn}\lambda_2$,
což dle naší dohody značí, že $\mathrm{sgn}\lambda_1 = \mathrm{sgn}\Delta$.

<u>I.2.1 $\delta < 0, \Delta \neq 0$</u>
V tomto případě lze rovnici (4.18) upravit na tvar

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1, \tag{4.20}$$

$$\text{kde} \quad a = \sqrt{\frac{-\Delta}{\lambda_1\delta}}, \; b = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}},$$

přičemž a, b jsou kladná reálná čísla.

[14] Pamatujme, že pracujeme v rovině nad tělesem $\mathbb{R}$ - připouštíme tedy jen *reálné* souřadnice bodů a vektorů; pokud bychom pracovali v komplexním rozšíření euklidovské roviny, byla by množina $\mathcal{K}$ neprázdná, všechna řešení obecné rovnice by byly dvojice imaginárních čísel, představující tzv. *imaginární body* komplexního rozšíření euklidovské roviny a hovořili bychom o imaginární elipse.

I.2.2. $\delta < 0, \Delta = 0$

Nyní se rovnice (4.18) redukuje na tvar

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0,$$

který (vzhledem k předpokladu I.2) lze ekvivalentně psát (proč?)

$$|\lambda_1| x''^2 - |\lambda_2| y''^2 = 0,$$

neboli

$$\left(\sqrt{|\lambda_1|}x'' + \sqrt{|\lambda_2|}y''\right)\left(\sqrt{|\lambda_1|}x'' - \sqrt{|\lambda_2|}y''\right) = 0.$$

To znamená, že $\mathcal{K}$ je sjednocením dvou různoběžných přímek p a q, které se protínají v bodě S a jsou v soustavě souřadné určené bází $\mathcal{B}''$ dány obecnými rovnicemi

$$\begin{aligned} p: \sqrt{|\lambda_1|}x'' + \sqrt{|\lambda_2|}y'' = 0, \\ q: \sqrt{|\lambda_1|}x'' - \sqrt{|\lambda_2|}y'' = 0. \end{aligned}$$

Jejich odchylka je určena poměrem $|\lambda_1| : |\lambda_2|$ (jak?).

Vyřešili jsme případ I. a nyní řešme případ II.

II. $\delta = 0$

To znamená, že aspoň jedno z vlastních čísel je 0. Mohou být obě nulová? Pak by $h(\mathbf{F}'_0) = 0$, současně však hodnost výchozí malé matice $\mathbf{F}_0$ je nenulová, což by byl spor s větou 4.1.8. Proto je nulové právě jedno vlastní číslo, a to λ_1 (dle dohody o jejich očíslování).

Matice $\mathbf{F}'$ v bázi $\mathcal{B}' = \langle P; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ (viz (4.17)) nabývá tvaru

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f'_{13} \\ 0 & \lambda_2 & f'_{23} \\ f'_{13} & f'_{23} & f'_{33} \end{pmatrix}.$$

Pro velký diskriminant Δ' dle věty 4.1.8 platí $\Delta' = \Delta$, tedy

$$\Delta = -f'^2_{13}\lambda_2. \tag{4.21}$$

Obecná rovnice v bázi $\mathcal{B}'$ zní

$$\lambda_2 y'^2 + 2f'_{13}x' + 2f'_{23}y' + f'_{33} = 0,$$

což lze upravit na tvar:

$$\lambda_2(y' - v'_2)^2 + 2f'_{13}x' + f''_{33} = 0, \quad \text{kde } v'_2 = -\frac{f'_{23}}{\lambda_2}. \tag{4.22}$$

Rozlišme nyní dva případy: 1. $\Delta \neq 0$, 2. $\Delta = 0$

II.1. $\Delta \neq 0$ – tj. $f'_{13} \neq 0$ (dle (4.21))
Rovnici (4.22) lze dále upravit:

$$\lambda_2(y' - v'_2)^2 + 2f'_{13}(x' - v'_1) = 0, \quad \text{kde } v'_1 = -\frac{f''_{33}}{2f'_{13}}.$$

Označme $V = [v'_1 v'_2]_{\mathcal{B}'}$ a uvažujme bázi $\mathcal{B}'' = \langle V; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$. Transformační rovnice pro přechod od $\mathcal{B}'$ k $\mathcal{B}''$ zní:[15]

$$\begin{aligned} x' &= x'' + v'_1 \\ y' &= y'' + v'_2. \end{aligned}$$

Označíme-li $p = -\frac{f'_{13}}{\lambda_2}$, pak obecná rovnice v bázi $\mathcal{B}''$ nabude tvaru

$$y''^2 - 2px'' = 0.$$

Užitím vztahu (4.21) a (4.15) lze psát

$$|p| = \sqrt{-\frac{\Delta}{\mathcal{S}^3}}.$$

Povšimněme si, že přímka $o = \{V, \mathbf{a}_1\}$ je osou souměrnosti kuželosečky $\mathcal{K}$. Zda existují i další osy souměrnosti vyšetříme později.

II.2. $\Delta = 0$ – tj. $f'_{13} = 0$ (dle (4.21))
Rovnice (4.22) se redukuje na tvar

$$\lambda_2(y' - v'_2)^2 + f'_{33} = 0.$$

Položme $V = [0, v'_2]_{\mathcal{B}'}$ a uvažujme bázi $\mathcal{B}'' = \langle V; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$. Transformační rovnice pro přechod od $\mathcal{B}'$ k $\mathcal{B}''$ zní:

$$\begin{aligned} x' &= x'' \\ y' &= y'' + v'_2. \end{aligned}$$

Obecnou rovnici v bázi $\mathcal{B}''$ lze psát

$$y''^2 + q = 0. \tag{4.23}$$

Povšimněme si, že přímka $o = \{V, \mathbf{a}_1\}$ je osou souměrnosti kuželosečky $\mathcal{K}$ a každý bod přímky o je její středem souměrnosti. Zda má $\mathcal{K}$ ještě další středy a osy souměrnosti vyšetříme později.

Nyní budeme diskutovat případy 1. $q = 0$ a 2. $q \neq 0$.
Je patrno, že $q = 0$, právě když hodnost matice $\mathbf{F}''$ v bázi $\mathcal{B}''$je rovna jedné (jak vypadá $\mathbf{F}''$?) a tudíž (dle věty 4.1.8) je hodnost výchozí matice $\mathbf{F}$ rovněž jedna.

[15] Souřadnice bodu V vzhledem k výchozí bázi $\mathcal{B}$ bychom zjistili z transformačních rovnic dle (4.16), později ukážeme obecný způsob jejich výpočtu.

II.2.1., $\delta = 0, \Delta = 0, h(\mathbf{F}) = 1$

Rovnice (4.23) přejde ve tvar

$$y''^2 = 0,$$

což značí, že kuželosečka je přímkou $\{V, \mathbf{a}_1\}$ (*dvojnásobná přímka*).

II.2.2., $\delta = 0, \Delta = 0, h(\mathbf{F}) \neq 1$

(a) je-li $q < 0$, lze rovnici (4.23) psát

$$(y'' + \sqrt{|q|})(y'' - \sqrt{|q|}) = 0$$

a je zřejmé, že kuželosečka $\mathcal{K}$ daná v$\mathcal{B}''$ obecnou rovnicí (4.23) je sjednocením dvou rovnoběžných přímek p a r daných v soustavě souřadné určené bází $\mathcal{B}''$ obecnými rovnicemi

$$p : y'' = \sqrt{|q|}, \quad r : y'' = -\sqrt{|q|}$$

(tedy majících směr $[\mathbf{a}_1]$).

(b) je-li $q > 0$, je $\mathcal{K}$ množinou prázdnou[16].

4.2.2 Definice jednotlivých kuželoseček

Ukázali jsme, že ke každé kuželosečce $\mathcal{K}$ existuje jistá kartézská báze ($\mathcal{B}''$), v níž nabývá její obecná rovnice velmi jednoduchého tvaru. *Neexistuje* tudíž kuželosečka, kterou by nebylo možné vyjádřit (v jisté bázi) jednou z takto získaných obecných rovnic.

Definice 4.2.1 Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka. Pak báze $\mathcal{B}''$ sestrojená výše se nazývá *kanonická báze kuželosečky* $\mathcal{K}$ a příslušná obecná rovnice v této bázi se nazývá *kanonická rovnice kuželosečky* $\mathcal{K}$.

Otázku jednoznačnosti existence kanonické báze k dané kuželosečce řeší zejména důsledky 4.8.10 a 4.10.7.

Nyní již můžeme *pojmenovat* kuželosečky roviny $\mathcal{E}_2$, (přesněji řečeno ty, jejichž název dosud není definován). Provedeme to právě pomocí tvaru kanonické rovnice.

[16] Poznamenejme, že v tomto případě lze rovnici (4.23) psát $(y'' + i\sqrt{|q|})(y'' - i\sqrt{|q|}) = 0$, proto, pokud bychom pracovali v komplexním rozšíření euklidovské roviny, hovořili bychom o dvojicí imaginárních rovnoběžek (kde by se v tomto rozboru „skrývala" dvojice imaginárních různobežek?) .

Definice 4.2.2 Kuželosečka $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}_2$ se nazývá

- *elipsa* (*s poloosami* a, b), jestliže existuje kartézská báze, vzhledem k níž je $\mathcal{K}$ dána obecnou rovnicí
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{R}^+.$$
V případě $a = b$ se $\mathcal{K}$ nazývá *kružnice* (*o poloměru* a).

- *hyperbola* (*s poloosami* a, b), jestliže existuje kartézská báze, vzhledem k níž je $\mathcal{K}$ dána obecnou rovnicí
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{R}^+.$$

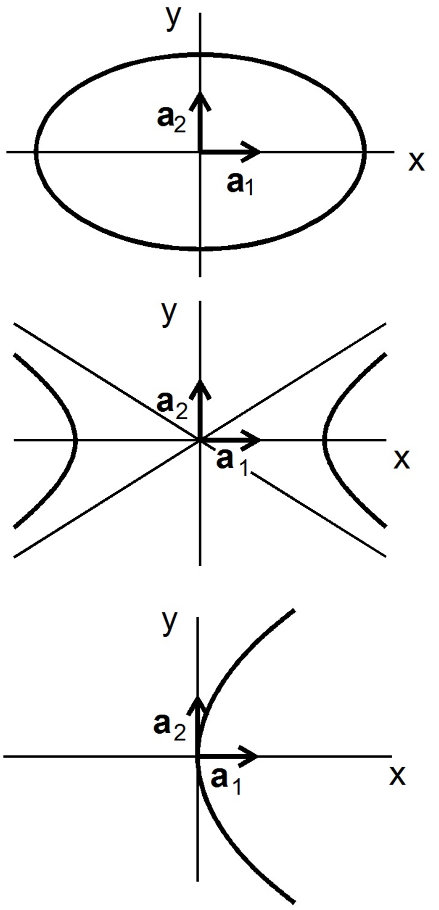
- *parabola* (*s parametrem* p),[17]jestliže existuje kartézská báze, vzhledem k níž je $\mathcal{K}$ dána obecnou rovnicí
$$y^2 - 2px = 0, \quad \text{kde } p \in \mathbb{R}^+.$$

Lze se snadno přesvědčit, že tyto definice elipsy, kružnice, hyperboly, paraboly jsou ekvivalentní s tzv. metrickými definicemi těchto křivek (tj. pomocí vzdálenosti), které již čtenář zná ze střední školy resp. z konstrukční geometrie.[18]

Z konstrukce kanonické báze vyplývá, že její vektory udávají směr hlavní a vedlejší osy (u elipsy a hyperboly), resp. osy a řídící přímky paraboly (připomeňme očíslování vlastních čísel - z obrázku vidíme jeho geometrický význam).

[17]Pro číslo p se též užívá názvu *poloparametr*.

[18] Uvažujme např. elipsu $\mathcal{K}$ zadanou dvojicí ohnisek F_1, F_2 a délkou tzv. hlavní (nebo též „velké“) poloosy a ($2a > e, e = \frac{1}{2}|F_1F_2|$).Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, že její počátek je středem úsečky F_1F_2 a osa x je přímka F_1F_2 (orientace může být libovolná). Zjistíme, že množina bodů $X = [x, y]$, jejichž součet vzdáleností $|XF_1| + |XF_2| = 2a$, je totožná s kuželosečkou, jejíž obecná rovnice ve zvolené soustavě souřadné zní
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{kde } b = \sqrt{a^2 - e^2}.$$
Tím je dokázána ekvivalence metrické definice elipsy a definice elipsy dle definice 4.2.2 (pro případ $a \neq b$). Ostatní případy se řeší podobně. Tato úvaha je ostatně známa již ze střední školy.



Obr. 4.2.2

Poznamenejme, že dle naší definice je kružnice zvláštním případem elipsy, zatímco z metrické definice elipsy nelze získat kružnici jako její zvláštní případ (pokud trváme na různosti ohnisek elipsy). Pokud nebude uvedeno jinak, budeme vždy pod pojmem *elipsa* rozumět i kružnici, jako její speciální případ. Povšimněme si, že v našem případě je rozdíl mezi elipsou a kružnicí dán počtem kořenů charakteristické rovnice.

Jak snadno poznáme (aniž bychom transformovali obecnou rovnici v kanonickou), o kterou kuželosečku se jedná? Řešením je následující věta, kterou na základě provedeného rozboru dokážeme. Povšimněme si, že následující věta nachází *pokrytí množiny kuželoseček* (proč?).

Věta 4.2.3 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka, $\mathcal{B}$ libovolná báze a* $\mathbf{F}$ *některá matice kuželosečky $\mathcal{K}$ v této bázi, Δ, δ nechť jsou po řadě velký a malý diskriminant, λ některé z vlastních čísel matice* $\mathbf{F}_0$. *Pak platí:*

- $\Delta \neq 0 \wedge \delta > 0 \wedge \lambda\Delta < 0 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je elipsa (vč. kružnice),*
- $\Delta \neq 0 \wedge \delta > 0 \wedge \lambda\Delta > 0 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K} = \emptyset$,*
- $\Delta \neq 0 \wedge \delta < 0 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je hyperbola,*
- $\Delta \neq 0 \wedge \delta = 0 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je parabola,*
- $\Delta = 0 \wedge \delta > 0 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je jednobodová množina,*
- $\Delta = 0 \wedge \delta < 0 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je dvojice různoběžek,*
- $\Delta = 0 \wedge \delta = 0 \wedge h(\mathbf{F}) \neq 1 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je dvojice rovnoběžek nebo $\mathcal{K} = \emptyset$,*
- $\Delta = 0 \wedge \delta = 0 \wedge h(\mathbf{F}) = 1 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je přímka.*

Je-li $\mathcal{B}$ kartézskou bází, pak hodnota poloos elipsy a hyperboly i parametru paraboly je dána vztahy v odstavci 4.2.1.

Důkaz:

(a) Jestliže je $\mathcal{B}$ kartézská, plyne věta přímo z uvedeného rozboru.

(b) Nechť $\mathcal{B}$ není kartézská. Zvolme libovolnou kartézskou bázi $\mathcal{B}'$. Buď $\mathbf{F}'$ matice $\mathcal{K}$ vzniklá touto transformací soustavy souřadné z matice $\mathbf{F}$. Pak v souladu s větou 4.1.8 se nemění znaménko velkého ani malého diskriminantu ani hodnost matice.
Protože $\mathbf{F}_0$ i $\mathbf{F}'_0$ jsou matice téže kvadratické formy Φ_2, platí dle věty 3.4.13, že obě vlastní čísla matice $\mathbf{F}_0$ jsou kladná (záporná), právě když obě vlastní čísla matice $\mathbf{F}'_0$ jsou kladná (záporná). Proto i znaménka součinů $\lambda\Delta$ a $\lambda'\Delta'$ jsou táž.
Vidíme, že všechny hodnoty vystupující jako předpoklady implikací v dokazované větě jsou tytéž bez ohledu na to, zda je výchozí báze kartézská či nikoli, čímž je věta dokázána.

□

Množina kuželoseček je tedy tvořena množinou elips (vč. kružnic), hyperbol, parabol, jednobodových množin (užívá se též názvu *singulární elipsa*), dvojic různoběžek (užívá se názvu *singulární hyperbola*), dvojic rovnoběžek a množinou přímek (dva poslední případy se označují jako *singulární parabola*), kuželosečkou je i množina prázdná.

Nyní se naskýtá několik otázek. Předně je otázkou, zda lze obrátit implikace ve větě 4.2.3, další otázkou je, zda hodnota poloos, resp. parametru, je či není geometrickou vlastností elipsy a hyperboly, resp. paraboly.

Odpověď na první otázku není obecně kladná. Nemůžeme totiž obecně vyloučit existenci matic téže kuželosečky v téže bázi, které nejsou úměrné, a proto nemusí mít například totéž $\mathrm{sgn}\delta$ (např. rovnicemi $x^2 + 1 = 0$ a $x^2 + y^2 + 1 = 0$ je určena tatáž kuželosečka (jaká?) a přitom v prvém případě je $\delta = 0$ a ve druhém $\delta > 0$).

Proto zůstává otevřenou otázkou, zda může daná kuželosečka náležet k více než jedné z uvedených množin kuželoseček (tj. mít více názvů – být například současně elipsou a hyperbolou či parabolou a přímkou apod.)[19] Tím spíše pak zůstává otevřená otázka druhá.

Je patrno, že v případě, kdy v dané bázi jsou všechny matice určité kuželosečky úměrné, je řešení obou problémů nasnadě. Proto se v následujícím odstavci budeme zabývat otázkou, která vyvstala v souvislosti s větou 4.1.3 – tzv. otázkou jednoznačnosti.

4.3 Věta o jednoznačnosti pro kuželosečky

Věta 4.3.1 *(o určenosti) Ke každé pětici bodů roviny, z nichž žádné čtyři nejsou kolineární, existuje právě jedna kuželosečka, která jimi prochází.*

Důkaz: Zvolme libovolně bázi $\mathcal{B}$ a označme pro $1 \leq j \leq 5$ body $M_j = [x_j, y_j]_{\mathcal{B}}$. Hledejme nyní obecné rovnice všech kuželoseček $\mathcal{K}$, které procházejí danou pěticí bodů. Při standardním označení koeficientů polynomu $F(x, y)$ tedy obdržíme 5 homogenních lineárních rovnic $(1), \cdots, (5)$ pro 6 neznámých koeficientů tohoto polynomu:

$$(j)\ x_j^2 f_{11} + (2x_j y_j) f_{12} + y_j^2 f_{22} + (2x_j) f_{13} + (2y_j) f_{23} + f_{33} = 0,\ 1 \leq j \leq 5.$$

Jsou-li tyto rovnice lineárně nezávislé, je řešení této soustavy (a tedy i polynom $F(x, y)$) určeno až na nenulový násobek jednoznačně, což znamená (věta 4.1.3), že uvažovaná kuželosečka je jediná.

Ukažme, že rovnice uvažované soustavy nemohou být lineárně závislé. Nechť jsou uvažované rovnice lineárně závislé – nechť například rovnice (5) je lineární kombinací předchozích. To má ovšem za následek, že každá kuželosečka procházející body M_1 až M_4 (tj. koeficienty její obecné rovnice vyhovují rovnicím (1) až (4) prochází nutně i bodem M_5 (proč?).

Uvažujme nyní kuželosečky $\mathcal{K}_1 = \overleftrightarrow{M_1M_2} \cup \overleftrightarrow{M_3M_4}$ a $\mathcal{K}_2 = \overleftrightarrow{M_1M_3} \cup \overleftrightarrow{M_2M_4}$. Bod M_5 náleží jejich průniku, proto (alespoň) tři z bodů $M_1, \cdots, M_4$ musí být kolineární (prověřte!). Nechť např. $M_3 \in \overleftrightarrow{M_1M_2}$. Pak (v souladu s předpoklady věty) bod M_4 ani M_5 na přímce $\overleftrightarrow{M_1M_2}$ neleží. Jistě existuje přímka procházející bodem M_4 a neobsahující bod M_5, označme ji p. Uvážíme-li kuželosečku $\mathcal{K} = \overleftrightarrow{M_1M_2} \cup p$, pak $\mathcal{K}$ prochází všemi z bodů $M_1, \cdots, M_4$ a musí tedy procházet i bodem M_5, který tudíž leží na přímce $\overleftrightarrow{M_1M_2}$. Body M_1, M_2, M_3 a M_5 jsou tedy kolineární, což je spor. Ukázali jsme, že výše uvedené rovnice jsou lineárně nezávislé. $\square$

Nyní již můžeme přistoupit k vyřešení otázky jednoznačnosti matice (obecné rovnice) kuželosečky v libovolné bázi:

[19] Samozřejmě víme (ze syntetické geometrie), že tato situace nenastane. K tomuto zjištění však chceme dojít analyticky.

Věta 4.3.2 *(o jednoznačnosti) Určují-li matice $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ nad touže bází tutéž kuželosečku obsahující aspoň dva body, pak existuje $c \neq 0$ tak, že*

$$\mathbf{F}_2 = c\mathbf{F}_1.$$

Znamená to tedy, že dvě matice (obecné rovnice) určují v dané bázi tutéž kuželosečku obsahující alespoň dva body právě tehdy, když jsou úměrné. Jak jsme již uvedli dříve, pro prázdnou či jednobodovou množinu věta o jednoznačnosti platit nemůže.

Následující věta je důsledkem věty 4.1.5

Věta 4.3.3 *Jsou-li všechny matice téže kuželosečky nad jistou bází (po dvou) úměrné, jsou úměrné i všechny její matice nad libovolnou bází.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{B}$ je báze, nad níž jsou všechny matice křivky $\mathcal{K}$ úměrné, $\mathcal{C}$ libovolná další báze a $\mathbf{P}$ matice přechodu od $\mathcal{C}$ k $\mathcal{B}$.
Buďte $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ matice křivky $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{C}$. Pak (dle věty 4.1.5) určují matice $\mathbf{F}' = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^T$ a $\mathbf{G}' = \mathbf{P}\mathbf{G}\mathbf{P}^T$ kuželosečku $\mathcal{K}$ v $\mathcal{B}$, a tudíž existuje $c \neq 0$ tak, že $\mathbf{G}' = c\mathbf{F}'$, neboli $\mathbf{P}\mathbf{G}\mathbf{P}^T = c\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^T$, odkud – vzhledem k regularitě $\mathbf{P}$ plyne $\mathbf{G} = c\mathbf{F}$, čímž je věta dokázána. $\square$

Nyní přistupme k důkazu tvrzení o jednoznačnosti, přičemž vzhledem k větě 4.3.3 postačí dokázat úměrnost matic v jedné bázi.

Důkaz věty 4.3.2:

I. Buď $\mathcal{K}$ přímka.
Zvolme bázi $\mathcal{B}$ tak, že $\mathcal{K}$ je osou y. Pak $x^2 = 0$ je jednou z obecných rovnic $\mathcal{K}$. Ukažme, že libovolná další obecná rovnice v $\mathcal{B}$ má tvar

$$f_{11}x^2 = 0,\ f_{11} \neq 0. \tag{4.24}$$

Nechť tedy $F(x, y) = 0$ je též obecnou rovnicí $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}$.
Protože bod $[0, y]$ náleží $\mathcal{K}$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$, musí platit:

$$\forall y \in \mathbb{R}:\ f_{22}y^2 + 2f_{23}y + f_{33} = 0,$$

což nastane, právě když $f_{22} = f_{23} = f_{33} = 0$.
Obecnou rovnici lze psát ve tvaru

$$\mathcal{K}:\ x(f_{11}x + 2f_{12}y + 2f_{13}) = 0,$$

což značí, že $\mathcal{K}$ je sjednocením přímek o rovnicích (po řadě)

$$x = 0 \quad \text{a} \quad f_{11}x + 2f_{12}y + 2f_{13} = 0.$$

Obě tyto lineární rovnice jsou však rovnice téže přímky a musí tedy být úměrné, což nastane, právě když $f_{12} = f_{13} = 0$ a $f_{11} \neq 0$.
Ukázali jsme tedy, že všechny obecné rovnice $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}$ mají požadovaný tvar (4.24).

II. Nechť $\mathcal{K}$ je elipsou, hyperbolou, parabolou, dvojicí různoběžek či dvojicí rovnoběžek. Ukážeme, že všech těchto případech, lze na $\mathcal{K}$ najít 5 různých bodů, z nichž žádné čtyři nejsou kolineární. Jak jsme totiž ukázali v důkaze věty o určenosti, je obecná rovnice kuželosečky v těchto případech určena jednoznačně až na nenulový násobek.

Je-li $\mathcal{K}$ dvojicí přímek, je existence těchto bodů zřejmá.

V ostatních případech zvolme bázi $\mathcal{B}$ tak, aby v ní $\mathcal{K}$ měla kanonickou rovnici (viz podkapitola 4.2).
Je-li $\mathcal{K}$ elipsou, má v $\mathcal{B}$ obecnou rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Snadno se přesvědčíme, že $\mathcal{K}$ obsahuje body $[a, 0], [-a, 0], [0, b], [0, -b]$ a $[\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}]$ a že dokonce žádné tři z nich nejsou kolineární.
Analogicky lze postupovat v případě hyperboly či paraboly.

$\square$

Věta o jednoznačnosti bude mít pro další studium kuželoseček zásadní význam (vzhledem např. k poznámkám 4.1.4 a 4.1.7).

Nyní dokážeme existenci veličin, které představují významné invarianty kuželoseček a následně odpovíme na otázky vyslovené na konci podkapitoly 4.2.

Věta 4.3.4 *Buď $\mathcal{K}$ neprázdná kuželosečka, $\mathbf{F}$ její libovolná matice v libovolné bázi. Pak*

- *nulovost či nenulovost Δ,*
- *znaménko δ,*
- *$h(\mathbf{F})$,*

jsou jednoznačně určeny kuželosečkou $\mathcal{K}$ (jde o geometrické vlastnosti).

Důkaz:

(a) Nechť $|\mathcal{K}| > 1$.
Zvolme libovolně báze $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Nechť $\mathbf{F}$, resp. $\mathbf{G}$, je některá matice určující $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}$ resp. $\mathcal{B}'$.
Kuželosečka $\mathcal{K}$ je v bázi $\mathcal{B}'$ určena rovněž maticí $\mathbf{F}'$, která vznikne z $\mathbf{F}$ provedením příslušné transformace souřadnic (věta 4.1.5). Podle věty o jednoznačnosti pak ovšem platí $\mathbf{F}' = c\mathbf{G}$, $c \neq 0$.
Označme $\Delta^{\mathbf{F}}$ a $\delta^{\mathbf{F}}$ diskriminanty matice $\mathbf{F}$ a analogicky pro matice $\mathbf{F}'$ a $\mathbf{G}$. Užitím

věty 4.1.8 dostáváme: $h(\mathbf{F}) = h(\mathbf{F}')$, $\mathrm{sgn}\Delta^{\mathbf{F}} = \mathrm{sgn}\Delta^{\mathbf{F}'}$ a $\mathrm{sgn}\delta^{\mathbf{F}} = \mathrm{sgn}\delta^{\mathbf{F}'}$. Z úměrnosti matic $\mathbf{G}$ a $\mathbf{F}'$ plyne: $h(\mathbf{F}') = h(\mathbf{G})$, $\delta^{\mathbf{F}'} = c^2\delta^{\mathbf{G}}$ a $\Delta^{\mathbf{F}'} = c^3\Delta^{\mathbf{G}}$, platí tudíž: $\Delta^{\mathbf{F}} = 0 \Leftrightarrow \Delta^{\mathbf{G}} = 0$, $\mathrm{sgn}\delta^{\mathbf{F}} = \mathrm{sgn}\delta^{\mathbf{G}}$ a $h(\mathbf{F}) = h(\mathbf{G})$. Tím je tvrzení dokázáno.

(b) Nechť $\mathcal{K}$ je jednobodová (nelze tedy užít větu o jednoznačnosti).
Zvolíme-li bázi tak, že tento bod je jejím počátkem, je $\mathcal{K}$ určena obecnou rovnicí $x^2 + y^2 = 0$, a tedy pro příslušnou matici $\mathbf{F}$ platí $\Delta^{\mathbf{F}} = 0$, $\delta^{\mathbf{F}} > 0$. Vybereme nyní jakoukoli další matici $\mathbf{G}$, která určuje uvažovaný bod (případně i v jiné bázi). Pokud by $\Delta^{\mathbf{G}} \neq 0$ nebo $\delta^{\mathbf{G}} \leq 0$, pak by (dle věty 4.2.3) $\mathcal{K}$ byla kuželosečkou, která je buď prázdná, nebo obsahuje více než jeden bod, což by byl spor. Proto musí být $\Delta^{\mathbf{G}} = 0$ a $\delta^{\mathbf{G}} > 0$.

□

Poznámka 4.3.5 Díky právě dokázané větě je zřejmé, že následující definice 4.3.6 a 4.3.7 jsou korektní – tj. definované pojmy jsou skutečně geometrické, tedy že každá kuželosečka je buď regulární, nebo singulární a náleží právě k jednomu z typů zavedených druhou z definic. (Proč uvedené pojmy nezavádíme pro $\mathcal{K} = \emptyset$?)

Definice 4.3.6 Buď $\mathcal{K} \neq \emptyset$, $\mathbf{F}$ její libovolná matice v některé bázi. Řekneme, že $\mathcal{K}$ je *regulární*, jestliže $\Delta \neq 0$. V opačném případě řekneme, že $\mathcal{K}$ je *singulární*.

Definice 4.3.7 Buď $\mathcal{K} \neq \emptyset$, $\mathbf{F}$ její libovolná matice v některé bázi. Kuželosečka $\mathcal{K}$ se nazývá

- *eliptického typu*, jestliže $\delta > 0$,
- *hyperbolického typu*, jestliže $\delta < 0$,
- *parabolického typu*, jestliže $\delta = 0$.

Nyní již pro *neprázdné* kuželosečky snadno ukážeme, že ve větě 4.2.3 lze implikace nahradit ekvivalencemi:

Věta 4.3.8 *Buď $\mathcal{K} \neq \emptyset$ kuželosečka, $\mathbf{F}$ její libovolná matice v některé bázi. Pak platí:*

- $\Delta \neq 0 \wedge \delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je elipsa (vč. kružnice),*
- $\Delta \neq 0 \wedge \delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je hyperbola,*
- $\Delta \neq 0 \wedge \delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je parabola,*
- $\Delta = 0 \wedge \delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je jednobodová množina,*
- $\Delta = 0 \wedge \delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je dvojice různoběžek,*
- $\Delta = 0 \wedge \delta = 0 \wedge h(\mathbf{F}) \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je dvojice rovnoběžek,*
- $\Delta = 0 \wedge \delta = 0 \wedge h(\mathbf{F}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je přímka.*

Důkaz: Máme dokázat jen implikace „$\Leftarrow$“.

(a) regulární kuželosečky
Je-li $\mathcal{K}$ elipsa, pak (dle definice 4.2.2) existuje báze, v níž je elipsa určena obecnou rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, proto pro příslušnou matici platí $\Delta \neq 0$, $\delta > 0$, což podle věty 4.3.4 musí platit pro libovolnou matici v libovolné bázi. Analogicky postupujeme pro hyperbolu a parabolu.

(b) singulární kuželosečky
Podle článku 4.2.1 (rozbor obecné rovnice) víme, že je-li $\mathcal{K}$ např. dvojice různoběžek, existuje báze, v níž je $\mathcal{K}$ určena obecnou rovnicí $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, tudíž pro příslušnou matici platí $\Delta = 0$, $\delta < 0$, což podle věty 4.3.4 musí platit pro libovolnou matici v libovolné bázi. Analogicky postupujeme pro jednobodovou množinu, dvojici rovnoběžek či přímku.

□

Následující tabulka třídící *neprázdné kuželosečky* dle typu a regularity vyplývá z věty 4.3.8. (Význam symbolů Δ, δ je standardní.)

		regulární kuželosečka	singulární kuželosečka
		$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
eliptický typ	$\delta > 0$	elipsa	jednobodová množina
hyperbolický typ	$\delta < 0$	hyperbola	dvojice různoběžek
parabolický typ	$\delta = 0$	parabola	dvojice rovnoběžek či přímka

Poznámka 4.3.9 Věta 4.3.8 nám umožňuje zodpovědět otázky položené v závěru podkapitoly 4.2. Protože neexistují matice téže neprázdné kuželosečky, které by se lišily byť jen v jediném ze znaků na levé straně ekvivalencí (proč?), není možné, aby táž kuželosečka byla např. současně elipsou a hyperbolou, či dvojicí různoběžek a parabolou a tak podobně.

Současně je zřejmé, že jde o **úplné třídění množiny neprázdných kuželoseček** na vzájemně disjunktní množiny, tj. rozklad. Ekvivalenci, které tento rozklad náleží, nalezneme v podkapitole 4.4.

Zbývá ještě ukázat, že i hodnoty poloos (resp. parametru) jsou geometrickými vlastnostmi regulárních kuželoseček.

Buďte $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ libovolné ortonormální báze a nechť $\mathbf{F}$, resp. $\mathbf{G}$ je některá matice určující $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}$, resp. $\mathcal{B}'$.
Kuželosečka $\mathcal{K}$ je v bázi $\mathcal{B}'$ určena také maticí $\mathbf{F}'$, která vznikne z $\mathbf{F}$ provedením příslušné transformace souřadnic. Podle věty o jednoznačnosti pak $\mathbf{F}' = c\mathbf{G}$ a $\mathbf{F}'_0 = c\mathbf{G}_0$, $c \neq 0$.

Označme $\Delta^{\mathbf{F}}$ a $\delta^{\mathbf{F}}$ velký a malý diskriminant matice $\mathbf{F}$, $\lambda_1^{\mathbf{F}}, \lambda_2^{\mathbf{F}}$ vlastní čísla matice $\mathbf{F}_0$ a $\mathcal{S}^F$ její stopu, analogicky pro matice $\mathbf{F}', \mathbf{G}$.
Vzhledem k tomu, že uvažovaná transformace souřadnic je ortogonální, platí (viz věty 4.1.8

a 4.1.10): $\Delta^{\mathbf{F}} = \Delta^{\mathbf{F}'}$, $\delta^{\mathbf{F}} = \delta^{\mathbf{F}'}$, $\mathcal{S}^{\mathbf{F}} = \mathcal{S}^{\mathbf{F}'}$, $\lambda_i^{\mathbf{F}} = \lambda_i^{\mathbf{F}'}$, $i = 1, 2$. Dále je patrno $\delta^{\mathbf{F}'} = c^2\delta^{\mathbf{G}}$, $\Delta^{\mathbf{F}'} = c^3\Delta^{\mathbf{G}}$ a $\mathcal{S}^{\mathbf{F}'} = c\mathcal{S}^{\mathbf{G}}$.
Z identity $\det(\mathbf{F}_0' - \lambda^{\mathbf{F}'}\mathbf{E}) = c^2 \det(\mathbf{G}_0 - \frac{\lambda^{\mathbf{F}'}}{c}\mathbf{E})$, $c \neq 0$ vyplývá, že mezi vlastními čísly matic $\mathbf{F}_0'$ a $\mathbf{G}_0'$ platí vztah: $\lambda_i^{\mathbf{F}'} = c\lambda_i^{\mathbf{G}}$, $i = 1, 2$.

Odvodili jsme tedy platnost následujících rovností:

$$\delta^{\mathbf{F}} = c^2\delta^{\mathbf{G}}, \quad \Delta^{\mathbf{F}} = c^3\Delta^{\mathbf{G}}, \quad \mathcal{S}^{\mathbf{F}} = c\mathcal{S}^{\mathbf{G}}, \quad \text{a} \quad \lambda_i^{\mathbf{F}} = c\lambda_i^{\mathbf{G}}, \quad i = 1, 2. \tag{4.25}$$

Buď $\mathcal{K}$ např. elipsa. K výpočtu poloos (vztah 4.19) užijme jak matice $\mathbf{F}$, tak i matice $\mathbf{G}$. S přihlédnutím k relacím (4.25) obdržíme:

$$a^{\mathbf{F}} = \sqrt{\frac{-\Delta^{\mathbf{F}}}{\lambda_1^{\mathbf{F}}\delta^{\mathbf{F}}}} = \sqrt{\frac{-c^3\Delta^{\mathbf{G}}}{c\lambda_1^{\mathbf{G}}c^2\delta^{\mathbf{G}}}} = \sqrt{\frac{-\Delta^{\mathbf{G}}}{\lambda_1^{\mathbf{G}}\delta^{\mathbf{G}}}} = a^{\mathbf{G}},$$

neboli hodnota poloosy a nezávisí na výběru matice kuželosečky. Snadno se přesvědčíme, že je tomu tak i pro poloosu b, obě poloosy hyperboly a parametr paraboly.
Platí tedy následující tvrzení.

Věta 4.3.10 *Velikost poloos elipsy, hyperboly a parametru paraboly jsou geometrickými vlastnostmi těchto kuželoseček.*

Na závěr tohoto odstavce uveďme praktické použití teorie:

Příklad 4.3.11 Ve zvolené kartézské soustavě souřadné je obecnou rovnicí

$$23x^2 - 72xy + 2y^2 - 6x - 8y = 0$$

dána kuželosečka $\mathcal{K}$. Nalezněte její kanonickou rovnici, vrchol(y) a ohnisko/a.
Řešení:
Velká, resp. malá, matice má tvar (výchozí bázi označme $\mathcal{B}$):

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 23 & -36 & -3 \\ -36 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} 23 & -36 \\ -36 & 2 \end{pmatrix}.$$

Odtud spočteme, že $\Delta = -1250$, $\delta = -1250$. Podle věty 4.2.3 ($\Delta \neq 0, \delta < 0$) je $\mathcal{K}$ *hyperbola*.
Zajímat se budeme především o její střed, velikost a směry poloos. Nalezneme tedy kanonickou bázi – postupovat budeme dle podkapitoly 4.2.1.
Nejprve najdeme vlastní čísla matice $\mathbf{F}_0$ (rovnice (4.13))

$$0 = \det(\mathbf{F}_0 - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 23 - \lambda & -36 \\ -36 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda - 1250,$$

odtud plyne, že $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{-25, 50\}$. Dle dohody o očíslování vlastních čísel tedy ($\delta < 0$): $\lambda_1 = -25, \lambda_2 = 50$.
Příslušné hlavní směry jsou generovány vektory, jejichž souřadnice jsou řešením soustavy (4.14):

$$\begin{aligned} (23-\lambda)a_1 - \quad 36a_2 \quad &= 0 \\ -36a_1 \quad + (2-\lambda)a_2 &= 0, \end{aligned}$$

tudíž hlavní směr příslušný λ_1 je $[(3,4)]$, pro λ_2 pak $[(4,-3)]$.[20] Zkonstruujme *kartézskou* bázi hlavních směrů $\mathcal{B}' = \langle P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle$ – tedy

$$\mathbf{a}_1 = (\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5})_{\mathcal{B}_0},\ \mathbf{a}_2 = (\tfrac{4}{5}, -\tfrac{3}{5})_{\mathcal{B}_0}.$$

Transformační rovnice pro přechod od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$ (4.16) znějí:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{5}x' + \tfrac{4}{5}y' \\ y &= \tfrac{4}{5}x' - \tfrac{3}{5}y'\ . \end{aligned}$$

Nyní najdeme polynom $F'(x', y')$ vzniklý z polynomu $F(x, y)$ příslušnou transformací soustavy souřadné (dosazením za x a y do polynomu $F(x, y)$):

$$\begin{aligned} F'(x', y') = 23\left(\tfrac{3}{5}x' + \tfrac{4}{5}y'\right)^2 - 72\left(\tfrac{3}{5}x' + \tfrac{4}{5}y'\right)\left(\tfrac{4}{5}x' - \tfrac{3}{5}y'\right) + \\ +2\left(\tfrac{4}{5}x' - \tfrac{3}{5}y'\right)^2 - 6\left(\tfrac{3}{5}x' + \tfrac{4}{5}y'\right) + 8\left(\tfrac{4}{5}x' - \tfrac{3}{5}y'\right) = 0, \end{aligned}$$

odtud po úprvě obdržíme obecnou rovnici $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}'$ (srv. (4.17)):[21]

$$-25x'^2 - 10x' + 50y'^2 = 0.$$

Úpravou na úplné čtverce dosáhneme tvaru:

$$-25(x' + \tfrac{1}{5})^2 + 50y'^2 + 1 = 0.$$

Položme $S = \left[-\frac{1}{5}, 0\right]_{\mathcal{B}'}$ a zkonstruujme bázi $\mathcal{B}'' = \langle S, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle$ (kanonická).
Transformační rovnice pro přechod od $\mathcal{B}'$ k $\mathcal{B}''$ mají tvar:

$$\begin{aligned} x' &= x'' \quad - \tfrac{1}{5} \\ y' &= \quad y'' \end{aligned}\ .$$

Pomocí transformačních rovnic od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$ spočteme, že

$$S = \left[-\tfrac{3}{25}, -\tfrac{4}{25}\right]_{\mathcal{B}}$$

[20]Povšimněte si, že jsou skutečně ortogonální.
[21]Povšimněte si, že vymizel koeficient na pozici (12).

a sestavíme transformační rovnice pro přechod od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}''$:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{5}x'' + \tfrac{4}{5}y'' - \tfrac{3}{25} \\ y &= \tfrac{4}{5}x'' - \tfrac{3}{5}y'' - \tfrac{4}{25}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Polynom $F''(x'', y'')$ určuje $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}''$ obecnou rovnicí (srv. (4.18))

$$-25x''^2 + 50y''^2 + 1 = 0,$$

kterou lze upravit na kanonický tvar (srv. (4.20)):

$$\frac{x''^2}{\frac{1}{25}} - \frac{y''^2}{\frac{1}{50}} = 1.$$

Odtud je patrno, že délky poloos jsou: $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{10}$, excentricita pak $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{3}{50}}$ (nalézt délky poloos lze též přímo dle vztahu (4.20)).

Hlavní osa je tudíž přímka $o_1 = \{S; \mathbf{a}_1\} = \{\left[-\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right]_{\mathcal{B}}; (3,4)_{\mathcal{B}_0}\}$, vedlejší poloosa pak $o_2 = \{S; \mathbf{a}_2\} = \{\left[-\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right]_{\mathcal{B}}; (4,-3)_{\mathcal{B}_0}\}$.

Souřadnice ohnisek a hlavních vrcholů (ve výchozí bázi) můžeme najít dvojím způsobem. Hlavní vrcholy mají v kanonické bázi $\mathcal{B}''$ zřejmě souřadnice $A = \left[\frac{1}{5}, 0\right]_{\mathcal{B}''}$ a $B = \left[-\frac{1}{5}, 0\right]_{\mathcal{B}''}$ a jejich souřadnice v původní soustavě souřadné spočteme dle (4.26). Podobně pro ohniska.[22] Souřadnice těchto bodů lze nalézt rovněž pomocí známých relací: $A = S + a\mathbf{a}_1$, $B = S - a\mathbf{a}_1$, $F_1 = S + e\mathbf{a}_1$, $F_2 = S - e\mathbf{a}_1$. Tudíž např. $A = \left[-\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right]_{\mathcal{B}} + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)_{\mathcal{B}_0}$.

Dále nás mohou např. zajímat rovnice asymptot.[23] Uvažujme jednu z nich – a_1 o rovnici $y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}x''$. Vyjádříme-li ji parametricky ve tvaru $x'' = t \wedge y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}t$, snadno (dosazením do (4.26)) zjistíme její parametrické rovnice ve výchozí bázi (proveďte si).

V dalších odstavcích ukážeme, jak lze tyto vlastnosti kuželosečky najít jednodušeji.

Jedním z důsledků věty o jednoznačnosti bylo, že žádnou transformací soustavy souřadné nelze převést matici určující např. elipsu v matici, která by určovala jakoukoli jinou kuželosečku.

V následující podkapitole vyšetříme, zda se typ kuželosečky a její regularita (singularita) zachovává při zobrazování těchto křivek v afinitě roviny.

[22] Ty mají v kanonické bázi samozřejmě souřadnice $[e, 0]_{\mathcal{B}''}$ a $[-e, 0]_{\mathcal{B}''}$.

[23] Zatím jsme tento pojem nezaváděli, čtenář však ví, že to jsou „jisté přímky“ mající v kanonické bázi rovnice $y'' = \pm\frac{b}{a}x''$.

4.4 Afinní klasifikace kuželoseček

Základní otázkou tohoto odstavce bude stanovit nutné a postačující podmínky k tomu, aby ke dvojici kuželoseček existovala afinita zobrazující jednu z nich na druhou.
Kuželosečkou budeme proto *vždy* (v odstavci 4.4) rozumět *neprázdnou* kuželosečku.

Připomeňme, že *afinitou* rozumíme bijektivní afinní zobrazení roviny na sebe (definice 1.8.14).

Zodpovězme otázku, co je obrazem kuželosečky v afinitě.
Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka určená v bázi $\mathcal{B}$ maticí $\mathbf{F}$. Nechť je dána afinita f maticí $\mathbf{A}$ (rovněž v $\mathcal{B}$); tato matice je regulární.
Bod $Y = [x', y']$ náleží množině $f(\mathcal{K})$,[24] právě když jeho vzor $X = [x, y]$ náleží $\mathcal{K}$, neboli:

$$Y = [x', y'] \in f(\mathcal{K}) \Leftrightarrow (x, y, 1)\mathbf{F}(x, y, 1)^T = 0. \tag{4.27}$$

Ze vztahu (1.77) plyne $(x, y, 1) = (x', y', 1)\mathbf{A}^{-1}$, takže (4.27) lze psát:

$$Y = [x', y'] \in f(\mathcal{K}) \Leftrightarrow (x', y', 1)(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{A}^{-1})^T)(x', y', 1)^T = 0.$$

V tomto zápise již čárkování nemá význam (proč?), můžeme tedy psát

$$Y = [x, y] \in f(\mathcal{K}) \Leftrightarrow (x, y, 1)(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{A}^{-1})^T)(x, y, 1)^T = 0. \tag{4.28}$$

Položme $\mathbf{F}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{A}^{-1})^T$. Snadno se přesvědčíme, že $\mathbf{F}$ je symetrická a že její malá matice má nenulovou hodnost (proč?), tudíž množina bodů $f(\mathcal{K})$ určená vztahem (4.28) tvoří kuželosečku.
Samozřejmě lze též najít obecnou rovnici obrazu kuželosečky.

Tím jsme dokázali:

Věta 4.4.1 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka určená v bázi $\mathcal{B}$ maticí $\mathbf{F}$. Nechť f je afinita určená v bázi $\mathcal{B}$ maticí $\mathbf{A}$. Pak množina $f(\mathcal{K})$ je kuželosečka, která je v bázi $\mathcal{B}$ určena maticí*

$$\mathbf{F}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{A}^{-1})^T.$$

Uvažujme v dané (kartézské) bázi kuželosečku o rovnici $x^2 + y^2 = 1$ (kružnice). Zadejme afinitu rovnicemi $x' = ax \wedge y' = by$ (a, b jsou nenulová reálná čísla). Snadno se přesvědčíte, že obrazem dané kuželosečky je kuželosečka o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elipsa).

Definujme nyní binární relaci na množině všech kuželoseček:

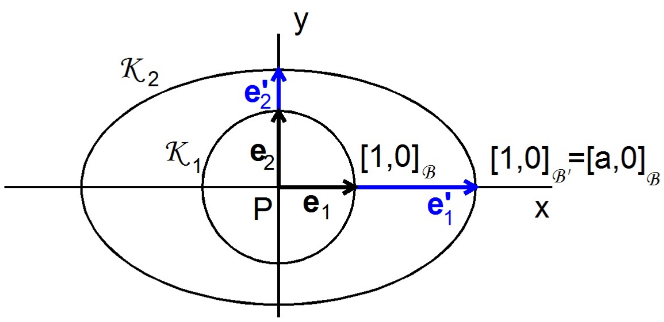
Definice 4.4.2 Kuželosečka $\mathcal{K}_1$ se nazývá *afinně ekvivalentní* s kuželosečkou $\mathcal{K}_2$, jestliže existuje afinita f taková, že $\mathcal{K}_2 = f(\mathcal{K}_1)$.

[24] Tj. množině obrazů všech bodů náležících $\mathcal{K}$.

Věta 4.4.3 *Relace „být afinně ekvivalentní" je relace ekvivalence na množině všech kuželoseček roviny.*

Důkaz: Protože identita je afinita, je relace reflexivní. Inverzní zobrazení k afinitě je také afinitou – relace je symetrická. Konečně složení dvou afinit je opět afinita – relace je tranzitivní (promyslete podrobněji). □

Uvažujme nyní kuželosečku $\mathcal{K}_1$ danou v bázi $\mathcal{B}$ rovnicí $x^2 + y^2 = 1$ (matice $\mathbf{F}_1$) a kuželosečku $\mathcal{K}_2$ o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (matice $\mathbf{F}_2$). Zvolme nyní bázi $\mathcal{B}'$ tak, že transformační rovnice znějí $x = ax' \wedge y' = by'$ ($a \neq 0 \neq b$).
Pak je tedy kuželosečka $\mathcal{K}_2$ dána v bázi $\mathcal{B}'$ rovnicí $x'^2 + y'^2 = 1$ (*opět* maticí $\mathbf{F}_1$).
Ke dvěma (různým) kuželosečkám jsme tedy nalezli dvojici bází, nad nimiž jsou určeny *toutéž* maticí (neboli *toutéž* obecnou rovnicí (až na označení obou proměnných)) – tuto situaci znázorňuje následující obrázek. Vyšetřeme nyní souvislost tohoto vztahu s relací ekvivalence.[25]



Obr. 4.4.1

Buďte $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ afinně ekvivalentní kuželosečky. Zvolme libovolnou bázi $\mathcal{B}$, v níž je příslušná afinita f[26] dána maticí $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}_1$ nechť je libovolná matice kuželosečky $\mathcal{K}_1$ v bázi $\mathcal{B}$. Pak dle věty 4.4.1 určuje matice $\mathbf{F}_2 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}_1(\mathbf{A}^{-1})^T$ v $\mathcal{B}$ kuželosečku $\mathcal{K}_2$.
Zvolme bázi $\mathcal{B}'$ tak, že matici přechodu $\mathbf{P}$ od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$ položíme rovnu $\mathbf{A}$. Pak dle věty 4.1.5 je $\mathcal{K}_2$ v bázi $\mathcal{B}'$ určena maticí $\mathbf{F}'_2$, pro niž platí $\mathbf{F}'_2 = \mathbf{P}\mathbf{F}_2\mathbf{P}^T$. Z předchozího snadno plyne, že $\mathbf{F}'_2 = \mathbf{F}_1$.

Nyní mějme dány dvě kuželosečky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ a předpokládejme existenci dvojice bází $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ takových, že jistá matice $\mathbf{F}$ určuje $\mathcal{K}_1$ v bázi $\mathcal{B}$ a současně určuje $\mathcal{K}_2$ v $\mathcal{B}'$.
Buď $\mathbf{P}$ maticí přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$. Definujme nyní afinitu f maticí $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ v bázi $\mathcal{B}$. V souladu s větou 4.4.1 je $f(\mathcal{K}_1)$v $\mathcal{B}$ určena maticí $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{P}^{-1})^T$, tudíž v bázi $\mathcal{B}'$ bude $f(\mathcal{K}_1)$

[25] V právě zkoumaném případě byly $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ evidentně afinně ekvivalentní.
[26] Tj. platí $f(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_2$.

určena maticí $\mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{P}^{-1})^T)\mathbf{P}^{\mathbf{P}} = \mathbf{F}$ (dle věty 4.1.5) a tedy $f(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_2$, což znamená, že $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ jsou afinně ekvivalentní.

Než právě dokázané poznatky shrneme do věty, ukažme význam rovnosti $\mathbf{P} = \mathbf{A}$ matice přechodu a matice afinity.

Buďte $\mathcal{B} = \langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$, $\mathcal{B}' = \langle P', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\rangle$ afinní báze $\mathcal{E}_2$. Porovnáme-li vztahy, jimiž je zavedena matice přechodu afinních bází $\mathbf{P}$ (definice 1.2.12) a matice afinního zobrazení (definice 1.8.11; samozřejmě v našem případě $\mathcal{C} = \mathcal{B}$), je patrno, že podmínka $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ je ekvivalentní s tím, že pro afinitu f (s asociovaným homomorfizmem φ) platí $f(P) = P'$, $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}'_1$ a $\varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}'_2$, tedy f zobrazuje bázi $\mathcal{B}$ na bázi $\mathcal{B}'$.

Věta 4.4.4 *Pro libovolné kuželosečky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ platí:*

1. *Jsou-li $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ afinně ekvivalentní, pak ke každé bázi $\mathcal{B}$ existuje báze $\mathcal{B}'$ tak, že každá matice kuželosečky $\mathcal{K}_1$ v bázi $\mathcal{B}$ je rovněž maticí kuželosečky $\mathcal{K}_2$ v bázi $\mathcal{B}'$.*

2. *Jestliže existují báze $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ a matice, která je maticí kuželosečky $\mathcal{K}_1$ v bázi $\mathcal{B}$ a současně maticí kuželosečky $\mathcal{K}_2$ v bázi $\mathcal{B}'$, pak jsou kuželosečky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ afinně ekvivalentní.*

Povšimněte si různosti použitých kvantifikátorů v částech 1. a 2.

Důsledek 4.4.5 *Dvě kuželosečky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ jsou afinně ekvivalentní právě tehdy, když existují báze $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ a matice, která je maticí kuželosečky $\mathcal{K}_1$ v bázi $\mathcal{B}$ a současně maticí kuželosečky $\mathcal{K}_2$ v bázi $\mathcal{B}'$.*

Přirozeným úkolem je nalezení tříd rozkladu množiny neprázdných kuželoseček dle relace „být afinně ekvivalentní“.

Věta 4.4.6 *Třídami rozkladu množiny všech neprázdných kuželoseček roviny dle relace „být afinně ekvivalentní“ jsou následující množiny:*

- *množina elips*
- *množina hyperbol*
- *množina parabol*
- *množina jednobodových množin*
- *množina dvojic různoběžek*
- *množina dvojic rovnoběžek*
- *množina přímek*

Důkaz: Již je nám známo, že uvažované množiny pokrývají množinu neprázdných kuželoseček. Zbývá tedy dokázat, že dvě kuželosečky náleží k téže množině, právě když jsou afinně ekvivalentní.

(a) Buďte $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ dvě afinně ekvivalentní kuželosečky. Pak dle věty 4.4.4 existuje dvojice bází $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ a matice $\mathbf{F}$, která je současně maticí $\mathcal{K}_1$ v bázi $\mathcal{B}$ i maticí $\mathcal{K}_2$ v bázi $\mathcal{B}'$. Odtud je dle věty 4.3.8 zřejmé, že obě kuželosečky náleží k téže z uvažovaných množin.

(b) Nechť $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ jsou dvě kuželosečky náležející téže množině. Pak, jak plyne z podkapitoly 4.2, existuje ke každé z nich (kartézská) báze, v níž je dána kanonickou rovnicí.

Buďte např. $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ libovolné hyperboly. Pak tedy existuje báze $\mathcal{B}$, v níž je $\mathcal{K}_1$ dána obecnou rovnicí $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.
Zaveďme nyní bázi $\overline{\mathcal{B}}$, že transformační rovnice znějí $x = a\overline{x} \wedge y = b\overline{y}$, $a \neq 0 \neq b$. Pak je ovšem kuželosečka $\mathcal{K}_1$ určena v bázi $\overline{\mathcal{B}}$ rovnicí $\overline{x}^2 - \overline{y}^2 - 1 = 0$.

Podobně ukážeme, že od kanonické báze $\mathcal{B}'$ kuželosečky $\mathcal{K}_2$ lze přejít k bázi $\overline{\mathcal{B}'}$ v níž je $\mathcal{K}_2$ určena obecnou rovnicí $\overline{x'}^2 - \overline{y'}^2 - 1 = 0$, což znamená, že matice kuželosečky $\mathcal{K}_1$ v bázi $\overline{\mathcal{B}}$ je táž, jako matice kuželosečky $\mathcal{K}_2$ v bázi $\overline{\mathcal{B}'}$. Použitím věty 4.4.4 dostáváme, že obě hyperboly jsou afinně ekvivalentní.

Takto lze důkaz provést i pro ostatní uvažované množiny.

□

Důsledek 4.4.7 *Ke každé elipse existuje báze, vzhledem k níž je dána obecnou rovnicí* $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
Ke každé hyperbole existuje báze, vzhledem k níž je dána obecnou rovnicí $x^2 - y^2 - 1 = 0$.
Ke každé parabole existuje báze, vzhledem k níž je dána obecnou rovnicí $y^2 - x = 0$.
Ke každé jednobodové množině existuje báze, vzhledem k níž je dána obecnou rovnicí $x^2 + y^2 = 0$.
Ke každé dvojici různoběžek existuje báze, vzhledem k níž je dána obecnou rovnicí $x^2 - y^2 = 0$.
Ke každé dvojici rovnoběžek existuje báze, vzhledem k níž je dána obecnou rovnicí $y^2 = q,\ q > 0$.
Ke každé přímce existuje báze, vzhledem k níž je dána obecnou rovnicí $y^2 = 0$.
Tyto báze ovšem obecně nejsou kartézské.

Vidíme tedy, že relace afinní ekvivalence „ztotožňuje“ všechny kuželosečky dané množiny bez ohledu na jejich metrické parametry (tj. poloosy u elips a hyperbol, parametr u paraboly, odchylka různoběžek, vzdálenost rovnoběžek), protože tyto se zobrazením v afinitě nezachovávají. Pokud bychom tedy studovali kuželosečky bez užití pojmu *vzdálenost* (tj. v *afinní* rovině)[27], nemohli bychom rozlišovat mezi jakoukoli dvojicí elips, hyperbol apod., nemohli bychom např. vůbec zavést pojem kružnice.

Poznámka 4.4.8 Příslušnost dané kuželosečky k určité třídě je tedy *invariantem grupy afinit roviny*.

Studium invariantů jednotlivých grup zobrazení zahrnují přednášky ve vyšších semestrech kurzu geometrie.

Přímým důsledkem věty 4.4.6 a věty 4.3.8 je nutná a postačující podmínka afinní ekvivalence neprázdných kuželoseček (úplný systém afinních invariantů):

Věta 4.4.9 *Buďte $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ dvě kuželosečky, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ (po řadě) jejich libovolné matice v některé bázi. Pak $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ jsou afinně ekvivalentní právě tehdy, jsou-li splněny následující podmínky:*

1. $\Delta_1 = 0 = \Delta_2 \vee \Delta_1 \neq 0 \neq \Delta_2$,
2. $\operatorname{sgn}\delta_1 = \operatorname{sgn}\delta_2$,
3. $h(\mathbf{F}_1) = h(\mathbf{F}_2)$.

(Kdy je třetí z podmínek na předchozích nezávislá?)

4.5 Metrická klasifikace kuželoseček

V tomto odstavci nalezneme nutné a postačující podmínky k tomu, aby ke dvojici kuželoseček existovala shodnost zobrazující jednu z nich na druhou.
Kuželosečkou budeme proto i v tomto odstavci *vždy* rozumět *neprázdnou* kuželosečku.

Připomeňme, že *shodnost* je shodné zobrazení roviny na sebe (tj. vzdálenost libovolné dvojice bodů je rovna vzdálenosti jejich obrazů). Jak víme, jde o zvláštní případ afinity.

Platí, že je-li $\mathbf{A}$ matice afinity f v některé *kartézské* bázi, je f shodností, právě když je matice $\mathbf{A}_0$ ortogonální (viz věta 2.6.4).

Definice 4.5.1 Kuželosečka $\mathcal{K}_1$ se nazývá *metricky ekvivalentní*[28] s kuželosečkou $\mathcal{K}_2$, jestliže existuje shodnost f taková, že $f(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_2$

[27] V reálné afinní rovině bychom elipsu, hyperbolu a parabolu definovali podobně, jako v definici 4.2.2 pro rovinu euklidovskou, avšak bez jejich metrických parametrů (poloosy, parametr), tj. např. za *elipsu* bychom prohlásili každou kuželosečku, k níž existuje báze, v níž má obecnou rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$, za *parabolu* pak každou kuželosečku, k níž existuje báze, v níž má obecnou rovnici $y^2 - x = 0$, apod.

[28] Užívá se též pojmu *shodná*.

Tato relace je tedy podmnožinou relace afinní ekvivalence.

Věta 4.5.2 *Relace „být metricky ekvivalentní“ je relace ekvivalence na množině všech kuželoseček.*

Důkaz: Protože identita je shodnost, je relace reflexivní. Inverzní zobrazení ke shodnosti je také shodnost (proč?) – relace je symetrická. Dále, složení dvou shodností je opět shodnost (proč?) – relace je tranzitivní. □

Všimněme si nyní, podobně jako v případě afinní ekvivalence (věta 4.4.4), souvislosti studované relace s existencí „společné“ matice dvou kuželoseček, nyní však nad *kartézskými* bázemi.

Buďte $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ metricky ekvivalentní kuželosečky. Uvažujme libovolnou kartézskou bázi $\mathcal{B}$, v níž je příslušná shodnost f dána maticí $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}_0$ je tudíž ortogonální) a nechť $\mathbf{F}_1$ je některá matice kuželosečky $\mathcal{K}_1$ v bázi $\mathcal{B}$. Pak dle věty 4.4.1[29] určuje matice $\mathbf{F}_2 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}_1(\mathbf{A}^{-1})^T$ v $\mathcal{B}$ kuželosečku $\mathcal{K}_2$.
Zvolme bázi $\mathcal{B}'$ tak, že matici přechodu $\mathbf{P}$ od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$ položíme rovnu $\mathbf{A}$. V souladu s větou 2.1.9 je $\mathcal{B}'$ kartézská.
Dle věty 4.1.5 je $\mathcal{K}_2$ v bázi $\mathcal{B}'$ určena maticí $\mathbf{F}_2'$, pro niž platí $\mathbf{F}_2' = \mathbf{P}\mathbf{F}_2\mathbf{P}^T$. Z předchozího snadno plyne, že $\mathbf{F}_2' = \mathbf{F}_1$.

Nyní mějme dány dvě kuželosečky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ a nechť existuje dvojice kartézských bází $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ takových, že jistá matice $\mathbf{F}$ určuje $\mathcal{K}_1$ v bázi $\mathcal{B}$ a současně určuje $\mathcal{K}_2$ v bázi $\mathcal{B}'$. Buď $\mathbf{P}$ maticí přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$ ($\mathbf{P}_0$ je tedy ortogonální).
Definujeme-li afinitu f maticí $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ v bázi $\mathcal{B}$, je f shodností.
Podle věty 4.4.1 je $f(\mathcal{K}_1)$ v $\mathcal{B}$ určena maticí $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{P}^{-1})^T$, proto v bázi $\mathcal{B}'$ bude $f(\mathcal{K}_1)$ určena maticí $\mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{P}^{-1})^T)\mathbf{P}^T = \mathbf{F}$ a tedy $f(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_2$, což znamená, že $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ jsou metricky ekvivalentní.

Dokázali jsme následující větu (srovnejte s větou 4.4.4):

Věta 4.5.3 *Pro libovolné kuželosečky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ platí:*

1. *Jsou-li $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ metricky ekvivalentní, pak ke každé kartézské bázi $\mathcal{B}$ existuje kartézská báze $\mathcal{B}'$ tak, že každá matice kuželosečky $\mathcal{K}_1$ v bázi $\mathcal{B}$ je rovněž maticí kuželosečky $\mathcal{K}_2$ v bázi $\mathcal{B}'$.*

2. *Jestliže existují kartézské báze $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ a matice, která je maticí kuželosečky $\mathcal{K}_1$ v bázi $\mathcal{B}$ a současně maticí kuželosečky $\mathcal{K}_2$ v bázi $\mathcal{B}'$, pak jsou kuželosečky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ metricky ekvivalentní.*

[29] f je současně afinitou.

Důsledek 4.5.4 *Dvě kuželosečky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ jsou metricky ekvivalentní právě tehdy, když existují kartézské báze $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ a matice, která je maticí kuželosečky $\mathcal{K}_1$ v bázi $\mathcal{B}$ a současně maticí kuželosečky $\mathcal{K}_2$ v bázi $\mathcal{B}'$.*

Poznámka 4.5.5 Specielně to tedy znamená, že dvě kuželosečky jsou metricky ekvivalentní, právě když je *kanonická rovnice* jedné z nich kanonickou rovnicí druhé a naopak.

Připomeneme-li si souvislost hodnot konstant a, b, r, p v kanonických rovnicích regulárních kuželoseček s metrickými definicemi těchto křivek, dostáváme velmi názorný význam pojmu metrická ekvivalence.

Nyní již zjistíme, které množiny jsou *třídami rozkladu* množiny kuželoseček dle této relace.

Protože relace metrická ekvivalence je podmnožinou relace afinní ekvivalence, je rozklad dle této relace *zjemněním* rozkladu dle afinní ekvivalence, tedy každá třída afinně ekvivalentních kuželoseček – kromě třídy přímek a třídy bodů – se dále rozpadá na třídy metricky ekvivalentních kuželoseček – například třída[30] elips se rozpadne na nekonečně mnoho tříd metricky ekvivalentních elips – každá z těchto tříd je určena *velikostí* poloos (která je táž pro všechny elipsy téže třídy), podobně tomu bude pro hyperboly, u parabol bude každá třída určena *velikostí* parametru, u dvojice různoběžek jejich *odchylkou*, u dvojice rovnoběžek jejich *vzdáleností*.

Následující věta stanoví nutné a postačující podmínky pro metrickou ekvivalenci (některých) kuželoseček (úplný systém ortogonálních invariantů):

Věta 4.5.6 *Buďte $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ dvě kuželosečky, z nichž žádná není jednobodová ani dvojice rovnoběžek, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ (po řadě) jejich libovolné matice v některé kartézské bázi. Pak $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ jsou metricky ekvivalentní právě tehdy, existuje-li $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tak, že matice $c\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ mají tytéž hodnoty $\Delta, \delta, \mathcal{S}$.*

Důkaz:

(a) Nechť $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ jsou metricky ekvivalentní.[31] Zvolme kartézskou bázi $\mathcal{B}$, $\mathcal{K}_1$ nechť má matici $\mathbf{F}_1$ a $\mathcal{K}_2$ matici $\mathbf{F}_2$. Označme standardně $\Delta, \delta, \mathcal{S}$ příslušné veličiny matice $\mathbf{F}_2$.

Z ekvivalence kuželoseček plyne (věta 4.5.3) existence kartézské báze $\mathcal{B}'$, v níž $\mathcal{K}_2$ má matici $\mathbf{F}_1$. Současně však $\mathcal{K}_2$ má v $\mathcal{B}'$ i matici $\mathbf{F}_2'$ vzniklou z $\mathbf{F}_2$ provedením transformace soustavy souřadné. Označme $\Delta', \delta', \mathcal{S}'$ příslušné veličiny matice $\mathbf{F}_2'$. Transfor-

[30] V rozkladu dle afinní ekvivalence.

[31] Dále jen „ekvivalentní“ (v tomto důkaze).

mace je ortogonální, tudíž:

$$\Delta' = \Delta,\ \delta' = \delta,\ \mathcal{S}' = \mathcal{S}.$$

Dle věty 4.3.2 (jejíž předpoklady $\mathcal{K}_2$ splňuje) existuje $c \neq 0$ tak, že:

$$\mathbf{F}_2' = c\mathbf{F}_1.$$

Je zřejmé, že matice $\mathbf{F}_2$ a $c\mathbf{F}_1$ mají tytéž hodnoty $\Delta, \delta, \mathcal{S}$.

(b) Buď $\mathcal{B}$ kartézská báze, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ (po řadě) matice křivek $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ v bázi $\mathcal{B}$ a nechť existuje $c \neq 0$ tak, že $\mathbf{F}_2$ a $c\mathbf{F}_1$ mají tytéž hodnoty Δ, δ a $\mathcal{S}$.
Nyní (postupem dle podkapitoly 4.2) výjděme z matice $\mathbf{F}_2$ a sestrojme kanonickou bázi $\mathcal{B}_2^*$ kuželosečky $\mathcal{K}_2$, $\mathbf{F}_2^*$ bude příslušná matice. Podobně, vyjdeme-li z matice $c\mathbf{F}_1$, obdržíme kanonickou bázi $\mathcal{B}_1^*$ a matici $\mathbf{F}_1^*$ kuželosečky $\mathcal{K}_1$.
Vzhledem k tomu, že výchozí matice mají tytéž hodnoty $\Delta, \delta, \mathcal{S}$, zjistíme, že matice $\mathbf{F}_1^*, \mathbf{F}_2^*$ jsou totožné.[32] Protože kanonické báze jsou kartézské, plyne odtud (viz věta 4.5.3) ekvivalence křivek $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$.

□

Ukažme nyní, že vyloučení jednobodových množin a dvojic rovnoběžek je oprávněné:

- obecnými rovnicemi $x^2 + y^2 = 0$ a $x^2 + 2y^2 = 0$ je dán týž bod a přitom pro žádné $c \neq 0$ nedosáhneme rovnosti invariantů $\Delta, \delta, \mathcal{S}$,

- obecnou rovnicí $y^2 = 1$ je dána dvojice rovnoběžek vzdálených 2, rovnicí $y^2 = 4$ pak dvojice rovnoběžek vzdálených 4. Neexistuje tedy shodnost zobrazující jednu z dvojic na druhou, přitom však v obou případech $\Delta, \delta, \mathcal{S}$ nabývá téže hodnoty.

Příklad 4.5.7 Uvažujme dvě kuželosečky dané (v téže kartézské bázi) po řadě obecnými rovnicemi

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &: 23x^2 - 72xy + 2y^2 - 6x - 8y = 0, \\ \mathcal{K}_2 &: \qquad -25x^2 + 50y^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Zjistěte, zda jsou metricky ekvivalentní.
Řešení:
Pro křivku $\mathcal{K}_1$ obdržíme $\Delta_1 = -1250, \delta_1 = -1250, \mathcal{S}_1 = 25$, pro křivku $\mathcal{K}_2$ pak $\Delta_1 = -1250, \delta_1 = -1250, \mathcal{S}_1 = 25$. Dle věty 4.5.6 jsou metricky ekvivalentní ($c = 1$).
Jak se lze o této skutečnosti přesvědčit? Stačí nalézt kanonickou rovnici $\mathcal{K}_1$ a ta musí být kanonickou rovnicí $\mathcal{K}_2$. To jsme však již učinili v příkladu 4.3.11.

[32] Z rovnosti δ a $\mathcal{S}$ plyne totiž i rovnost vlastních čísel (proč?).

4.6 Sdruženost směrů vzhledem ke kuželosečce

V celém tomto odstavci se budeme zabývat kuželosečkami, *obsahujícími více než jeden bod*.

Pojem *sdružené směry* jsme již zavedli pro kvadratické formy (definice 3.3.7). Zaveďme jej nyní pro kuželosečky pomocí jejich kvadratických forem (definice 4.1.6). Pojem zavedený následující definicí je zřejmě *geometrickou vlastností* kuželosečky a daných směrů (srv. poznámka 4.1.7.)

Definice 4.6.1 Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka. Dva směry z $\mathbf{V}$ se nazývají *sdružené vzhledem ke kuželosečce* $\mathcal{K}$, jsou-li sdružené vzhledem ke všem kvadratickým formám kuželosečky $\mathcal{K}$.

Následující věta je přímým důsledkem věty o jednoznačnosti[33] (věta 4.3.2) a definice polární bilineární formy kuželosečky (definice 4.1.6).

Věta 4.6.2 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka, Φ, Ψ její libovolné polární bilineární formy. Pak existuje $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tak, že platí*

$$\Psi = c\Phi.$$

Věta 4.6.3 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka. Jsou-li dva směry z $\mathbf{V}$ sdružené vzhledem k některé kvadratické formě kuželosečky $\mathcal{K}$, pak jsou sdružené vzhledem ke kuželosečce $\mathcal{K}$.*

Důkaz: Nechť $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}]$ jsou některé dva směry z $\mathbf{V}$.
Buďte Φ, Ψ libovolné polární bilineární formy křivky $\mathcal{K}$. Dle věty 4.6.2 platí $\Psi = c\Phi$, $c \neq 0$. Pak ovšem $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ a platnost věty je evidentní. □

Důsledek 4.6.4 *Je-li $\mathbf{F}$ libovolná matice kuželosečky $\mathcal{K}$ v některé bázi $\mathcal{B}$, pak směry vektorů $\mathbf{u} = (u_1, u_2)_{\mathcal{B}_0}$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)_{\mathcal{B}_0}$ jsou vzhledem ke $\mathcal{K}$ sdružené, právě když*

$$(u_1, u_2)\mathbf{F}_0(v_1, v_2)^T = 0, \tag{4.29}$$

neboli

$$f_{11}u_1v_1 + f_{12}u_1v_2 + f_{21}u_2v_1 + f_{22}u_2v_2 = 0. \tag{4.30}$$

(O důsledek kterých tvrzení se jedná?)

[33] Proto se omezujeme jen na křivky mající více než jeden bod.

Definice 4.6.5 Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka. Směr z V se nazývá

I.1. *singulární směr kuželosečky* $\mathcal{K}$, je-li vzhledem ke $\mathcal{K}$ sdružen se všemi směry z $\mathbf{V}$,

I.2. *regulární směr kuželosečky* $\mathcal{K}$, není-li jejím singulárním směrem,

II.1. *asymptotický směr kuželosečky* $\mathcal{K}$, je-li vzhledem ke $\mathcal{K}$ sdružen sám se sebou,

II.2. *neasymptotický*[34] *směr kuželosečky* $\mathcal{K}$, není-li jejím asymptotickým směrem,

III. *hlavní směr kuželosečky* $\mathcal{K}$, je-li vzhledem ke $\mathcal{K}$ sdružen se směrem z $\mathbf{V}$ na něj kolmým.

Poznámka 4.6.6 Uvážíme-li předešlou definici a větu 4.6.3 spolu s definicemi singulárního (definice 3.3.9) a hlavního (definice 3.4.2) směru kvadratické formy, je patrno, že platí:

- daný směr z V je singulárním (regulárním) směrem kuželosečky $\mathcal{K}$, právě když je singulárním (regulárním) směrem některé její kvadratické formy (a tedy všech jejích forem),
- daný směr z V je hlavním směrem kuželosečky $\mathcal{K}$, právě když je hlavním směrem některé její kvadratické formy (a tedy všech jejích forem).

Přímo z definice 4.6.5 plyne:

Věta 4.6.7 *Každý singulární směr je zároveň asymptotickým směrem dané kuželosečky.*

Věta 4.6.8 *Každé dva kolmé směry sdružené vzhledem k dané kuželosečce jsou jejími hlavními směry.*

Důkaz: Uvážíme-li, že ve dvojrozměrném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ existuje ke každému směru jediný směr na něj kolmý, je tvrzení zřejmým důsledkem definice hlavního směru. □

Nyní vyšetříme existenci **hlavních směrů** jednotlivých kuželoseček.
K tomu využijeme výsledků, které jsme získali v podkapitole 4.2.1 při rozboru obecné rovnice, kde jsme vyšetřovali hlavní směry jedné z kvadratických forem dané kuželosečky. Nyní však již víme, že tyto směry jsou společné pro všechny kvadratické formy dané kuželosečky.[35]

Nastanou tedy dva případy – buď existuje právě jedna dvojice hlavních směrů (a to ortogonálních), nebo je každý směr hlavním směrem dané kuželosečky $\mathcal{K}$.

[34] Užívá se též pojmu *obyčejný směr*.
[35] Připomínáme, že uvažujeme kuželosečky mající alespoň dva body.

Druhá možnost nastane, právě když platí $\lambda_1 = \lambda_2$. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{K}$ není prázdná ani jednobodová, je tato podmínka (s přihlédnutím ke vztahu (4.18)) ekvivalentní tomu, že $\mathcal{K}$ je kružnice.
Platí tedy následující tvrzení:

Věta 4.6.9 *Každá kuželosečka, která není kružnicí, má právě dva hlavní směry a tyto jsou ortogonální.*
Je-li kuželosečka kružnicí, je libovolný směr jejím hlavním směrem.

Vidíme tedy, že rovnost vlastních čísel (podkapitola 4.2.1) má geometrický význam – charakterizuje mezi aspoň dvoubodovými kuželosečkami kružnici.

Hlavní směry určují (v souladu s podkapitolou 4.2.1) *směry vektorů kanonické báze*.[36]

Důsledek 4.6.10 *Buď $\mathcal{K}$, $|\mathcal{K}| > 1$, kuželosečka, která není kružnicí. Pak kanonická báze této kuželosečky má jednoznačně určeny směry svých vektorů.*

Nyní se zabývejme existencí **singulárních směrů** jednotlivých kuželoseček. Využijeme k tomu poznatků podkapitoly 3.3.
Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka, $\mathbf{F}$ její některá matice v libovolné bázi $\mathcal{B}$. Matice $\mathbf{F}_0$ je pak maticí kvadratické formy Φ_2 kuželosečky $\mathcal{K}$.
Vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)_{\mathcal{B}_0}$ určuje singulární směr, právě když jeho souřadnice jsou řešením soustavy o matici $\mathbf{F}_0$ (viz soustava (3.23), $n = 2$):

$$\mathbf{F}_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Tato je netriviálně řešitelná, právě když $0 = \det \mathbf{F}_0 = \delta$ (forma Φ je singulární). Protože $h(\mathbf{F}_0) \neq 0$ (proč?), je $h(\mathbf{F}_0)$=1 a existuje zde tedy jediný singulární směr (srv. věta 3.3.11), který je současně hlavním směrem příslušným $\lambda = 0$[37] (viz důsledek 3.4.5). Tento směr určuje směr osy o (viz bod II. v podkapitole 4.2.1) křivek parabolického typu.

Věta 4.6.11 *Singulární směr (a to jediný) existuje právě u kuželoseček parabolického typu.*

Položme si otázku, s kolika směry je vzhledem k dané kuželosečce sdružen její libovolný *regulární* směr.
Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka, $\mathbf{F}$ její libovolná matice v některé bázi $\mathcal{B}$.
Nechť vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)_{\mathcal{B}_0}$ určuje regulární směr. Hledejme nyní vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)_{\mathcal{B}_0}$ určující směr sdružený s $[\mathbf{u}]$. Musí tedy platit (4.29):

$$(x_1, x_2)(\mathbf{F}(u_1, u_2)^T) = 0, \tag{4.32}$$

[36] Jaký je jejich geometrický význam? (viz podkapitola 4.2.1!).
[37] λ značí, jako obvykle, vlastní číslo matice $\mathbf{F}_0$.

Protože $[\mathbf{u}]$ je regulární, nesplňuje (4.31) a tudíž součin $\mathbf{F}(u_1, u_2)^T$ je roven nenulovému sloupcovému vektoru $(a_1, a_2)^T$. Rovnice (4.32) tak přejde ve tvar $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, jejímž řešením je jediný směr.

Věta 4.6.12 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka. Pak platí, že každý její regulární směr je sdružen vzhledem ke $\mathcal{K}$ s právě jedním směrem.*

V tomto případě se pro vztah (4.29), resp. (4.30), užívá názvu *rovnice korespondence*.

Nakonec vyřešíme otázku **asymptotických směrů** jednotlivých kuželoseček.
Nechť $\mathcal{K}$ je kuželosečka a $\mathbf{F}$ její některá matice v libovolné bázi $\mathcal{B}$.
$\mathbf{F}_0$ je tudíž maticí kvadratické formy Φ_2 kuželosečky $\mathcal{K}$.
Vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)_{\mathcal{B}_0}$ určuje asymptotický směr, právě když (viz definice 4.6.5)

$$0 = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \Phi_2(\mathbf{u}), \tag{4.33}$$

což lze pomocí souřadnic psát (viz definice 4.1.6):

$$\varphi(u_1, u_2) = 0, \tag{4.34}$$

neboli

$$f_{11}u_1^2 + 2f_{12}u_1u_2 + f_{22}u_2^2 = 0 \tag{4.35}$$

(což plyne rovněž z (4.30)). Diskutujme nyní řešení rovnice (4.35).
Rozlišíme dva případy: (a) $f_{11} \neq 0 \vee f_{22} \neq 0$, (b) $f_{11} = 0 \wedge f_{22} = 0$.

(a) Předpokládejme, že $f_{11} \neq 0$. Pak můžeme rovnici (4.35) pokládat za kvadratickou rovnici o neznámé u_1 a parametru u_2.
Pro její řešení snadno odvodíme vztah:

$$u_1 = \frac{-f_{12} \pm \sqrt{-\delta}}{f_{11}} u_2.$$

Odtud je zřejmé, že v případě

- $\delta < 0$ jsou řešením dva různé směry,
- $\delta = 0$ je řešením jediný směr,
- $\delta > 0$ není řešením žádný směr.

V případě $f_{11} = 0$ je $f_{22} \neq 0$, analogicky dosáhneme téhož výsledku.

(b) Je-li $f_{11} = 0 = f_{22}$, musí být $f_{12} \neq 0$ (proč?).
Pak se rovnice (4.35) redukuje na tvar $u_1u_2 = 0$ a jejím řešením jsou dva různé směry (určené vektory $(1, 0)$ a $(0, 1)$). Přitom v tomto případě je $\delta < 0$.

Získané poznatky shrneme do věty.

Věta 4.6.13 *Je-li $\mathcal{K}$ hyperbolického typu, má právě dva asymptotické směry, je-li $\mathcal{K}$ parabolického typu, má právě jeden asymptotický směr,*[38]*je-li $\mathcal{K}$ eliptického typu, nemá žádný asymptotický směr.*

Příklad 4.6.14 Uvažujme kuželosečku danou (v jisté bázi) obecnou rovnicí:

$$23x^2 - 72xy + 2y^2 - 6x - 8y = 0.$$

Vyšetřeme existenci singulárních a asymptotických směrů.
Řešení:
Matice soustavy rovnic (4.31) pro souřadnice singulárního směru zní:

$$\mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} 23 & -36 \\ -36 & 2 \end{pmatrix},$$

je však regulární a tudíž $\mathcal{K}$ nemá žádný singulární směr.
Souřadnice asymptotického směru musí vyhovovat rovnici (4.35):

$$23u_1^2 - 72u_1u_2 + 2u_2^2 = 0,$$

odkud pro poměr $\frac{u_1}{u_2}$ obdržíme

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{36 \pm 25\sqrt{2}}{23},$$

tedy $\mathcal{K}$ má dva asymptotické směry určené po řadě vektory

$$\mathbf{u}_1 = (36 + 25\sqrt{2}, 23) \quad \text{a} \quad \mathbf{u}_2 = (36 - 25\sqrt{2}, 23).$$

Počet singulárních a regulárních směrů je v souladu s větou 4.6.11 a větou 4.6.13, neboť, jak jsme v příkladu 4.3.11 zjistili, je $\mathcal{K}$ hyperbolického typu ($\delta < 0$).
V uvedeném příkladu jsme rovněž ukázali způsob nalezení hlavních směrů kuželosečky.

4.7 Vzájemná poloha přímky a kuželosečky

V této podkapitole se budeme zabývat pouze kuželosečkami *obsahujícími více než jeden bod.*

4.7.1 Rozbor vzájemných poloh

Označení 4.7.1 Je-li $\mathcal{K}$ kuželosečka daná maticí $\mathbf{F} = (f_{ij})$, pak symboly F_1 a F_2 budou nadále označovat následující polynomy:

$$F_k(x, y) = f_{k1}x + f_{k2}y + f_{k3}, \quad k = 1, 2. \tag{4.36}$$

[38]Tento je totožný s jejím singulárním směrem (viz věta 4.6.7 a věta 4.6.11).

Uvažujme nyní přímku p a kuželosečku $\mathcal{K}$ a zkoumejme $p \cap \mathcal{K}$.
Zvolme bázi $\mathcal{B}$ a nechť jsou $\mathcal{K}$ a p po řadě dány:

$$\mathcal{K}: \ \varphi(x,y) + 2f_{13}x + 2f_{23}y + f_{33} = 0,$$

$$p: \begin{array}{l} x = x_0 + s_1 t \\ y = y_0 + s_2 t \end{array}.$$

Dosadíme-li nyní za souřadnice x, y z parametrického vyjádření přímky do obecné rovnice kuželosečky, obdržíme po úpravě následující rovnici o neznámé t (přesvědčte se o tom):

$$\varphi(s_1,s_2)t^2 + 2\left[F_1(x_0,y_0)s_1 + F_2(x_0,y_0)s_2\right]t + F(x_0,y_0) = 0. \tag{4.37}$$

Diskutujme nyní její řešení:

1. Nechť $\varphi(s_1,s_2) \neq 0$ – tj. p není asymptotického směru (viz (4.33)), pak je rovnice (4.37) kvadratická a může mít (v $\mathbb{R}$):
   (a) dva různé kořeny – tj. $p \cap \mathcal{K}$ je dvoubodový
   (b) jediný (dvojnásobný) kořen – tj. $p \cap \mathcal{K}$ je jednobodový,
   (c) žádný kořen – tj. $p \cap \mathcal{K}$ je prázdný.
2. Nechť $\varphi(s_1,s_2) = 0$ – tj. p je asymptotického směru, pak mohou nastat tyto případy:
   (a) $F_1(x_0,y_0)s_1 + F_2(x_0,y_0)s_2 \neq 0$ – (4.37) má jediný kořen – tj. $p \cap \mathcal{K}$ je jednobodový,
   (b) $F_1(x_0,y_0)s_1 + F_2(x_0,y_0)s_2 = 0 \wedge F(x_0,y_0) \neq 0$ – (4.37) nemá žádný kořen – tj. $p \cap \mathcal{K}$ je prázdný,
   (c) $F_1(x_0,y_0)s_1 + F_2(x_0,y_0)s_2 = 0 \wedge F(x_0,y_0) = 0$ – kořenem (4.37) je libovolné $t \in \mathbb{R}$ – tj. $p \subseteq \mathcal{K}$.

Pojmenujme nyní vzájemné polohy přímky a kuželosečky[39].

[39]Proč v bodě I. a IV. není třeba rozlišovat, zda směr přímky je či není asymptotický?

Definice 4.7.2 Buď p přímka směru $[\mathbf{s}]$ a nechť je dána kuželosečka $\mathcal{K}$.

I. Je-li průnik $p \cap \mathcal{K}$ dvoubodový, nazývá se p *sečna kuželosečky* $\mathcal{K}$.

II. Není-li $[\mathbf{s}]$ asymptotický směr kuželosečky $\mathcal{K}$ a

   1. je-li průnik $p \cap \mathcal{K}$ jednobodový, nazývá se p *tečna kuželosečky* $\mathcal{K}$, společný bod pak *bod dotyku tečny*.
   2. je-li průnik $p \cap \mathcal{K}$ prázdný, nazývá se p *nesečna kuželosečky* $\mathcal{K}$.

III. Je-li $[\mathbf{s}]$ asymptotický směr kuželosečky $\mathcal{K}$ a

   1. je-li průnik $p \cap \mathcal{K}$ jednobodový, nazývá se p *asymptotická sečna kuželosečky* $\mathcal{K}$,
   2. je-li průnik $p \cap \mathcal{K}$ prázdný, nazývá se p *asymptota kuželosečky* $\mathcal{K}$.

IV. Je-li $p \subseteq \mathcal{K}$, nazývá se p *tvořící přímka kuželosečky* $\mathcal{K}$.

Definice užívá pouze geometrických vlastností přímky a kuželosečky („počet společných bodů“ a „asymptotický směr“). Proto i definované vzájemné polohy jsou *geometrickými vlastnostmi* dané přímky a kuželosečky.

Nutné a postačující podmínky pro jednotlivé polohy jsou dány provedeným rozborem (body 1. , 2.).

Z rozboru provedeného před definicí 4.7.2 vyplývá:

Věta 4.7.3 *Každá přímka zaujímá k dané kuželosečce právě jednu z definovaných vzájemných poloh.*

4.7.2 Přímky asymptotického směru

V tomto odstavci vyšetříme, jakých vzájemných poloh mohou nabývat přímky asymptotického směru vzhledem ke kuželosečkám hyperbolického a parabolického typu.

1. Buď $\mathcal{K}$ hyperbolického typu.
   Pak existuje (ne nutně kartézská) báze[40] tak, že $\mathcal{K}$ v ní má obecnou rovnici:

$$x^2 - y^2 = 1 \text{ (regulární křivka)} \tag{4.38}$$

[40] Požadujme, aby její počátek byl počátkem báze kanonické, tj. *středem* kuželosečky. Jak ovšem poznáme záhy, je tento počátek dán jednoznačně – je jím počátek každé báze, v níž obecná rovnice nabývá tvaru (4.38), resp. (4.39), takže jde de facto o požadavek nadbytečný.

nebo

$$x^2 - y^2 = 0 \text{ (singulární křivka)} \tag{4.39}$$

Nalezneme generátory asymptotických směrů – dle (4.35): $\mathbf{u} = (1, 1)$, $\mathbf{u}' = (1, -1)$.

Systém přímek asymptotického směru (tj. přímek majících směrový vektor $\mathbf{u}$, resp. $\mathbf{u}'$) je tvořen přímkami, jejichž obecné rovnice znějí:

$$p_c : y = x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{4.40}$$

resp.

$$p'_c : y = -x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{4.41}$$

Nyní vyšetříme vzájemnou polohu těchto přímek a křivky $\mathcal{K}$ v závislosti na parametru c.

(a) regulární případ (hyperbola)
Pro průnik $p_c \cap \mathcal{K}$ obdržíme soustavu rovnic $\{(4.38), (4.40)\}$. Dosazením obdržíme pro x rovnici

$$cx = \tfrac{1}{2}(c^2 - 1).$$

Pro $c = 0$ nemá tedy soustava řešení a pro každé $c \neq 0$ má jediné řešení. Rovnost $c = 0$ značí, že p_0 prochází počátkem soustavy souřadné (totožný s počátkem S kanonické báze), tj. *středem* hyperboly.
V prvém případě se jedná o asymptotu, v druhém o asymptotickou sečnu (viz definice 4.7.2).
Ke stejnému výsledku dojdeme i pro systém přímek p'_c.
Každá hyperbola tedy má právě dvě asymptoty (tyto se protínají v bodě S – jaký závěr učiníte pro jeho jednoznačnost?), ostatní přímky asymptotických směrů jsou jejími asymptotickými sečnami.

(b) singulární případ (dvojice různoběžek)
Pro průnik $p_c \cap \mathcal{K}$ obdržíme soustavu rovnic $\{(4.39), (4.40)\}$. Dosazením obdržíme pro x rovnici

$$cx = \tfrac{1}{2}c^2.$$

Odtud plyne, že pro $c = 0$ má soustava nekonečně mnoho řešení a pro každé $c \neq 0$ má jediné řešení. Rovnost $c = 0$ značí, že p_0 prochází počátkem soustavy souřadné (totožný s počátkem S kanonické báze), tj. průsečíkem různoběžek.
V prvém případě jde o tvořící přímku, v druhém o asymptotickou sečnu (viz definice 4.7.2).
Ke stejnému výsledku dojdeme i pro systém přímek p'_c.

2. Buď $\mathcal{K}$ parabolického typu.
Pak existuje báze tak, že $\mathcal{K}$ v ní má obecnou rovnici:

$$y^2 = x \text{ (regulární křivka)} \tag{4.42}$$

nebo

$$y^2 = q \text{ (singulární křivka)} \tag{4.43}$$

Nalezneme generátor asymptotického směru – dle (4.35): $\mathbf{u} = (1, 0)$.

Systém přímek asymptotického směru tvoří přímky, jejichž obecné rovnice znějí:

$$p_c : y = c, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{4.44}$$

Opět vyšetříme vzájemnou polohu těchto přímek a křivky $\mathcal{K}$ v závislosti na parametru c.

(a) regulární případ (parabola)
Pro průnik $p \cap \mathcal{K}$ řešíme soustavu rovnic $\{(4.42), (4.44)\}$, pro x dostaneme rovnici $x = c^2$. Je patrno, že pro každé $c \in \mathbb{R}$ má soustava jediné řešení a všechny přímky jsou asymptotickými sečnami

(b) singulární případ
Pro průnik $p \cap \mathcal{K}$ řešíme soustavu rovnic $\{(4.43), (4.44)\}$, kde dosazením dostáváme $c^2 = q$. Pro $c = \pm\sqrt{q}$ má soustava nekonečně mnoho řešení, pro každé jiné $c \in \mathbb{R}$ pak řešení žádné.
V prvém případě jde o tvořící přímky, ve druhém pak o asymptoty (těch je zde tedy nekonečně mnoho).

Shrňme získané výsledky.

Věta 4.7.4 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka hyperbolického typu, S její střed. Nechť p je přímka asymptotického směru (vzhledem k dané křivce). Pak platí:*

1. *p je asymptota kuželosečky $\mathcal{K}$, právě když $\mathcal{K}$ je regulární a $S \in p$.*
2. *p je asymptotická sečna kuželosečky $\mathcal{K}$, právě když $S \notin p$.*
3. *p je tvořící přímka kuželosečky $\mathcal{K}$, právě když $\mathcal{K}$ je singulární a $S \in p$.*

Věta 4.7.5 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka parabolického typu. Nechť p je přímka asymptotického směru (vzhledem k dané křivce). Pak platí:*

1. *p je asymptota kuželosečky $\mathcal{K}$ nebo tvořící přímka, právě když $\mathcal{K}$ je singulární.*
2. *p je asymptotická sečna kuželosečky $\mathcal{K}$, právě je $\mathcal{K}$ regulární.*

Vyšetřeme nyní, jak obecně najít rovnici asymptoty či tvořící přímky daného asymptotického směru.

Uvažujme kuželosečku danou ve zvolené bázi maticí $\mathbf{F}$. V odstavci 4.7.1 jsme zjistili (viz body 2 (b), 2 (c) rozboru), že bod $X = [x, y]$[41] náleží (některé) asymptotě nebo tvořící přímce křivky $\mathcal{K}$ směru $[\mathbf{s}]$, právě když platí:

$$F_1(x, y)s_1 + F_2(x, y)s_2 = 0, \tag{4.45}$$

což ze vyjádřit ve tvaru:

$$(\underline{f_{11}s_1 + f_{12}s_2})x + (\underline{f_{12}s_1 + f_{22}s_2})y + f_{13}s_1 + f_{23}s_2 = 0. \tag{4.46}$$

Právě v případě, kdy $[\mathbf{s}]$ je regulární (hyperbolický typ), vyplní tyto body *přímku* (aspoň jeden z podtržených výrazů není nula – viz (4.31)), v opačném případě (parabolický typ) je (4.46) buď splněn pro každý bod roviny, nebo pro žádný bod (proč?).
To ostatně plyne i z věty 4.7.5 – u parabolického typu buď asymptoty (resp. tvořící přímky) neexistují (parabola), nebo je každá přímka asymptotického směru asymptotou či tvořící přímkou (singulární křivky).
Platí tedy:

Věta 4.7.6 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka hyperbolického typu daná v některé bázi maticí $\mathbf{F}$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ nechť je vektor asymptotického směru. Pak vztah (4.45) je obecnou rovnicí asymptoty (je-li $\mathcal{K}$ regulární), nebo tvořící přímky (je-li $\mathcal{K}$ singulární), kuželosečky $\mathcal{K}$ směru $[\mathbf{s}]$.*

Vztah (4.45) lze také vyjádřit maticově (ověřte):

$$(s_1, s_2, 0)\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{4.47}$$

Příklad 4.7.7 Uvažujme hyperbolu danou (kanonickou) rovnicí:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Hledejme její asymptotické směry.
Řešení:
Dle (4.35) zjistíme, že jsou určeny vektory $\mathbf{a}_1 = (a, b)$, $\mathbf{a}_2 = (-a, b)$.
Užitím (4.47) nalezneme obecné rovnice jejích asymptot:

$$p_1 : \quad \tfrac{1}{a}x + \tfrac{1}{b}y = 0,$$

$$p_2 : -\tfrac{1}{a}x + \tfrac{1}{b}y = 0.$$

Vidíme tedy, že pojem asymptota námi zavedený je skutečně v souladu s pojmem, který čtenář zná ze střední školy.

[41] V odstavci 4.7.1 byly jeho souřadnice značeny $[x_0, y_0]$.

4.7.3 Tečny ke kuželosečce

Nyní budeme hledat rovnici tečny k regulární kuželosečce, je-li dán bod dotyku. Následující tvrzení má pomocný význam.

Lemma 4.7.8 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka,* $\mathbf{F}$ *její libovolná matice v některé bázi. Existuje-li bod $X \in \mathcal{K}$, $X = [x_0, y_0]$, tak, že platí*

$$F_1(x_0, y_0) = 0 \wedge F_2(x_0, y_0) = 0, \tag{4.48}$$

je kuželosečka singulární.

Důkaz: Protože $[x_0, y_0]$ je bod $\mathcal{K}$, platí $F(x_0, y_0) = 0$, což po úpravě dává:

$$x_0(\underbrace{f_{11}x_0 + f_{12}y_0 + f_{13}}_{F_1(x_0,y_0)}) + y_0(\underbrace{f_{21}x_0 + f_{22}y_0 + f_{23}}_{F_2(x_0,y_0)}) + (\underbrace{f_{21}x_0 + f_{22}y_0 + f_{23}}) = 0.$$

První a druhá závorka jsou nulové, proto je nulová i třetí. To ovšem znamená, že trojice $(x_0, y_0, 1)$ je netriviálním řešením ($x_3 = 1$) následující soustavy homogenních rovnic.

$$\begin{array}{l} f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3 = 0 \\ f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + f_{23}x_3 = 0\,. \\ f_{31}x_1 + f_{32}x_2 + f_{33}x_3 = 0 \end{array}$$

Z existence netriviálního řešení plyne nulovost determinantu matice soustavy, kterou je však matice $\mathbf{F}$ kuželosečky $\mathcal{K}$ – tj. $\Delta = 0$ a $\mathcal{K}$ je tedy singulární. □

Hledejme tečnu s bodem dotyku $T \in \mathcal{K}$. Buď p přímka daná bodem $T = [x_0, y_0]$ a směrovým vektorem $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ ve zvolené bázi. Jaké podmínky musí $\mathbf{s}$ splňovat, aby p byla tečnou?
Protože $T \in \mathcal{K}$, nabude (4.37) tvaru:

$$t\,[\varphi(s_1, s_2)t + 2(F_1(x_0, y_0)s_1 + F_2(x_0, y_0)s_2)] = 0. \tag{4.49}$$

Přímka p je tečnou křivky $\mathcal{K}$, právě když rovnice (4.49) je kvadratická (tj. $[\mathbf{s}]$ není asymptotický) a má dvojnásobný kořen. To znamená, že kořen $t = 0$ (odpovídá bodu T) musí být jejím jediným kořenem, což zřejmě nastane, právě když

$$F_1(x_0, y_0)s_1 + F_2(x_0, y_0)s_2 = 0. \tag{4.50}$$

To je nutná a postačující podmínka pro to, aby $p = \{T, \mathbf{s}\}$ byla tečna, ovšem za předpokladu, že $[\mathbf{s}]$ není asymptotický směr $\mathcal{K}$.
Pokud by $[\mathbf{s}]$ byl asymptotický, byla by přímka p (v souladu s bodem 2 (c) rozboru) tvořící

přímkou. Protože však tyto u regulárních křivek neexistují, neexistuje ani vektor asymptotického směru splňující (4.50).

Bod $X = [x, y]$ náleží p, právě když vektory $X - T$ a s jsou kolineární. S přihlédnutím k jejich souřadnicím lze vztah (4.50) ekvivalentně psát (proč?):

$$F_1(x_0, y_0)(x - x_0) + F_2(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{4.51}$$

Vzhledem k tomu, že $F_1(x_0, y_0), F_2(x_0, y_0)$ nejsou současně nuly (lemma 4.7.8), představuje (4.51) obecnou rovnici přímky – tj. hledané vyjádření tečny s bodem dotyku T.

Věta 4.7.9 *Buď $\mathcal{K}$ regulární kuželosečka daná v některé bázi maticí* $\mathbf{F}$, $T = [x_0, y_0]$ *nechť je libovolný bod křivky $\mathcal{K}$. Pak vztah (4.51) je obecnou rovnicí tečny kuželosečky $\mathcal{K}$ s bodem dotyku T.*

Obecnou rovnici tečny (4.51) lze též vyjádřit takto:

$$(f_{11}x_0 + f_{12}y_0 + f_{13})x + (f_{21}x_0 + f_{22}y_0 + f_{23})y + f_{31}x_0 + f_{32}y_0 + f_{33} = 0,$$

nebo v maticovém tvaru

$$(x_0, y_0, 1)\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,. \tag{4.52}$$

Pojem „tečna ke křivce“ již čtenář zná z kurzu matematické analýzy, kde dokazuje, že rovnice tečny tečny v bodě $[x_0, y_0]$ ke křivce definované v rovině implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ zní:[42]

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}(y - y_0) = 0.$$

Přesvědčte se, že tento vztah je ekvivalentní vztahu (4.51), tedy i pojem tečna námi zavedený splývá s pojmem známým z matematické analýzy.

V případě singulárních kuželoseček buď tečny neexistují v žádném bodě (dvojice rovnoběžek či různoběžek (s výjimkou průsečíku)), nebo jich lze bodem dotyku vést nekonečně mnoho (dvojnásobná přímka v každém bodě, dvojice různoběžek v průsečíku).

Řešení řady úloh o tečnách (např. tečny vedené daným bodem či mající daný směr) je ponecháno do cvičení.

Na závěr tohoto paragrafu odvodíme geometrickou charakterizaci pojmu *asymptotický* směr.

Jak jsme zjistili v odstavci 4.7.1, má každá sečna směr neasymptotický. Je však otázkou, zda ke každému neasymptotickému směru alespoň jedna sečna existuje.

Předpokládejme, že $\mathcal{K}$ je libovolná kuželosečka, která není přímkou (tehdy totiž nemá smysl otázku řešit).

[42] Samozřejmě za jistých podmínek kladených na funkci $F(x, y)$, ty jsou ovšem v našem případě splněny.

1. Nechť $\mathcal{K}$ je singulární – tj. je dvojicí rovnoběžek či různoběžek. Jejich směry jsou právě všechny asymptotické směry křivky $\mathcal{K}$ (viz odstavec 4.7.2). Je patrno, že pro každý jiný (tj. neasymptotický) směr najdeme přímku, která je s každou z nich různoběžná a je tedy sečnou kuželosečky $\mathcal{K}$.

2. Nechť $\mathcal{K}$ je regulární, daná ve zvolené bázi maticí $\mathbf{F}$, a nechť $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ je neasymptotického směru.

   Zvolme libovolně bod $X \in \mathcal{K}$, $X = [x_0, y_0]$, a předpokládejme, že přímka $p_X = \{X, \mathbf{s}\}$ není sečna, což ovšem znamená, že je *tečna* s bodem dotyku X. Bod X musí splňovat (4.50), což po rozepsání dává:

$$(f_{11}s_1 + f_{12}s_2)x_0 + (f_{21}s_1 + f_{22}s_2)y_0 + f_{13}s_1 + f_{23}s_2 = 0. \tag{4.53}$$

   První a druhá závorka se však současně neanulují ($[\mathbf{s}]$ není singulární) a vztah (4.53) je tedy obecnou rovnicí přímky, na níž však leží libovolný bod X kuželosečky $\mathcal{K}$, tedy $\mathcal{K}$ je částí přímky, což je ovšem spor s její regularitou. Proto alespoň pro jeden bod X je přímka p_X sečnou křivky $\mathcal{K}$.

Dokázali jsme následující tvrzení, které poskytuje geometrickou charakterizaci pojmu *(ne)asymptotický směr*.

Věta 4.7.10 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka, která není přímkou ani jednobodovou množinou.*[43] *Pak libovolný směr z $\mathbf{V}$ je neasymptotickým směrem kuželosečky $\mathcal{K}$ právě tehdy, když existuje sečna křivky $\mathcal{K}$ tohoto směru.*

Dosud jsme se nezabývali otázkou, kolik bodů obsahují regulární kuželosečky – tj. elipsa, hyperbola či parabola (víme jen že jistě obsahují alespoň 5 bodů, z nichž žádné 4 nejsou kolineární).

Víme však, že ke každé z nich existuje nekonečně mnoho neasymptotických směrů ve $\mathbf{V}_2$ (srv.věta 4.6.13). V důsledku předešlé věty existuje tudíž i nekonečně mnoho sečen těchto křivek, a proto platí:

Důsledek 4.7.11 *Každá regulární kuželosečka obsahuje nekonečně mnoho bodů.*

[43] Dohoda pro tento paragraf.

4.8 Středy souměrnosti kuželoseček

Kuželosečkou budeme v podkapitole 4.8 rozumět vždy neprázdnou množinu.

Definice 4.8.1 Bod S se nazývá *střed souměrnosti* množiny bodů $\mathcal{M}$, jestliže ke každému $M_1 \in \mathcal{M}$ existuje $M_2 \in \mathcal{M}$ tak, že S je střed úsečky M_1M_2. (O bodech M_1, M_2 říkáme, že jsou *souměrně sdružené podle středu S*.)

Pojem *střed kuželosečky* jsme již užili – a to pro počátek kanonické báze eliptických a hyperbolických kuželoseček (v regulárním případě jde o pojem totožný se středem úsečky F_1F_2 a ukázali jsme rovněž, že je středem souměrnosti uvedených křivek (viz podkapitola 4.2).

V tomto odstavci vyřešíme otázku existence středů souměrnosti *obecně* a mj. tak zodpovíme otázku, zda výše zmíněné křivky mají či nemají další středy souměrnosti.[44]

Definice 4.8.2 Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka. Úsečka, jejíž krajní body náleží kuželosečce, se nazývá *tětivou kuželosečky $\mathcal{K}$*.[45]

Poznámka 4.8.3 Z definic 4.8.1 a 4.8.2 plyne pro libovolnou kuželosečku $\mathcal{K}$:

- Je-li některý bod středem všech tětiv kuželosečky $\mathcal{K}$ jím procházejících, pak je středem $\mathcal{K}$ [46](postačí uvažovat jen tětivy neasymptotického směru?)

- Je-li některý bod středem kuželosečky $\mathcal{K}$, pak je středem všech tětiv neasymptotického směru jím procházejících.

V následující úvaze najdeme podmínky pro střed tětivy daného neasymptotického směru. Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka určená v některé bázi maticí $\mathbf{F}$, $[\mathbf{s}]$ neasymptotický směr. Přímka p tohoto směru nechť na $\mathcal{K}$ vytíná tětivu M_1M_2.

Označme $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, $M_i = [x_i, y_i], i = 1, 2$. Nyní hledejme střed M této tětivy, $M = [x_0, y_0]$.

Vyjádříme p parametricky: $X = M + t\mathbf{s}$, t_i nechť je hodnota parametru bodu $M_i, i = 1, 2$, což znamená

$$x_i = x_0 + s_1t_i \wedge y_i = y_0 + s_2t_i, \;\; i = 1, 2. \tag{4.54}$$

Bod M je tedy středem úsečky M_1M_2, právě tehdy když

$$x_0 = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \wedge y_0 = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2). \tag{4.55}$$

[44]Nadále místo *„střed souměrnosti"* užíváme jen *„střed"*.

[45]Včetně případu, kdy krajní body splývají. Tětivou rozumíme rovněž i úsečku, jež je částí kuželosečky.

[46]Buď dána přímka. Její libovolný bod X je zřejmě její střed. Je-li Y její další bod $Y \neq X$, pak jistě X není střed tětivy (asymptotického) směru XY. Tvrzení tedy nelze obrátit.

Dosadíme-li za souřadnice M_1, M_2 z (4.54), je (4.55) ekvivalentní podmínce $\frac{1}{2}s_1(t_1+t_2) = \frac{1}{2}s_2(t_1+t_2) = 0$, což nastane ($\mathbf{s} \neq \mathbf{o}$) právě v případě, kdy

$$(t_1 + t_2) = 0. \tag{4.56}$$

Parametry t_1, t_2 určují průsečíky přímky s křivkou $\mathcal{K}$ a jsou tedy kořeny rovnice (4.37), kde $\varphi(s_1, s_2) \neq 0$ (proč?). Podmínka (4.56) je proto ekvivalentní s výrokem[47]

$$F_1(x_0, y_0)s_1 + F_2(x_0, y_0)s_2 = 0. \tag{4.57}$$

Lemma 4.8.4 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka určená v některé bázi maticí $\mathbf{F}$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ libovolný vektor neasymptotického směru. Bod $M = [x_0, y_0]$ je středem tětivy směru $[\mathbf{s}]$ jím procházející, právě když jeho souřadnice vyhovují vztahu (4.57).*

Nyní odvodíme nutné a postačující podmínky pro souřadnice středů kuželosečky.

Věta 4.8.5 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka určená v některé bázi maticí $\mathbf{F}$. Pak bod $S = [x_0, y_0]$ je středem kuželosečky $\mathcal{K}$, právě když jeho souřadnice jsou řešením soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= 0, \\ F_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Soustavu (4.58) lze vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} f_{11}x + f_{12}y &= -f_{13}, \\ f_{21}x + f_{22}y &= -f_{23}. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Důkaz:

1. Dokážeme dostatečnost podmínky (4.58).
   Buď $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ původní báze, a nechť $S = [x_0, y_0]_{\mathcal{B}}$ vyhovuje soustavě (4.58).
   Protože snadno poznáme, zda počátek soustavy souřadné je či není středem kuželosečky, zvolme novou bázi $\mathcal{B}' = \langle S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$.
   Transformační rovnice pro přechod od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$ znějí:

   $$x = x' + x_0 \wedge y = y' + y_0. \tag{4.60}$$

   Nyní známým postupem dle odst. 4.1.2 nalezneme (pomocí věty 4.1.5 či přímým dosazením za souřadnice x, y z (4.59) do výchozího polynomu $F(x, y)$ v bázi $\mathcal{B}$) obecnou rovnici

[47] Užijeme známých Viètových vztahů.

v bázi $\mathcal{B}'$ ve tvaru (proveďte!):

$$f_{11}x'^2 + 2f_{12}x'y' + f_{22}y'^2 +$$

$$+2(\underline{f_{11}x_0 + f_{12}y_0 + f_{13}})x' + 2(\underline{f_{12}x_0 + f_{22}y_0 + f_{23}})y' + f'_{33} = 0.$$

Dle předpokladu $[x_0, y_0]$ anuluje podtržené výrazy (viz (4.58)), a proto obecná rovnice $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}'$ zní:

$$f_{11}x'^2 + 2f_{12}x'y' + f_{22}y'^2 + f'_{33} = 0.$$

Je zřejmé, že obsahuje-li $\mathcal{K}$ bod $X = [x', y']$, obsahuje i bod $Y = [-x', -y']$. To, v souladu s definicí 4.8.1, znamená, že bod $[0, 0]_{\mathcal{B}'} = S$ je středem souměrnosti $\mathcal{K}$.

2. Dokážeme nyní nutnost podmínky (4.58)

   (a) Nechť $\mathcal{K}$ není jednobodová množina.
   Buď $S = [x_0, y_0]$ středem křivky $\mathcal{K}$ a předpokládejme nyní, že $[x_0, y_0]$ nevyhovuje soustavě (4.58) – tj. $F_1(x_0, y_0) \neq 0 \vee F_2(x_0, y_0) \neq 0$.
   Pak ovšem podmínce (4.57) vyhovuje jediný směr, tedy existuje nejvýše jedna přímka p neasymptotického směru, která na $\mathcal{K}$ vytíná tětivu se středem S (lemma 4.8.4). Na této tětivě leží dva (p je sečna) nebo jeden (p je tečna) bod křivky$\mathcal{K}$. Křivka $\mathcal{K}$ však obsahuje více bodů, přičemž i tyto musí ležet na tětivách se středem S – leží tudíž na přímkách směru asymptotického. Protože tyto přímky musí s každým bodem z $\mathcal{K}$ obsahovat i bod z $\mathcal{K}$ s ním souměrně sdružený dle S, jde o přímky tvořící (a tedy obsahující i S). V případě hyperbolického typu ($\mathcal{K}$ má dva asymptotické směry) je tedy $\mathcal{K}$ dvojicí různoběžek s průsečíkem S, v případě parabolického typu ($\mathcal{K}$ má jediný asymptotický směr) je $\mathcal{K}$ přímkou, procházející S.
   V obou těchto případech je však *každá* přímka neasymptotického směru procházející S[48] tečnou $\mathcal{K}$ s bodem dotyku S, a její směr tedy vyhovuje podmínce (4.57), což je spor.
   Dvojice $[x_0, y_0]$ je proto řešení soustavy (4.57).

   (b) Nechť $\mathcal{K}$ je jednobodová množina, $\mathcal{K} = \{X\}$.
   Je zřejmé, že $\mathcal{K}$ má jediný střed a tímto středem je právě bod X (proč?). V části 1 tohoto důkazu jsme ukázali, že každé řešení soustavy (4.58) udává souřadnice středu kuželosečky. Protože ona soustava je v tomto případě řešitelná jednoznačně,[49] musí být souřadnice středu křivky $\mathcal{K}$ – bodu X – jejím řešením.

□

Nyní vyšetříme množiny středů jednotlivých kuželoseček.
Vzhledem k tomu, že maticí soustavy (4.59) pro souřadnice středů kuželosečky $\mathcal{K}$ je matice $\mathbf{F}_0$ (determinantem je δ), tak zřejmě:

[48] Kolik je těchto přímek?
[49] Determinant její matice je δ (viz (4.59)) a zde je $\delta \neq 0$.

1. pro typ eliptický a hyperbolický ($\delta \neq 0$, tj. $h(\mathbf{F}_0) = 2$) existuje jediné řešení soustavy (4.59) a tedy **jediný** střed. Tímto jediným středem je tudíž počátek kanonické báze (viz odst. 4.1.2).

2. pro typ parabolický ($\delta = 0$, tj. $h(\mathbf{F}_0) = 1$) buďto existuje nekonečně mnoho řešení závislých na 1 parametru (proč?) a tedy středy tvoří **přímku**, nebo neexistuje řešení žádné a tedy ani **žádný** střed. O tom rozhodne hodnost rozšířené matice soustavy (4.59):

   (a) nechť $\mathcal{K}$ je dvojice rovnoběžek, resp. jediná přímka. Zvolme vhodně bázi[50] tak, že obecná rovnice křivky v této bázi zní $y^2 - q = 0$. Pak je řešením soustavy (4.59) **přímka** $y = 0$ (přesvědčte se o tom), tj. osa pásu rovnoběžek, resp. ona dvojnásobná přímka.

   (b) je-li $\mathcal{K}$ parabola ($\Delta \neq 0$, tj. $h(\mathbf{F}) = 3$), je zřejmě hodnost rozšířené matice soustavy rovna dvěma a tudíž parabola **nemá** střed.

Věta 4.8.6 *Kuželosečky typu eliptického či hyperbolického mají jediný střed. Singulární kuželosečky typu parabolického mají přímku středů, regulární kuželosečky tohoto typu nemají žádný střed.*

Definice 4.8.7 Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka. jestliže $\mathcal{K}$ má jediný střed, nazývá se *středová kuželosečka*. V opačném případě se nazývá *nestředová kuželosečka*.[51]

Poznámka 4.8.8 Nestředovými kuželosečkami jsou právě kuželosečky typu parabolického.

V případě středových kuželoseček odvoďme pomocí Kramerova pravidla užitého na soustavu (4.59) vztah pro výpočet jejich středu.
Nechť $\mathbf{F}$ určuje středovou křivku $\mathcal{K}$ v některé bázi. Pak tedy pro souřadnici x_0 jejího středu lze psát:

$$x_0 \cdot \delta = \begin{vmatrix} -f_{13} & f_{12} \\ -f_{23} & f_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} f_{13} & f_{12} \\ f_{23} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{12} & f_{13} \\ f_{22} & f_{23} \end{vmatrix} = \mathcal{F}_{31},$$

kde $\mathcal{F}_{31}$ značí algebraický doplněk prvku f_{31} matice $\mathbf{F}$.
Podobně pro y_0 obdržíme (proveďte), že $y_0 \cdot \delta = \mathcal{F}_{32}$, kde $\mathcal{F}_{32}$ je algebraický doplněk prvku f_{32}.

[50] Věta 4.8.5 platí pro každou bázi.

[51] V některé literatuře se středovými křivkami rozumí ty, jež mají aspoň jeden střed a nestředovými ty, jež nemají žádný střed.

Věta 4.8.9 *Buď $\mathcal{K}$ středová kuželosečka určená v některé bázi $\mathcal{B}$ maticí $\mathbf{F}$. Pak pro souřadnice jejího středu S platí:*

$$S = \left[\frac{\mathcal{F}_{31}}{\delta}; \frac{\mathcal{F}_{32}}{\delta}\right]_{\mathcal{B}}.$$

Z věty 4.8.6 plyne

Důsledek 4.8.10 *Středová kuželosečka má jednoznačně určen počátek kanonické báze.*

Se zřetelem k důsledku 4.6.10 tak dostáváme odpověď na otázku položenou s definicí kanonické báze:

Důsledek 4.8.11 *Středová kuželosečka, která není kružnicí, má (až na orientaci a pojmenování vektorů) jedinou kanonickou bázi.*

Příklad 4.8.12 Uvažujme opět kuželosečku $\mathcal{K}$ danou v jisté bázi obecnou rovnicí:

$$23x^2 - 72xy + 2y^2 - 6x - 8y = 0.$$

Určete její střed.
Řešení:
Matice soustavy (4.59) pro souřadnice jejího středu zní:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 23 & -36 & 3 \\ -36 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Výpočtem obdržíme, že $S = \left[-\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right]_{\mathcal{B}}$ (srv. příklad 4.3.11). Porovnejte s výsledkem dle věty 4.8.9.

4.9 Průměry kuželoseček

V této podkapitole budeme pracovat pouze s kuželosečkami, které obsahují více než jeden bod.

Zavedení pojmu *průměr kuželosečky* motivujme následující úvahou.

Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka určená v některé bázi maticí $\mathbf{F}$. Zvolme nyní libovolný *neasymptotický* směr $[\mathbf{s}]$. Veďme sečny křivky $\mathcal{K}$ tohoto směru a zkoumejme množinu středů takto vzniklých tětiv.

Jak již víme, je bod $M_0 = [x, y]$ středem tětivy směru vektoru $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, právě když platí (viz lemma 4.8.4):

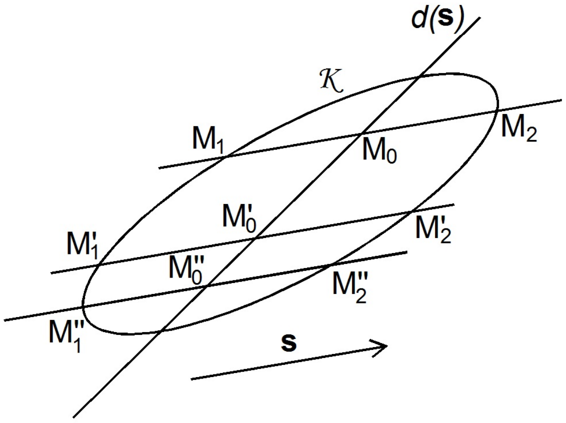
$$F_1(x, y)s_1 + F_2(x, y)s_2 = 0, \tag{4.61}$$

což lze ekvivalentně psát:

$$d(\mathbf{s}) : (f_{11}s_1 + f_{12}s_2)x + (f_{12}s_1 + f_{22}s_2)y + (f_{13}s_1 + f_{23}s_2) = 0. \tag{4.62}$$

Protože [s] je neasymptotický a tedy regulární, je (4.62) rovnicí *přímky* (proč?). Středy všech tětiv směru [s] tedy leží na přímce $d(\mathbf{s})$, která je směrem [s] jednoznačně určena.

Následující obrázek znázorňuje tři tětivy jisté kuželosečky i přímku $d(\mathbf{s})$ na níž leží jejich středy M_0, M_0' a M_0''.



Obr. 4.9.1

Pokud by [s] byl *asymptotický*, ale regulární, je (4.62) rovněž rovnicí přímky. Protože však neexistují sečny směru [s], nelze ji interpretovat jako přímku obsahující středy vzniklých tětiv. $\mathcal{K}$ je v tomto případě hyperbolického typu (proč?) a dle věty 4.7.8 je $d(\mathbf{s})$ asymptotou nebo tvořící přímkou křivky $\mathcal{K}$, které jsou ovšem směrem [s] jednoznačně určeny.

Pro směrový vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ přímky $d(\mathbf{s})$ musí platit (proč?)

$$(f_{11}s_1 + f_{12}s_2)u_1 + (f_{12}s_1 + f_{22}s_2)u_2 = 0,$$

což (viz důsledek 4.6.4) značí, že směr této přímky je sdružen se směrem [s].

V případě, že s je singulárního směru, není (4.62) rovnicí žádné přímky.

Pro přímku $d(\mathbf{s})$ zavedeme následující název:

Definice 4.9.1 Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka, [s] její regulární směr a nechť $\mathbf{F}$ je některá matice kuželosečky $\mathcal{K}$ v libovolné bázi $\mathcal{B}$. Pak přímka $d(\mathbf{s})$ daná obecnou rovnicí (4.62), se nazývá *průměr kuželosečky $\mathcal{K}$ sdružený se směrem* [s], $\mathbf{s} = (s_1, s_2)_{\mathcal{B}}$.

Rovnici (4.62) lze rovněž vyjádřit v maticovém tvaru:

$$d(\mathbf{s}) : \ (s_1, s_2, 0)\mathbf{F} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{4.63}$$

Poznámka 4.9.2 Definice je korektní – v úvahách provedených před jejím vyslovením jsme ukázali, že pojem průměru je skutečně *geometrickou vlastností* dané křivky a daného směru – rovnice (4.61) určuje vždy *tutéž přímku*, bez ohledu na výběr matice kuželosečky a volbu báze.

Obdrželi jsme *geometrickou interpretaci* pojmu *„sdružené směry“*:

Věta 4.9.3 *Buď dána kuželosečka $\mathcal{K}$. Pak platí, že směr $[\mathbf{v}]$ sdružený s regulárním směrem $[\mathbf{u}]$ vzhledem ke $\mathcal{K}$ je dán směrem průměru $d(\mathbf{u})$ kuželosečky $\mathcal{K}$.*

Zřejmě tedy platí (viz věta 4.6.8):

Věta 4.9.4 *Buď $[\mathbf{u}]$ regulární směr kuželosečky $\mathcal{K}$. Směr $[\mathbf{u}]$ je hlavním směrem, právě když $[\mathbf{u}]$ je kolmý na $d(\mathbf{u})$.*

Geometrickou interpretaci sdruženosti směrů vzhledem k regulární kuželosečce doplňuje následující tvrzení:

Věta 4.9.5 *Průměr jdoucí libovolným bodem regulární kuželosečky $\mathcal{K}$ je sdružený se směrem tečny ke $\mathcal{K}$ v tomto bodě.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{K}$ je kuželosečka v některé bázi určená maticí $\mathbf{F}$.
Buď $T = [x_0, y_0]$ bod kuželosečky $\mathcal{K}$, který je průsečíkem $\mathcal{K}$ a průměru $d(\mathbf{s})$. Použijme tvaru (4.61) obecné rovnice $d(\mathbf{s})$. Protože $T \in \mathcal{K}$, platí:

$$F_1(x_0, y_0)s_1 + F_2(x_0, y_0)s_2 = 0,$$

což ovšem, s přihlédnutím k (4.50) znamená, že přímka $\{T, \mathbf{s}\}$ je tečnou ke $\mathcal{K}$ v bodě T a tím je věta dokázána. $\square$

Povšimněme si nyní incidence mezi středem kuželosečky a jejími průměry. Buď $\mathcal{K}$ určená v některé bázi maticí $\mathbf{F}$.

Nechť $S = [x_0, y_0]$ je středem $\mathcal{K}$. Pak platí $F_1(x_0, y_0) = F_2(x_0, y_0) = 0$ (věta 4.8.5) a tudíž (užijeme-li pro průměr vztahu (4.61)) S leží na průměru křivky $\mathcal{K}$ sdruženém s libovolným směrem.

Obráceně, nechť $S = [x_0, y_0]$ je bod, který leží na všech průměrech (tj. leží na průměru sdruženém s libovolným směrem) křivky $\mathcal{K}$. Pak pro libovolný regulární směr $[\mathbf{s}]$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, platí rovnost (4.61):

$$F_1(x_0, y_0)s_1 + F_2(x_0, y_0)s_2 = 0.$$

Vybereme z množiny regulárních směrů křivky $\mathcal{K}$ dva různé směry[52] $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}]$. Uvedená rovnost může být pro *oba* směry – tj. pro souřadnice jejich *lineárně nezávislých* reprezentantů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ – splněna jen za předpokladu, že $F_1(x_0, y_0) = F_2(x_0, y_0) = 0$ (proč?).
Dle věty 4.8.5 je bod S středem kuželosečky $\mathcal{K}$.

Následující tvrzení tudíž platí.

Věta 4.9.6 *Bod S je středem kuželosečky $\mathcal{K}$ právě tehdy, když leží na všech průměrech této kuželosečky.*

Které přímky jsou průměry jednotlivých kuželoseček?

Buď $\mathcal{K}$ **středová** kuželosečka, označme S její (jediný) střed.

Dle předchozí věty musí průměr křivky $\mathcal{K}$ sdružený s libovolným směrem procházet bodem S.

Ukažme, že libovolná přímka procházející bodem S je průměrem sdruženým s některým směrem.
Zvolme bázi tak, aby bod S byl jejím počátkem. Pak ovšem pro matici $\mathbf{F}$ v této bázi platí $f_{13} = f_{23} = 0$ (viz věta 4.8.5).
Průměr $d(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, má pak obecnou rovnici

$$(f_{11}s_1 + f_{12}s_2)x + (f_{12}s_1 + f_{22}s_2)y = 0. \tag{4.64}$$

Buď p libovolná přímka, $S \in p$. Její obecná rovnice zní ($S = [0, 0]$):

$$ax + by = 0. \tag{4.65}$$

Rovnicemi (4.64) a (4.65) bude dána táž přímka, právě když bude existovat $s_1, s_2, t \neq 0$[53] tak, že:

$$\begin{array}{rcl} f_{11}s_1 + f_{12}s_2 &=& ta \\ f_{12}s_1 + f_{22}s_2 &=& tb \end{array}.$$

Tato soustava má řešení (a to jediné), právě když má nenulový determinant $\delta \neq 0$, což je však pro středové kuželosečky splněno.
Tím je tedy dokázána platnost následující věty. Platnost 2 plyne rovněž z toho, že směr průměru $d(\mathbf{u})$ je vždy sdružen s $[\mathbf{u}]$ a tento je sdružen s jediným směrem (věta 4.6.12).

Věta 4.9.7 *Buď $\mathcal{K}$ středová kuželosečka. Pak platí:*

1. *Průměry kuželosečky $\mathcal{K}$ jsou právě všechny přímky procházející jejím středem.*
2. *Každý průměr křivky $\mathcal{K}$ je sdružen s právě jedním směrem.*

[52] Existují – regulárních směrů je totiž nekonečně mnoho.
[53] Bez újmy na obecnosti lze předpokládat $t = 1$ (proč?).

Nechť $\mathcal{K}$ je nyní **nestředová** kuželosečka.

Nejprve buď $\mathcal{K}$ **regulární** – tj. je parabolou.
Libovolný regulární směr je sdružen *právě*[54] s jejím singulárním směrem a tudíž každý průměr paraboly $\mathcal{K}$ je singulárního směru.
Ukažme, že libovolná přímka singulárního směru je průměr $\mathcal{K}$ sdružený s některým směrem. Zvolme bázi tak, aby obecná rovnice $\mathcal{K}$ zněla $y^2 = 2x$. Singulárním směrem je směr $[(1,0)]$. Průměr $d(\mathrm{s})$, $\mathrm{s} = (s_1, s_2)$, má pak obecnou rovnici

$$s_2 y - s_1 = 0, \tag{4.66}$$

kde $s_2 \neq 0$, protože $[\mathrm{s}]$ je regulární.
Buď p libovolná přímka singulárního směru. Její obecná rovnice zní

$$y = m. \tag{4.67}$$

Rovnicemi (4.66) a (4.67) bude dána táž přímka, právě když bude existovat s_1, s_2 tak, že

$$s_1 : s_2 = m,$$

čemuž pro libovolný směr odpovídá jediný směr $[\mathrm{s}]$.
Tím je tedy dokázána platnost následující věty.

Věta 4.9.8 *Buď $\mathcal{K}$ regulární kuželosečka parabolického typu. Pak platí:*

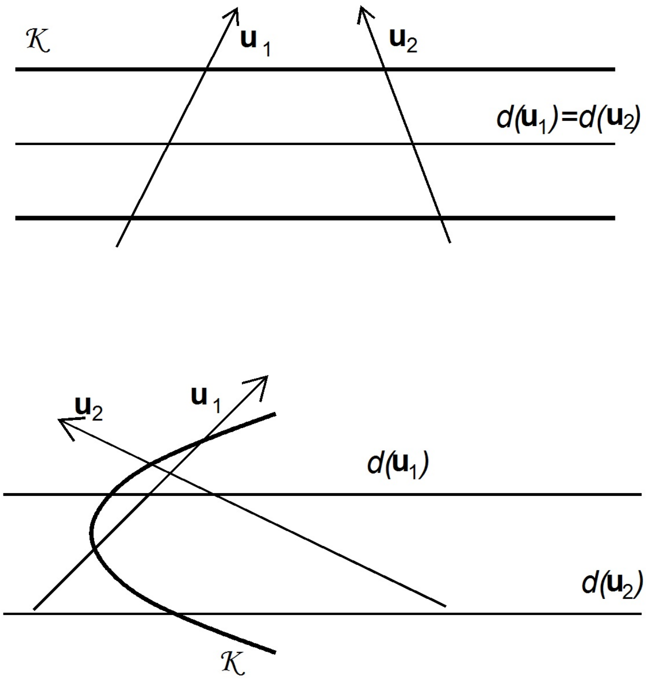
1. *Průměry kuželosečky $\mathcal{K}$ jsou právě všechny přímky singulárního směru křivky $\mathcal{K}$.*
2. *Každý průměr křivky $\mathcal{K}$ je sdružen s právě jedním směrem.*

Nyní uvažujme **singulární** případ, tj. $\mathcal{K}$ je dvojicí rovnoběžek nebo přímkou. Jak jsme zjistili v podkapitole 4.8, má $\mathcal{K}$ přímku středů. V souladu s větou 4.9.6 je tato přímka jediným průměrem kuželosečky $\mathcal{K}$, který je tudíž sdružen s libovolným směrem. Platí proto:

Věta 4.9.9 *Buď $\mathcal{K}$ singulární kuželosečka parabolického typu. Jediným průměrem kuželosečky $\mathcal{K}$ je její přímka středů.*

Na následujícím obrázku jsou uvedeny průměry paraboly i dvojice rovnoběžek.

[54] Věta 4.6.12.



Obr. 4.9.2

V závěrečné části tohoto paragrafu ukážeme, jak lze průměrů užít ke konstrukci bází, v nichž obecná rovnice kuželosečky nabývá (velmi jednoduchého) tvaru, jehož existenci zaručuje důsledek 4.4.7.

Než tak učiníme, zaveďme pro středové křivky následující pojem:

Definice 4.9.10 Buď $\mathcal{K}$ středová kuželosečka, d_1, d_2 její dva různé průměry. Řekneme, že d_1, d_2 jsou *sdružené průměry kuželosečky* $\mathcal{K}$, jestliže jsou vzhledem ke $\mathcal{K}$ sdruženy jejich směry.

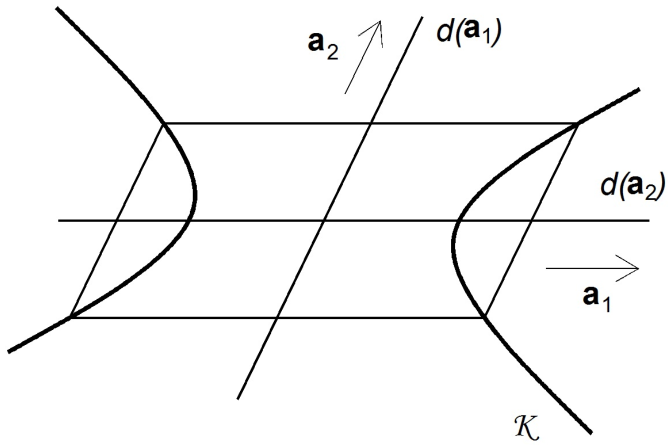
Věta 4.9.11 *Buďte d_1, d_2 dvojice průměrů kuželosečky $\mathcal{K}$. Pak platí:*

Je-li $d_1 = d(\mathbf{a}_1), d_2 = d(\mathbf{a}_2)$, pak d_1, d_2 jsou dvojicí sdružených průměrů $\mathcal{K}$ právě když $[\mathbf{a}_1], [\mathbf{a}_2]$ jsou sdružené vzhledem ke $\mathcal{K}$.

Přitom průměr d_1 půlí všechny tětivy kuželosečky $\mathcal{K}$ rovnoběžné s d_2.

Důkaz: Především uveďme, že jsou-li d_1, d_2 dvojice sdružených průměrů, jsou oba neasymptotického směru (proč? – užijte větu 4.6.12).
První část tvrzení je tudíž triviálním důsledkem vět 4.9.3 a 4.6.12. Část druhá je pak důsledkem geometrické interpretace pojmu průměr sdružený s neasymptotickým směrem □

Následující obrázek znázorňuje dvojici sdružených průměrů hyperboly:



Obr. 4.9.3

Nyní se vraťme k tématu nastolenému před definicí 4.9.10.
Nechť $\mathcal{K}$ je kuželosečka $\mathcal{K}$ (obsahující alespoň dva body) dána v některé bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ maticí $\mathbf{F}$.

Hledejme bázi $\mathcal{B}' = \langle P; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ v níž vymizí koeficient na pozici (12) a tedy obecná rovnice bude znít

$$f'_{11}x'^2 + f'_{22}y'^2 + 2f'_{13}x' + 2f'_{23}y' + f'_{33} = 0. \tag{4.68}$$

Protože $f'_{12} = \Phi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, je $[\mathbf{a}_1]$, $[\mathbf{a}_2]$ libovolná dvojice směrů sdružených vzhledem ke $\mathcal{K}$ (tj. $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ je báze $\mathbf{V}$ polární vzhledem k Φ_2 (kvadratické formě křivky $\mathcal{K}$)).

1. Nechť $\mathcal{K}$ je středová. Pak $f'_{11} \neq 0$, $f'_{22} \neq 0$ $(\delta \neq 0)$.
   Koeficienty na pozicích (13) a (23) se anulují, právě když za nový počátek báze zvolíme střed S křivky $\mathcal{K}$ (proč?) (což lze provést právě jedním způsobem).

   S přihlédnutím k větě 4.9.3 ($[\mathbf{a}_1]$, $[\mathbf{a}_2]$ jsou regulární) a větě 4.9.7 vidíme, že osy soustavy souřadné určené bází $\mathcal{B}''$ jsou průměry křivky $\mathcal{K}$, jejichž směry jsou vzhledem ke $\mathcal{K}$ sdruženy (promyslete si).

   V bázi $\mathcal{B}'' = \langle S; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ má tudíž $\mathcal{K}$ obecnou rovnici

   $$f'_{11}x''^2 + f'_{22}y''^2 + f''_{33} = 0,$$

   což lze psát v případě typu eliptického ve tvaru $(\alpha, \beta \in R^+)$

   $$\frac{x''^2}{\alpha^2} + \frac{y''^2}{\beta^2} = 1, \tag{4.69}$$

   v případě typu hyperbolického pak ve tvaru $(\alpha, \beta \in R^+)$

   $$\frac{x''^2}{\alpha^2} - \frac{y''^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{resp. } \frac{x''^2}{\alpha^2} - \frac{y''^2}{\beta^2} = 0. \tag{4.70}$$

2. Nechť $\mathcal{K}$ je nestředová (parabolického typu). Pak je buď $f'_{11} = 0$, nebo $f'_{22} = 0$ ($\delta = 0$). Předpokládejme takové očíslování vektorů báze, že $f'_{11} = 0$. Rovnice (4.68) pak nabývá tvaru

$$f'_{22}{y'}^2 + 2f'_{13}x' + 2f'_{23}y' + f'_{33} = 0, \tag{4.71}$$

vektor $\mathbf{a}_1$ tedy určuje singulární směr (prověřte).

Hledejme bod V tak, aby v bázi $\mathcal{B}'' = \langle V; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ se v obecné rovnici křivky anuloval koeficient na pozici (23). Úpravou rovnice (4.71) na tvar

$$f'_{22}\left(y' + \frac{f'_{23}}{f'_{22}}\right)^2 + 2f'_{13}x' + f''_{33} = 0 \tag{4.72}$$

je patrno, že se tak stane právě v případě, kdy $V = \left[v'_1, -\frac{f'_{23}}{f'_{22}}\right]_{\mathcal{B}'}$ a v'_1 je libovolné. Uvážíme-li, že rovnice (4.62) průměru $d(\mathbf{a}_2)$ zní:

$$f'_{22}y' + f'_{23} = 0,$$

vidíme, že koeficient na pozici (23) se anuluje, právě když bod V je libovolný bod průměru $d(\mathbf{a}_2)$. V bázi $\mathcal{B}''$ má tedy $\mathcal{K}$ obecnou rovnici

$$f'_{22}{y''}^2 + 2f'_{13}x'' + f''_{33} = 0. \tag{4.73}$$

(a) Nyní vyšetřeme případ kdy $\mathcal{K}$ je parabola. Hledáme další podmínku pro bod V, aby v bázi $\mathcal{B}'' = \langle V; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ měla $\mathcal{K}$ obecnou rovnici

$${y''}^2 + 2\gamma x'' = 0, \tag{4.74}$$

tj. aby se anuloval i koeficient na pozici (33), což zřejmě nastane, právě když bod V leží na $\mathcal{K}$.
Můžeme tedy říci, že obecná rovnice paraboly $\mathcal{K}$ má tvar (4.74), právě když bod V je průsečíkem $d(\mathbf{a}_2) \cap \mathcal{K}$.
Dle věty 4.9.5 je osa y'' soustavy souřadné určené bází $\mathcal{B}''$ tečna s bodem dotyku V.

(b) Nechť $\mathcal{K}$ je singulární (neprázdná) křivka. Protože $\Delta = 0$, dostáváme $f'_{13} = 0$ (užitím (4.73) – prověřte).
Hledáme-li bod V tak, aby v bázi $\mathcal{B}'' = \langle V; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ měla $\mathcal{K}$ obecnou rovnici

$${y''}^2 - \gamma = 0,$$

lze tedy za V vzít libovolný bod náležící $d(\mathbf{a}_2)$.

Věta 4.9.12 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka.*

1. *Je-li $\mathcal{K}$ středová, pak má v bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnici následujícího typu ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$)*

   (a) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ *(je-li $\mathcal{K}$ elipsou), nebo*

   (b) $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ *(je-li $\mathcal{K}$ hyperbolou), nebo*

   (c) $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ *(je-li $\mathcal{K}$ dvojicí různoběžek),*

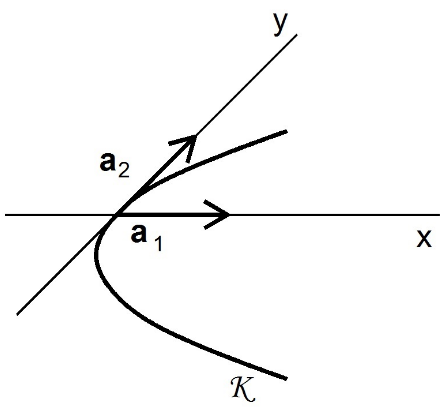
   právě když souřadné osy soustavy souřadné určené bází $\mathcal{B}$ jsou libovolnou dvojicí sdružených průměrů křivky $\mathcal{K}$.

2. *Je-li $\mathcal{K}$ nestředová, pak má v bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnici následujícího typu ($\gamma \in \mathbb{R}$)*

   (a) $y^2 - 2\gamma x = 0$ *(je-li $\mathcal{K}$ parabolou), právě když pro soustavu souřadnou určenou bází $\mathcal{B}$ platí, že osa y je libovolná tečna paraboly a osa x průměr paraboly procházející bodem dotyku,*

   (b) $y^2 - \gamma = 0$ *(je-li $\mathcal{K}$ dvojice rovnoběžek či přímka), právě když pro soustavu souřadnou určenou bází $\mathcal{B}$ platí, že osa y je libovolná přímka regulárního směru a osa x průměr kuželosečky $\mathcal{K}$.*

Příklad soustavy souřadné o níž hovoří tato věta znázorňuje pro středovou kuželosečku obrázek 4.9.3, kde značíme $x = d(\mathbf{a}_2), y = d(\mathbf{a}_1)$, a pro parabolu obrázek následující ($x \cap z = \{V\}$).



Obr. 4.9.4

Poznámka 4.9.13 Přejdeme -li v bázi $\mathcal{B}$ k vhodným násobkům jejích vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, lze docílit toho, aby v rovnicích dle předchozí věty $\alpha = \beta = 1$, resp. $\gamma = 1$ (jak?).

Zdůrazněme, že u středových křivek udávají α, β poloosy (v případě regulárním), resp. určují odchylku dvojice různoběžek (jak?), pouze tehdy, je-li báze $\mathcal{B}$ kartézská. Dle věty 4.9.4 to značí, že její vektory určují hlavní směry, tj. $\mathcal{B}$ je kanonická báze křivky $\mathcal{K}$.
Stejně tak tomu je v případě parabolickém (zde jde o hodnotu γ a její vztah k parametru paraboly, resp. vzdálenosti rovnoběžek[55]).

4.10 Osy souměrnosti kuželoseček

V podkapitole 4.10 budeme studovat *pouze* kuželosečky obsahující aspoň dva body.

Definice 4.10.1 Přímka o se nazývá *osa souměrnosti* množiny bodů $\mathcal{M}$, jestliže ke každému $M_1 \in \mathcal{M}$ existuje $M_2 \in \mathcal{M}$ tak, že

1. střed úsečky M_1M_2 leží na o,
2. $M_2 - M_1 \perp o$.

(O bodech M_1, M_2 říkáme, že jsou *souměrně sdružené podle osy* o).

Při konstrukci kanonických bází jsme již zjistili, že souřadné osy jsou v některých případech osami souměrnosti kuželoseček.

V této podkapitole vyřešíme otázku existence os souměrnosti *obecně* a mj. tak zodpovíme otázku, zda výše zmíněné křivky mají či nemají další osy souměrnosti.

Uvažujme kuželosečku $\mathcal{K}$, s nechť je některý vektor **neasymptotického** směru kuželosečky $\mathcal{K}$. Sestrojme průměr $d(\mathrm{s})$. Na něm, jak víme, leží středy tětiv rovnoběžných s s. Kdy bude $d(\mathrm{s})$ osou kuželosečky? Bude to právě když tyto tětivy budou kolmé na $d(\mathrm{s})$. Podle věty 4.9.3 je směr průměru $d(\mathrm{s})$ sdružený s $[\mathrm{s}]$. Směr $[\mathrm{s}]$ má tedy být kolmý na $d(\mathrm{s})$, což dle věty 4.9.4 znamená, že $[\mathrm{s}]$ je hlavní směr křivky $\mathcal{K}$.

Ukázali jsme platnost následujícího tvrzení.

Věta 4.10.2 *Každý průměr sdružený s neasymptotickým hlavním směrem dané kuželosečky je její osou souměrnosti.*

[55] Přirozeně s výjimkou přímky, kdy je $\gamma = 0$, i když $\mathcal{B}$ není kartézská

Důsledek 4.10.3 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka určená v některé bázi maticí $\mathbf{F}$. Je-li $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ vektor neasymptotického hlavního směru, je následující přímka osou souměrnosti a $\mathbf{s}$ je její normálový vektor (proč?).*

$$(s_1, s_2, 0)\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Je otázkou, zda věta 4.10.2 platí i obráceně, tedy zda každá osa o symetrie je průměrem sdruženým s některým neasymptotickým hlavním směrem.

Nechť o s normálovým vektorem $\mathbf{n}$ je některá osa souměrnosti křivky $\mathcal{K}$.

1. Normálový vektor $\mathbf{n}$ je neasymptotického směru.
   Je-li p libovolná sečna křivky $\mathcal{K}$ směru $[\mathbf{n}]$, je kolmá na o, a proto průsečíky $p \cap \mathcal{K}$ jsou souměrně sdružené dle o (o je osa), čili střed každé tětivy směru $[\mathbf{n}]$ leží na o. To znamená (viz podkapitola 4.9), že o je průměr sdružený se směrem $[\mathbf{n}]$ a protože navíc je $\mathbf{n} \perp o$, je $[\mathbf{n}]$ hlavní směr kuželosečky $\mathcal{K}$.

2. Normálový vektor $\mathbf{n}$ je asymptotického směru.
   Buďte $M_1, M_2 \in \mathcal{K}$, $M_1 \neq M_2$, souměrně sdružené dle o. Pak vektor $M_2 - M_1 \in [\mathbf{n}]$ a tedy přímka $p = M_1M_2$ je asymptotického směru, přičemž obsahuje více než jeden bod z $\mathcal{K}$, odkud plyne, že p je tvořící přímkou křivky $\mathcal{K}$.
   To značí, že $\mathcal{K}$ je dvojicí přímek p, q (event. $p = q$), kde $p \perp o$. Protože o je osou souměrnosti, musí být buď $q = o$, nebo $q \perp o$ (proč?).
   To tedy znamená, že $\mathcal{K}$ je buď dvojicí kolmých různoběžek ($q = o$), nebo dvojicí rovnoběžek (či přímkou) ($q \perp o$).
   V případě prvém je samozřejmě i druhá z dvojice různoběžek osou souměrnosti, v případě druhém je osou souměrnosti libovolná přímka kolmá na obě rovnoběžky (či přímku).

   Platí tedy následující věta:

Věta 4.10.4 *Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka, jež není dvojicí rovnoběžek, přímkou, či dvojicí kolmých různoběžek. Pak jsou osami souměrnosti $\mathcal{K}$ právě všechny průměry sdružené s neasymptotickými hlavními směry.*

Poznámka 4.10.5 Kuželosečky, které jsou dvojicí rovnoběžek, přímkou, dvojicí kolmých různoběžek mají navíc další osy, jak jsme zjistili před větou 4.10.4.

Z vět 4.10.4 a 4.6.9 plyne (jaká je situace pro kružnici?):

Důsledek 4.10.6

1. *Každá středová kuželosečka, jež není kružnicí, bodem, ani dvojicí kolmých přímek, má právě dvě osy symetrie.*
   Je-li S její střed, $[\mathbf{a}_1], [\mathbf{a}_2]$ její hlavní směry, pak jsou těmito osami přímky $o_1 = \{S, \mathbf{a}_1\}, o_2 = \{S, \mathbf{a}_2\}$.
2. *Každá parabola má jedinou osu souměrnosti.*

U středových kuželoseček jsme ukázali jednoznačnost kanonické báze (viz důsledek 4.8.10).

Při rozboru obecné rovnice paraboly jsme ukázali, že souřadná osa kanonické soustavy souřadné mající singulární směr je osou symetrie a její průsečík s parabolou počátkem kanonické báze. Vzhledem k důsledku 4.10.6(2) tedy dostáváme:

Důsledek 4.10.7 *Parabola má jednoznačně určen počátek kanonické báze. Se zřetelem k důsledku 4.6.10 platí, že parabola má (až na orientaci a pojmenování vektorů) jedinou kanonickou bázi.*

(Jak je tomu u singulárních křivek parabolického typu?)

Na závěr ukažme, jak snadno najít počátek kanonické báze paraboly – tzv. *vrchol paraboly*.

Buď parabola $\mathcal{K}$ dána v některé bázi maticí $\mathbf{F}$.
Pro invariant $\mathcal{S}$ platí: $\mathcal{S} = f_{11} + f_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$. Protože λ_1 je u paraboly nula, vidíme, že $\lambda_2 = f_{11} + f_{22}$. Souřadnice (a_1, a_2) hlavního směru $[\mathbf{a}]$ odpovídajícímu tomuto vlastnímu číslu ($[\mathbf{a}]$ je regulární, neboť $\lambda_2 \neq 0$, a tudíž neasymptotický – viz věta 4.6.13) jsou řešením rovnice

$$(f_{11} - \lambda_2)a_1 + f_{12}a_2 = 0 \quad \text{(proč?)}.$$

Odtud $\frac{a_2}{a_1} = \frac{f_{22}}{f_{12}}$, tj. např. $\mathbf{a} = (f_{12}, f_{22})$.
Osa o je průměr $o = d(\mathbf{a})$, takže užitím (4.62) máme:

$$q: \; f_{12}x + f_{22}y + \tfrac{f_{12}f_{13} + f_{22}f_{23}}{f_{11} + f_{22}} = 0.$$

Vrchol pak snadno nalezneme jako $\mathcal{K} \cap o$, tedy bez provádění transformace soustavy souřadné.

Příklad 4.10.8 Buď $\mathcal{K}$ kuželosečka daná v jisté kartézské bázi obecnou rovnicí

$$23x^2 - 72xy + 2y^2 - 6x - 8y = 0.$$

Užijme důsledku 4.10.3 k nalezení jejích os souměrnosti.
Řešení:

Jak jsme ukázali v příkladu 4.3.11, je $\mathcal{K}$ hyperbolou a $[(3,4))$ a $[(4,-3)]$ jsou její hlavní směry.
Platí tedy, že $o_1 = d((3,4))$, tj.

$$o_1:\ (3,4,0)\begin{pmatrix} 23 & -36 & -3 \\ -36 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

po úpravě:

$$q_1:\ 3x + 4y + 1 = 0.$$

Dále pak $o_2 = d((4,-3))$, což vede k výsledku

$$o_2:\ 4x - 3y = 0.$$

(Srovnejte s příkladem 4.3.11.)

Kapitola 5

Teorie kvadrik

Tato kapitola je věnována studiu množin bodů v třírozměrném euklidovském prostoru, které budeme nazývat *kvadriky*.[1]
Zavedení tohoto pojmu bude analogické zavedení pojmu kuželosečka v $\mathcal{E}_2$ – uvidíme, že pojem kvadrika je jeho přirozeným zobecněním pro vyšší dimenzi. Proto i studium kvadrik bude do jisté míry analogické – často užijeme přirozeného zobecnění postupů, které se uplatnily v kapitole předešlé.
Třírozměrný euklidovský prostor budeme označovat $\mathcal{E}_3$ a jeho zaměření budeme značit $\mathbf{V}$.
Pojmem *báze* budeme (pokud nebude řečeno jinak) rozumět *afinní bázi* prostoru $\mathcal{E}_3$.

5.1 Definice a základní pojmy

5.1.1 Obecná rovnice a matice kvadriky

Definice 5.1.1 Nechť je v $\mathcal{E}_3$ zvolena báze $\mathcal{B}$. Množina bodů $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}_3$, k níž existuje polynom $F(x,y,z) \in \mathbb{R}[x,y,z]$ druhého stupně tak, že platí

$$X = [x,y,z]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow F(x,y,z) = 0, \tag{5.1}$$

se nazývá *kvadrika v $\mathcal{E}_3$*.

Rovnici $F(x,y,z) = 0$ nazýváme *obecná rovnice kvadriky $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}$*, o polynomu $F(x,y,z)$ říkáme, že *určuje v bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnicí $F(x,y,z) = 0$* kvadriku $\mathcal{K}$. (Užívá též termínu *vzhledem k bázi $\mathcal{B}$*.)

Koeficienty polynomu $F(x,y,z)$ budeme vždy indexovat následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 + 2f_{13}xz + 2f_{23}yz + f_{33}z^2 + \\ +2f_{14}x + 2f_{24}y + 2f_{34}z + f_{44}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

[1]Užívá se též názvu *kvadratická plocha* či *plocha 2. stupně*.

jeho kvadratickou část budeme značit φ – tj.

$$\varphi(x, y, z) = f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 + 2f_{13}xz + 2f_{23}yz + f_{33}z^2, \tag{5.3}$$

přičemž alespoň jeden z koeficientů $f_{11}, f_{12}, f_{22}, f_{13}, f_{23}, f_{33}$ není nula.

Pro proměnné polynomu φ budeme ovšem užívat i jiné označení – např. u_1, u_2, u_3.

Příklady kvadrik jsou tedy množiny dané v jisté bázi obecnými rovnicemi $x^2 + yz = 0$ či $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$, a podobně.
Kvadrikou je ovšem i rovina (obecnou rovnicí $x^2 = 0$ je dána rovina $x = 0$ a přímka (obecnou rovnicí $x^2 + y^2 = 0$ je dána osa z) či bod (např. obecnou rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ je dán bod – počátek příslušné soustavy souřadné).

Stejně jako při studiu kuželoseček budeme i zde využívat maticového tvaru polynomu určujícího příslušnou kvadriku a maticového tvaru jeho kvadratické části.
Pomocí koeficientů polynomu $F(x, y, z)$ (při označení (5.2)) zkonstruujeme *symetrické matice* $\mathbf{F} = (f_{i,j})_{4\times 4}$ a $\mathbf{F}_0 = (f_{i,j})_{3\times 3}$:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

kde $f_{ij} = f_{ji}$, $1 \leq i, j \leq 4$.
Matice $\mathbf{F}_0$ musí být zřejmě nenulová, tj. $h(\mathbf{F}_0) \geq 1$ (proč?).
Opět bychom se mohli snadno přesvědčit, že polynom F i jeho kvadratickou část φ jde psát následujícím způsobem:

$$F(x, y, z) = (x, y, z, 1) \cdot \mathbf{F} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, u_3) \cdot \mathbf{F}_0 \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

což využijeme k *maticovému zápisu* obecné rovnice.

Definice 5.1.2 Buď $\mathcal{K}$ kvadrika, $\mathcal{B}$ báze prostoru $\mathcal{E}_3$ a nechť $F(x, y, z)$ je libovolný polynom 2. stupně určující v bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnicí $F(x, y, z) = 0$ kvadriku $\mathcal{K}$. Zaveďme následující pojmy:

- matice $\mathbf{F}$, resp. $\mathbf{F}_0$, sestrojená výše, se nazývá *velká matice*, resp. *malá matice, kvadriky* $\mathcal{K}$ *v bázi* $\mathcal{B}$,
- číslo $R = h(\mathbf{F})$, resp. $r = h(\mathbf{F}_0)$, se nazývá *velká hodnost*, resp. *malá hodnost, kvadriky* $\mathcal{K}$ *v bázi* $\mathcal{B}$,
- číslo $\Delta = \det \mathbf{F}$, resp. $\delta = \det \mathbf{F}_0$, se nazývá *velký diskriminant*, resp. *malý diskriminant, kvadriky* $\mathcal{K}$ *v bázi* $\mathcal{B}$.

Určení kvadriky maticí či obecnou rovnicí v dané bázi je pochopitelně zcela rovnocenné.

Naskýtá se (tak jako u kuželoseček) přirozená otázka, zda má kvadrika nad danou bází jediné vyjádření (tj. jedinou rovnici či jedinou matici). Zřejmě nikoli – obecné rovnice $F(x, y, z) = 0$ i $cF(x, y, z) = 0$ určují pro všechna $c \neq 0$ tutéž kvadriku – platí tedy následující věta:

Věta 5.1.3 *Buďte* $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{E}_3$ *kvadriky určené nad bází* $\mathcal{B}$ *po řadě maticemi* $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$. *Jestliže platí* $\mathbf{F}_2 = c\mathbf{F}_1$, $c \neq 0$, *pak* $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$.

Věta obrácená (stejně jako v případě kuželoseček) obecně neplatí – obecné rovnice $x^2 + y^2 = 0$ i $2x^2 + y^2 = 0$ určují (v dané bázi) tutéž kvadriku (jakou?) a přitom nejsou úměrné.

Ukážeme ovšem, že pro řadu kvadrik lze tuto větu obrátit (*Věta 5.3.1 o jednoznačnosti*) a tyto tedy v dané bázi budou sice určeny nekonečně mnoha maticemi (obecnými rovnicemi), které však budou (po dvou) úměrné, čímž se jejich studium značně zjednoduší.

Poznámka 5.1.4 Je zřejmé, že **vlastnosti kvadriky** lze zkoumat prostřednictvím právě těch vlastností její matice, které jsou **společné** pro všechny matice této kvadriky – tj.

1. nezávisí na výběru báze, ve které je matice dána,
2. nezávisí na výběru matice, která v této bázi určuje danou kvadriku.

Těmto vlastnostem říkáme *geometrické vlastnosti*.[2]

5.1.2 Obecná rovnice při transformaci soustavy souřadné

Nechť kvadrika $\mathcal{K}$ je dána v bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnicí $F(x, y, z) = 0$. Ukážeme, že i v libovolné jiné bázi $\mathcal{B}'$ existuje polynom F' 2. stupně, který obecnou rovnicí $F'(x', y', z') = 0$ určuje plochu $\mathcal{K}$ a rovněž ukážeme jeho konstrukci.

[2] Někdy se též užívá pojmu *invariant kvadriky*.

Řešení této otázky je zcela analogické jako v případě kuželoseček. Analogicky případu kuželoseček bychom dokázali následující tvrzení.

Věta 5.1.5 *Buďte $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ báze $\mathcal{E}_3$, $\mathbf{P}$ matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$. Nechť kvadrika $\mathcal{K}$ je v bázi $\mathcal{B}$ určena maticí $\mathbf{F}$. Pak matice $\mathbf{F}'$, pro niž platí*

$$\mathbf{F}' = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^T,$$

určuje kvadriku $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}'$.
Přitom pro malou matici platí:

$$h(\mathbf{F}'_0) \neq 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{F}'_0 = \mathbf{P}_0\mathbf{F}_0\mathbf{P}_0^T.$$

Podobně jako u kuželoseček řekneme o polynomu $F'(x', y', z')$, že *vznikl z polynomu $F(x, y, z)$ transformací soustavy souřadné*. Totéž řekneme o matici $\mathbf{F}'$, resp. o polynomu $\varphi'(x', y', z')$ a matici $\mathbf{F}'_0$.

Polynom $F'(x', y', z')$ bychom mohli pochopitelně získat též přímým dosazením za x, y, z do $F(x, y, z)$ z příslušných transformačních rovnic.

Provedením transformace soustavy souřadné tedy z polynomu 2. stupně vznikne opět polynom 2. stupně – daná množina je kvadrikou *nezávisle* na volbě báze (definice 5.1.1 je v tomto smyslu korektní).

Protože matice $\mathbf{F}_0$ se transformuje stejně, jako matice bilineární formy na zaměření $\mathbf{V}$, je předpisem

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} : \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)_{\mathcal{B}_0} \wedge \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathcal{B}_0} \Rightarrow \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1 u_2, u_3)\mathbf{F}_0 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

korektně[3] definována bilineární forma Φ, která je polární bilineární formou kvadratické formy Φ_2 dané vztahem

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} : \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)_{\mathcal{B}_0} \Rightarrow \Phi_2(\mathbf{u}) = (u_1 u_2, u_3)\mathbf{F}_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Analytickým vyjádřením kvadratické formy Φ_2 je kvadratická část polynomu $F(x, y, z)$ (5.3):

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)_{\mathcal{B}_0} \Rightarrow \Phi_2(\mathbf{u}) = \varphi(u_1, u_2, u_3) =$$
$$= f_{11}u_1^2 + 2f_{12}u_1u_2 + f_{22}u_2^2 + 2f_{13}u_1u_3 + 2f_{23}u_2u_3 + f_{33}u_3^2,$$

Výše uvedené formuluje následující definice:

[3] Tj. nezávisle na volbě báze $\mathcal{B}_0$.

Definice 5.1.6 Buď $\mathbf{F}$ matice kvadriky $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}$. Pak kvadratická forma Φ_2 na $\mathbf{V}$ určená v bázi $\mathcal{B}_0$ maticí $\mathbf{F}_0$ se nazývá *kvadratická forma kvadriky* $\mathcal{K}$, její polární bilineární forma Φ se nazývá *polární bilineární forma kvadriky* $\mathcal{K}$.

Podobně jako v případě kuželoseček lze odvodit, že kromě formy Φ jsou i všechny $c\Phi$, $c \neq 0$, polárními bilineárními formami téže kvadriky $\mathcal{K}$. A nemůžeme apriorně vyloučit existenci formy Ψ, která není násobkem formy Φ.

Důsledek pro studium vlastností kvadrik zní:

Poznámka 5.1.7 Vlastnosti kvadriky lze zkoumat prostřednictvím právě těch vlastností její polární bilineární či kvadratické formy, které jsou **společné** pro všechny formy této kvadriky (vyjadřují tzv. *geometrické vlastnosti*).

5.1.3 Invarianty transformace soustavy souřadné

Pojem invariantu afinní, resp. ortogonální, transformace soustavy souřadné byl objasněn v podkapitole 4.1 předešlé kapitoly.

Nechť $\mathcal{K}$ je kvadrika daná v bázi $\mathcal{B}$ maticí $\mathbf{F}$. Zvolíme-li další bázi $\mathcal{B}'$, pak matice $\mathbf{F}'$ vzniklá z $\mathbf{F}$ určuje $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}'$. Vzhledem k platnosti věty 5.1.5 se následující věta dokáže stejně, jako pro případ kuželosečky.

Věta 5.1.8 *Velký a malý diskriminant jsou invarianty libovolné ortogonální transformace soustavy souřadné. Znaménko velkého a malého diskriminantu je invariant libovolné afinní transformace soustavy souřadné.*

Velká a malá hodnost jsou invarianty libovolné afinní transformace soustavy souřadné.

Poznámka 5.1.9 Podobně jako u kuželoseček však odtud bezprostředně neplyne, že jde o geometrické vlastnosti kvadriky.
Např. z toho, že že $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2 = c\mathbf{F}_1$ $(c \neq 0)$ jsou matice téže kvadriky a tedy $\delta_2 = c^3\delta_1$, vidíme, že pro klasifikaci kvadrik lze využít nejvýše nulovosti či nenulovosti δ (Na rozdíl od velkého diskriminantu $(\Delta_2 = c^4\Delta_1)$, kde půjde využít i jeho znaménka.)[4]

Užitím vět 2.1.9, 5.1.5 a věty 3.1.5 okamžitě plyne (analogicky jako v případě kuželoseček) platnost následující věty.

Věta 5.1.10 *Charakteristická rovnice malé matice kvadriky je invariantem ortogonální transformace soustavy souřadné.*

[4] Srovnejte s poznámkou 4.1.9.

Pro klasifikaci kvadrik bude užitečné zkoumat signaturu kvadratické formy kvadriky.

Je zřejmé (viz zavedení signatury v podkapitole 3.4), že je-li (p, q) signatura kvadratické formy Φ_2, má forma $c\Phi_2$ signaturu buď (p, q) – pro $c > 0$, nebo (q, p) – pro $c < 0$. Proto pojem *signatura kvadriky* zavádíme následovně:

Definice 5.1.11 Buď $\mathcal{K}$ kvadrika. Nechť Φ_2 je její libovolná kvadratická forma, (p, q) signatura této formy. Pak neuspořádanou dvojici $\{p, q\}$ nazýváme *signatura kvadriky*.

Poznámka 5.1.12 Signaturu kvadriky $\mathcal{K}$ zavádíme jako neuspořádanou dvojici, proto je táž pro všechny nenulové násobky její kvadratické formy Φ_2. Je-li $\{p, q\}$ signaturou, značí to, že v bázi polární vzhledem k uvažované formě kvadriky $\mathcal{K}$ je na diagonále příslušné malé matice p prvků jednoho znaménka a q prvků znaménka opačného.

Vzniká otázka, pro které kvadriky bude signatura jejich geometrickou vlastností.

Z věty 3.4.13 okamžitě obdržíme:

Věta 5.1.13 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika,* $\mathbf{F}$ *některá její matice v libovolné bázi $\mathcal{B}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nechť jsou vlastní čísla*[5] *matice* $\mathbf{F}_0$. *Pak pro signaturu $\{p, q\}$ kvadriky $\mathcal{K}$ platí, že p udává počet nenulových vlastních čísel jednoho znaménka a q počet nenulových vlastních čísel opačného znaménka.*

Zřejmě pro každou kvadriku přicházejí v úvahu následující signatury:[6]

$\{3, 0\},\ \{2, 1\}$ (pro $r = 3$)

$\{2, 0\},\ \{1, 1\}$ (pro $r = 2$)

$\{1, 0\}$ (pro $r = 1$)

V případě $r = 2$ nebo $r = 3$ je signatura určena tím, zda nenulová vlastní čísla malé matice kvadriky jsou *téhož* či *různého* znaménka.
Užívat tedy budeme následující věty bezprostředně plynoucí z věty 5.1.13.

Věta 5.1.14 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika daná v libovolné bázi maticí* $\mathbf{F}$ *a nechť* $\mathbf{F}'$ *je matice vzniklá z* $\mathbf{F}$ *přechodem k některé další bázi. Pak platí, že nenulová vlastní čísla matice* $\mathbf{F}_0$ *mají stejné znaménko, právě když nenulová vlastní čísla matice* $\mathbf{F}'_0$ *mají rovněž stejné znaménko.*

(Dostáváme další invariant libovolné transformace soustavy souřadné.)

[5] Každé je uvedeno tolikrát, kolikanásobným je kořenem charakteristické rovnice.
[6] r značí malou hodnost.

5.2 Rozbor obecné rovnice. Definice jednotlivých kvadrik

5.2.1 Rozbor obecné rovnice

Nyní vyšetříme, které množiny bodů prostoru $\mathcal{E}_3$ jsou kvadrikami. Postup bude analogický postupu v podkapitole 4.2.

Nechť kvadrika $\mathcal{K}$ je v bázi $\mathcal{B} = \langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ dána maticí $\mathbf{F}$[7] a ekvivalentně obecnou rovnicí

$$\begin{aligned} f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 + 2f_{13}xz + 2f_{23}yz + f_{33}z^2 + \\ +2f_{14}x + 2f_{24}y + 2f_{34}z + f_{44} = 0, \end{aligned} \tag{5.7}$$

kde $\{f_{11}, f_{12}, f_{22}, f_{13}, f_{23}, f_{33}\} \neq \{0\}$, tj. $h(\mathbf{F}_0) \neq 0$.
Lze předpokládat, že $\mathcal{B}$ je kartézská (jinak bychom provedli vhodnou transformaci soustavy souřadné).

Nejprve najděme bázi, v níž bude malá matice diagonální. To ovšem znamená nalézt bázi $\mathcal{B}'_0 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ zaměření $\mathbf{V}$ *polární* vzhledem ke kvadratické formě Φ_2 uvažované kvadriky. Z důvodů zmíněných v podkapitole 4.2.1 požadujeme dále *ortonormalitu* této báze. To ovšem znamená, že vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ musí určovat navzájem kolmé *hlavní směry* formy Φ_2 (viz věta 3.4.6).

Souřadnice hledaných vektorů (tj. aritmetický vektor z $\mathbb{R}^3$) budou vlastními vektory matice $\mathbf{F}_0$ (věta 3.4.3).
Vlastní čísla[8] $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ matice $\mathbf{F}_0$ obdržíme řešením charakteristické rovnice

$$\det(\mathbf{F}_0 - \lambda\mathbf{E}) = 0. \tag{5.8}$$

Je otázkou, kolik ortonormálních trojic vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ (tj. hledaných polárních ortonormálních bází zaměření $\mathbf{V}$) nalezneme.

Buď $\mathcal{B}'_0 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ jedna z těchto bází, jejíž existenci nám zaručuje věta 3.4.7, a hledejme další báze požadovaných vlastností.
Matice $\mathbf{F}'_0$ formy Φ_2 v bázi $\mathcal{B}'_0$ má dle věty 3.4.9 tvar

$$\mathbf{F}'_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Souřadnice vektorů každé báze požadovaných vlastností musí (jak již bylo uvedeno) být vlastními vektory matice formy Φ_2 v (libovolné) ortonormální bázi – tj. i matice $\mathbf{F}'_0$.
Matice soustavy rovnic (3.2) pro vlastní vektory matice zní:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

[7] Symboly Δ, δ, R, r apod. budou vztaženy k této matici.
[8] Všechna jsou reálná – viz věta 3.1.6.

kde za λ dosazujeme jednotlivá vlastní čísla matice $\mathbf{F}_0'$. Avšak množiny vlastních čísel matic $\mathbf{F}_0$ a $\mathbf{F}_0'$ jsou totožné, neboť obě báze jsou ortonormální (viz věta 5.1.10). Z tohoto důvodu rovněž platí (věta 5.1.8):

$$\delta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \tag{5.11}$$

Rozlišme nyní následující tři případy:

(a) Vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou navzájem různá.
Matice (5.10) soustavy má pro libovolné vlastní číslo hodnost 2 a tudíž každému z vlastních čísel odpovídá *jediný* hlavní směr (proč?).
Konkrétně pro $\lambda = \lambda_1$ je matice (5.10) ekvivalentní matici

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda_1 \end{pmatrix}$$

a příslušným hlavním směrem je směr $[(1,0,0)_{\mathcal{B}_0'}]$ – tedy směr $\mathbf{a}_1$.
Podobně pro $\lambda = \lambda_2$ je to směr $[(0,1,0)_{\mathcal{B}_0'}] = [\mathbf{a}_2]$ a konečně pro $\lambda = \lambda_3$ jde o směr $[(0,0,1)_{\mathcal{B}_0'}] = [\mathbf{a}_3]$.
Zjistili jsme, že v tomto případě existuje *jediná* trojice (a to ortogonální[9]) hlavních směrů formy Φ_2 a tedy (až na orientaci a pořadí vektorů) *jediná* ortonormální báze $\mathbf{V}$ polární vzhledem k Φ_2 – báze $\mathcal{B}_0'$.

(b) Dvě z vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou si rovna a třetí je od nich různé – např. nechť $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$.
Matice (5.10) $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ekvivalentní matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (\lambda_3 - \lambda_1) \end{pmatrix},$$

tudíž má hodnost 1 a hlavní směry odpovídající tomuto vlastnímu číslu vyplňují *dvojrozměrný podprostor* v zaměření $\mathbf{V}$ o bázi

$$\left\langle (1,0,0)_{\mathcal{B}_0'}, (0,1,0)_{\mathcal{B}_0'} \right\rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle .$$

Pro $\lambda = \lambda_3$ je matice (5.10) ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_3 & 0 \end{pmatrix},$$

hlavní směr příslušný tomuto vlastnímu číslu je *jediný* – a to směr $[(0,0,1)_{\mathcal{B}_0'}] = [\mathbf{a}_3]$.
V tomto případě existuje *nekonečně mnoho* trojic ortogonálních hlavních směrů formy Φ_2, přičemž všechny mají jeden směr společný (odpovídající jednoduchému kořenu rovnice (5.8)). *Každá* ortonormální báze, *jejíž jeden vektor* určuje tento „vybraný“ směr, je tudíž hledanou ortonormální bází $\mathbf{V}$ polární vzhledem k Φ_2.

[9] Srv. věta 3.4.8.

(c) Všechna vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou si rovna.
Matice (5.10) je pak nulová a tedy *každý* směr je hlavním směrem formy Φ_2, a proto *libovolná ortonormální* báze zaměření $\mathbf{V}$ je hledanou ortonormální bází polární vzhledem k Φ_2.

Zaveďme následující způsob očíslování vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (s přihlédnutím k (5.11)):

- $\delta \neq 0$ a signatura $\mathcal{K}$ je $\{3, 0\} \Rightarrow$ očíslování je libovolné,
- $\delta \neq 0$ a signatura $\mathcal{K}$ je $\{2, 1\} \;\Rightarrow\; \mathrm{sgn}\lambda_1 = \mathrm{sgn}\lambda_2 = -\mathrm{sgn}\lambda_3$,
- $\delta = 0$ a $r = 2$ (tj. jediné je nulové) $\Rightarrow\; \lambda_3 = 0$,
- $\delta = 0$ a $r = 1$ (tj. jediné je nenulové) $\Rightarrow\; \lambda_2 \neq 0$.

Nyní přejděme k soustavě souřadné určené kartézskou bází $\mathcal{B}' = \langle P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$, kde $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})_{\mathcal{B}_0}$ (pro $i = 1, 2, 3$) tvoří trojici vektorů nalezenou výše – směr $[\mathbf{a}_i]$ je hlavním směrem příslušným λ_i, $i = 1, 2, 3$. Geometrický význam směrů vyplyne dále.
Rovnice pro transformaci souřadnic od afinní báze $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$ zní

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' \\ y &= a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z' \,. \\ z &= a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' \end{aligned} \tag{5.12}$$

malá matice $\mathbf{F}'_0$ plochy $\mathcal{K}$ má v $\mathcal{B}'$ tvar (5.9), její velká matice $\mathbf{F}'$ tudíž zní

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & f'_{14} \\ 0 & \lambda_2 & 0 & f'_{24} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & f'_{34} \\ f'_{14} & f'_{24} & f'_{34} & f'_{44} \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

a obecná rovnice $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}'$ má tvar

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2f'_{14}x' + 2f'_{24}y' + 2f'_{34}z' + f'_{44} = 0. \tag{5.14}$$

Samozřejmě v tomto kroku (i všech následujících) lze matici $\mathbf{F}'$ získat i přímým výpočtem (užitím (5.12) či jako součin $\mathbf{PFP}^T$).

Tím získáme vztahy i pro koeficienty $f'_{14}, f'_{24}, f'_{34}$ a f'_{44},[10] což budeme provádět při řešení konkrétních úloh.

Další postup spočívá v úpravě na tzv. úplné čtverce, čili změně počátku soustavu souřadné.

Rozlišíme nyní jednotlivé případy dle nulovosti vlastních čísel. Počet nenulových vlastních čísel určuje hodnost matice $\mathbf{F}'_0$, to je však hodnost r malé matice $\mathbf{F}_0$ (proč?).

[10] Např. $f'_{44} = f_{44}$ (analogicky vztahu pro f'_{33} v podkapitole 4.2).

I. $r = 3$ (tj. $\delta \neq 0, \lambda_i \neq 0, 1 \leq i \leq 3$).
Rovnici (5.14) lze upravit na tvar

$$\lambda_1(x' - s_1')^2 + \lambda_2(y' - s_2')^2 + \lambda_3(z' - s_3')^2 + f_{44}'' = 0,$$

kde $s_i' = -\frac{f_{i4}'}{\lambda_i}, \leq i \leq 3$.
Označme $S = [s_1', s_2', s_3']_{\mathcal{B}'}$ a uvažujme bázi $\mathcal{B}'' = \langle S, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$. Transformační rovnice pro přechod od $\mathcal{B}'$ k $\mathcal{B}''$ zní:[11]

$$\begin{aligned} x' &= x'' + s_1' \\ y' &= y'' + s_2' \\ z' &= z'' + s_3'. \end{aligned}$$

Obecnou rovnici lze tedy v bázi $\mathcal{B}''$ psát

$$\lambda_1 {x''}^2 + \lambda_2 {y''}^2 + \lambda_3 {z''}^2 + f_{44}'' = 0.$$

Nyní (zcela analogicky jako v případě kuželoseček) spočteme f_{44}''.
Matice kvadriky $\mathcal{K}$ v $\mathcal{B}''$ má tvar:

$$\mathbf{F}'' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{44}'' \end{pmatrix},$$

její velký diskriminant $\Delta'' = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)f_{44}'' = \delta f_{44}''$ (viz (5.11)). Protože báze $\mathcal{B}'$ i $\mathcal{B}''$ je kartézská, plyne odtud $\Delta = \Delta''$, kde Δ je velký diskriminant v bázi $\mathcal{B}$ (věta 5.1.8). Proto $f_{44}'' = \frac{\Delta}{\delta}$ a obecná rovnice v bázi $\mathcal{B}''$ nabývá tvaru

$$\lambda_1 {x''}^2 + \lambda_2 {y''}^2 + \lambda_3 {z''}^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{5.15}$$

Je patrno, že v případě $\mathcal{K} \neq \emptyset$ je bod S středem souměrnosti kvadriky $\mathcal{K}$ a roviny $\rho_1 = \{S, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, $\rho_2 = \{S, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ a $\rho_3 = \{S, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ jejími rovinami souměrnosti.[12] Existenci dalších středů, resp. rovin, souměrnosti vyšetříme později.

Rovněž je patrno, že přímky $o_i = \{S, \mathbf{a}_i\}$, $1 \leq i \leq 3$, jsou osami souměrnosti této kvadriky (proč?).

Dle nulovosti Δ (v závislosti na velké hodnosti R) dostáváme dva případy – $\Delta \neq 0$ ($R = 4$) a $\Delta = 0$ ($R \leq 3$), z nichž každý dále rozdělíme dle toho, zda nenulová vlastní čísla mají znaménka stejná (tj. signatura $\{3, 0\}$), nebo různá (tj. signatura $\{2, 1\}$), popřípadě dle znaménka Δ.

[11] Později ukážeme obecný způsob výpočtu souřadnic bodu S vzhledem k výchozí bázi.
[12] Zdůvodnění tohoto faktu je analogické úvahám provedeným pro střed a osy souměrnosti kuželosečky v podkapitole 4.2.

I.1. $\Delta = 0$ – tj. $R = 3$ (neboť $r = 3$ a vždy $R \geq r$)
Rovnice (5.15) se redukuje na tvar

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 = 0. \tag{5.16}$$

I.1.1. $\mathrm{sgn}\lambda_1 = \mathrm{sgn}\lambda_2 = -\mathrm{sgn}\lambda_3$
Rovnici (5.16) lze tedy psát

$$|\lambda_1| x''^2 + |\lambda_2|''^2 - |\lambda_3| z''^2 = 0,$$

což lze upravit na tvar

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 0, \tag{5.17}$$

$$\text{kde } \ a = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}},\ b = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}},\ c = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_3|}}$$

jsou kladná reálná čísla.

I.1.2. $\mathrm{sgn}\lambda_1 = \mathrm{sgn}\lambda_2 = \mathrm{sgn}\lambda_3$
Nyní lze rovnici (5.16) psát

$$|\lambda_1| x''^2 + |\lambda_2| y''^2 + |\lambda_3| z''^2 = 0,$$

jejím řešením je jediný bod – $[0,0,0]_{\mathcal{B}''}$ – tj. bod S.
Tím je případ I.1. vyčerpán.

I.2. $\Delta \neq 0$ – tj. $R = 4$
Rovnici (5.15) lze vydělením $-\frac{\Delta}{\delta}$ upravit na tvar

$$\frac{x''^2}{\left(-\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}\right)} + \frac{y''^2}{\left(-\frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}\right)} + \frac{z''^2}{\left(-\frac{\Delta}{\lambda_3 \delta}\right)} = 1. \tag{5.18}$$

Znaménka jednotlivých jmenovatelů určíme dle znamének vlastních čísel a znaménka Δ. Použijeme zřejmého vztahu

$$-\frac{\Delta}{\lambda_i \delta} = -\frac{\Delta}{\lambda_i^2 \lambda_j \lambda_k}, \text{ kde } \{i,j,k\} = \{1,2,3\}. \tag{5.19}$$

I.2.1. $\mathrm{sgn}\lambda_1 = \mathrm{sgn}\lambda_2 = \mathrm{sgn}\lambda_3 \ \wedge \ \Delta < 0$
V tomto případě (dle (5.19)) platí $-\frac{\Delta}{\lambda_i \delta} > 0$, $1 \leq i \leq 3$, a obecnou rovnici (5.18) lze tedy psát ve tvaru

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1, \tag{5.20}$$

$$\text{kde } \ a = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}},\ b = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}},\ c = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_3 \delta}},$$

přičemž $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.
Množina $\mathcal{K}$ je neprázdná (ověřte). Všimněte si, že např. $a = b \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

I.2.2. $\text{sgn}\lambda_1 = \text{sgn}\lambda_2 = \text{sgn}\lambda_3 \ \wedge \ \Delta > 0$
V souladu s (5.19) jsou jmenovatelé zlomků v rovnici (5.18) záporná čísla a tedy množina $\mathcal{K} = \emptyset$ (proč?).

I.2.3. $\text{sgn}\lambda_1 = \text{sgn}\lambda_2 = -\text{sgn}\lambda_3 \ \wedge \ \Delta < 0$
Výraz (5.19) je pro $i = 1, 2$ záporný, pro $i = 3$ kladný.
Položíme-li

$$a = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}}, \ b = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}}, \ c = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_3 \delta}},$$

lze rovnici (5.18) psát ve tvaru

$$-\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1, \tag{5.21}$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

I.2.4. $\text{sgn}\lambda_1 = \text{sgn}\lambda_2 = -\text{sgn}\lambda_3 \ \wedge \ \Delta > 0$
Nyní je výraz (5.19) je pro $i = 1, 2$ kladný a pro $i = 3$ záporný.
Položíme-li

$$a = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}}, \ b = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}}, \ c = \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_3 \delta}},$$

lze rovnici (5.18) psát ve tvaru

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1, \tag{5.22}$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

Případ I. je tedy vyřešen.

II. $r = 2$ (tj. $\delta = 0, \lambda_i \neq 0, 1 \leq i \leq 2, \lambda_3 = 0$).[13]
Rovnice (5.14) zní

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2f'_{14}x' + 2f'_{24}y' + 2f'_{34}z' + f'_{44} = 0, \tag{5.23}$$

matice $\mathbf{F}'$ v bázi $\mathcal{B}' = \langle P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ nabývá tvaru

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & f'_{14} \\ 0 & \lambda_2 & 0 & f'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & f'_{34} \\ f'_{14} & f'_{24} & f'_{34} & f'_{44} \end{pmatrix}.$$

[13] Dle dohody o očíslování vlastních čísel.

Pro velký diskriminant Δ' v bázi $\mathcal{B}'$ ovšem platí $\Delta' = \Delta$ (proč?), a tedy

$$\Delta = -f_{34}'^2 \lambda_1 \lambda_2. \tag{5.24}$$

II.1 $\Delta \neq 0$ – tj. $R = 4$ (tedy $f_{34}' \neq 0$ – viz (5.24)).
Rovnici (5.23) lze upravit na tvar:

$$\lambda_1 (x' - v_1')^2 + \lambda_2 (y' - v_2')^2 + 2 f_{34}' (z' - v_3') = 0,$$

kde $v_1' = -\frac{f_{14}'}{\lambda_1}$, $v_2' = -\frac{f_{24}'}{\lambda_2}$ a v_3' zvolíme tak, aby bod $V = [v_1', v_2', v_3']_{\mathcal{B}'}$ ležel na $\mathcal{K}$, což vzhledem k (5.23) nastane právě, když

$$v_3' = -\frac{1}{2f_{34}'}(\lambda_1 v_1'^2 + \lambda_2 v_2'^2 + 2f_{14}' v_1' + 2f_{24}' v_2' + f_{44}').$$

Uvažme bázi $\mathcal{B}'' = \langle V, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$. Transformační rovnice pro přechod od $\mathcal{B}'$ k $\mathcal{B}''$ zní:

$$\begin{aligned} x' &= x'' + v_1' \\ y' &= y'' + v_2' \,. \\ z' &= z'' + v_3' \end{aligned}$$

Obecná rovnice plochy $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}''$ zní:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2 f_{34}' z'' = 0, \tag{5.25}$$

což lze dále upravit na tvar

$$\frac{x''^2}{-\frac{f_{34}'}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{-\frac{f_{34}'}{\lambda_2}} = 2z''. \tag{5.26}$$

Ze vztahu (5.24) snadno odvodíme:

$$\left|\frac{f_{34}'}{\lambda_1}\right| = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1^3 \lambda_2}}, \qquad \left|\frac{f_{34}'}{\lambda_2}\right| = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2^3}}.$$

Předpokládejme nyní, že $\operatorname{sgn} f_{34}' = -\operatorname{sgn} \lambda_1$ (v opačném případě bychom změnili orientaci osy z''[14]). Pak $\left|\frac{f_{34}'}{\lambda_1}\right| = \left(-\frac{f_{34}'}{\lambda_1}\right)$.
Zaveďme kladná reálná čísla p, q vztahy

$$p = -\frac{f_{34}'}{\lambda_1}, \quad q = \left|\frac{f_{34}'}{\lambda_2}\right|, \quad \text{neboli}$$

$$p = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1^3 \lambda_2}}, \quad q = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2^3}}. \tag{5.27}$$

[14] Tj. od $\mathcal{B}'' = \langle V, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ bychom přešli k $\overline{\mathcal{B}}'' = \langle V, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, -\mathbf{a}_3 \rangle$, rovnice transformace souřadnic by zněly $\{x'' = \bar{x}'', y'' = \bar{y}'', z'' = -\bar{z}''\}$ a rovnice $\mathcal{K}$ (dle (5.25)): $\lambda_1 \bar{x}''^2 + \lambda_2 \bar{y}''^2 + 2\bar{f}_{34}' \bar{z}'' = 0$, přičemž $\bar{f}_{34}' = -f_{34}'$ (proč?).

Ze vztahu (5.24) dále plyne, že $\mathrm{sgn}\Delta = -\mathrm{sgn}(\lambda_1\lambda_2)$, diskutujme tedy dva případy dle $\mathrm{sgn}\Delta$.

II.1.1.$\Delta < 0$ ($\mathrm{sgn}\lambda_1 = \mathrm{sgn}\lambda_2$)
tj. $q = \left|\frac{f'_{34}}{\lambda_2}\right| = \left(-\frac{f'_{34}}{\lambda_2}\right)$ a rovnici (5.26) lze přepsat:

$$\frac{x''^2}{p} + \frac{y''^2}{q} = 2z'', \tag{5.28}$$

kde pro $p, q \in \mathbb{R}^+$ platí (5.27).

II.1.2.$\Delta > 0$ ($\mathrm{sgn}\lambda_1 = -\mathrm{sgn}\lambda_2$)
tj. $q = \left|\frac{f'_{34}}{\lambda_2}\right| = \frac{f'_{34}}{\lambda_2}$ a rovnici (5.26) lze vyjádřit:

$$\frac{x''^2}{p} - \frac{y''^2}{q} = 2z'', \tag{5.29}$$

kde pro $p, q \in \mathbb{R}^+$ platí opět (5.27).

II.2 $\Delta = 0$ – tj. $R \leq 3$ (tj. $f'_{34} = 0$ – viz (5.24)).
Rovnici (5.23) lze upravit na tvar:

$$\lambda_1(x' - s'_1)^2 + \lambda_2(y' - s'_2)^2 + f'_{44} = 0,$$

kde $s'_1 = -\frac{f'_{14}}{\lambda_1}$, $s'_2 = -\frac{f'_{24}}{\lambda_2}$.
Položme $S = [s'_1, s'_2, 0]_{\mathcal{B}'}$ a uvažme bázi $\mathcal{B}'' = \langle S, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\rangle$. Transformační rovnice pro přechod od $\mathcal{B}'$ k $\mathcal{B}''$ zní:

$$\begin{aligned} x' &= x'' + s'_1 \\ y' &= y'' + s'_2\,. \\ z' &= z'' \end{aligned}$$

Obecná rovnice plochy $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}''$ má tvar:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + f'_{44} = 0, \tag{5.30}$$

odkud pro velkou hodnost R plyne:

$$R = 3 \Leftrightarrow f''_{44} \neq 0 \text{ a } R = 2 \Leftrightarrow f''_{44} = 0.$$

Zdůvodnění výsledků v odst. II.2.1 a II.2.2. přenecháváme čtenáři.

II.2.1. $R = 3$
1. $\mathrm{sgn}\lambda_1 = \mathrm{sgn}\lambda_2$. Pak (5.30) je buď vyjádřením prázdné množiny, nebo existují $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a = \sqrt{-\frac{f''_{44}}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\frac{f''_{44}}{\lambda_2}}$ tak, že (5.30) zní:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1. \tag{5.31}$$

2. $\operatorname{sgn}\lambda_1 = -\operatorname{sgn}\lambda_2$. Pak existují $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a = \sqrt{\left|\frac{f''_{44}}{\lambda_1}\right|}$, $b = \sqrt{\left|\frac{f''_{44}}{\lambda_2}\right|}$ tak, že (5.30) má právě jeden z následujících tvarů:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1, \text{ resp. } -\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1. \tag{5.32}$$

II.2.2. $R = 2$

1. $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2$. Pak (5.30) je množinou $\{X = [x'', y'', z'']; x'' = y'' = 0, z \in \mathbb{R}\}$, což je přímka $\{S, \mathbf{a}_3\}$.

2. $\operatorname{sgn}\lambda_1 = -\operatorname{sgn}\lambda_2$. Pak lze (5.30) přepsat do tvaru

$$|\lambda_1| x''^2 - |\lambda_2| y''^2 = 0,$$

což značí, že $\mathcal{K}$ je sjednocením dvou různoběžných rovin α, β protínajících se v přímce $\{S, \mathbf{a}_3\}$.

$$\alpha: \; \sqrt{|\lambda_1|}x'' + \sqrt{|\lambda_2|}y'' = 0,$$

$$\beta: \; \sqrt{|\lambda_1|}x'' - \sqrt{|\lambda_2|}y'' = 0.$$

Povšimněme si, že pro každou neprázdnou plochu zkoumanou v odstavci II. jsou roviny $\rho_1 = \{S, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$, $\rho_2 = \{S, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ jejími rovinami souměrnosti a přímka $o = \{S, \mathbf{a}_3\}$ její osou souměrnosti. Existenci středů souměrnosti vyšetříme později.

III. $r = 1$ (tj. $\delta = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_1 = \lambda_3 = 0$)[15]

Rovnici (5.14) lze psát

$$\lambda_2 y'^2 + 2f'_{14}x' + 2f'_{24}y' + 2f'_{34}z' + f'_{44} = 0, \tag{5.33}$$

a matice $\mathbf{F}'$ v bázi $\mathcal{B}' = \langle P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ zní

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f'_{14} \\ 0 & \lambda_2 & 0 & f'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & f'_{34} \\ f'_{14} & f'_{24} & f'_{34} & f'_{44} \end{pmatrix}. \tag{5.34}$$

Pro velkou hodnost tudíž platí, že $R = 3$, nebo $R \leq 2$.

III.1 $R = 3$

Tento případ nastane, právě když $f'_{14} \neq 0$ nebo $f'_{34} \neq 0$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f'_{34} \neq 0$.

Jak jsme zjistili při diskuzi násobnosti vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (případ (b)), lze za $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ vzít kteroukoli ortonormální dvojici vektorů kolmých na $\mathbf{a}_2$. Využijeme tohoto faktu k nalezení

[15] Dle dohody o očíslování vlastních čísel.

báze, vzhledem k níž by se v obecné rovnici anuloval koeficient na pozici $(3, 4)$.
Od báze $\mathcal{B}' = \langle P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ tedy přejděme k bázi $\overline{\mathcal{B}}' = \langle P, \bar{\mathbf{a}}_1, \mathbf{a}_2, \bar{\mathbf{a}}_3 \rangle$ tak, aby příslušné transformační rovnice zněly:[16]

$$\begin{aligned} x' &= \bar{x}' \cos\alpha \; - \; \bar{z}' \sin\alpha \\ y' &= \bar{y}' \\ z' &= \bar{x}' \sin\alpha \; + \; \bar{z}' \cos\alpha \end{aligned} \quad . \tag{5.35}$$

Snadno se ověří (proveďte), že tato transformace je ortogonální.
Z výše uvedeného plyne, že báze $\overline{\mathcal{B}}'$ je pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ kartézská báze, jejíž vektory určují hlavní směry kvadratické formy Φ_2 uvažované plochy.

Provedením transformace (5.35) zjistíme, že obecná rovnice kvadriky $\mathcal{K}$ bude mít v bázi $\mathcal{B}'$ tvar

$$\lambda_2 \bar{y}'^2 + 2\bar{f}'_{14}\bar{x}' + 2\bar{f}'_{24}\bar{y}' + 2\bar{f}'_{34}\bar{z}' + \bar{f}'_{44} = 0, \text{ kde}$$
$$\bar{f}'_{34} = f'_{34}\cos\alpha - f'_{14}\sin\alpha.$$

Zvolíme-li tudíž $\alpha = \operatorname{arccotg}\frac{f'_{14}}{f'_{34}}$, pak zřejmě $\bar{f}'_{34} = 0$ a obecná rovnice v bázi $\overline{\mathcal{B}}'$ bude znít

$$\lambda_2 \bar{y}'^2 + 2\bar{f}'_{14}\bar{x}' + 2\bar{f}'_{24}\bar{y}' + \bar{f}'_{44} = 0.$$

Protože $R = 3$, je f'_{14} různé od nuly (proč?), a tuto rovnici lze tudíž dále upravit na tvar

$$\lambda_2(\bar{y}' - \bar{v}'_2)^2 + 2\bar{f}'_{14}(\bar{x}' - \bar{v}'_1) = 0.$$

Položme $V = [\bar{v}'_1, \bar{v}'_2, 0]_{\overline{\mathcal{B}}'}$ a uvažujme bázi $\mathcal{B}'' = \langle V, \bar{\mathbf{a}}_1, \mathbf{a}_2, \bar{\mathbf{a}}_3 \rangle$.[17] Zřejmě rovnici plochy $\mathcal{K}$ lze v bázi $\mathcal{B}''$ psát

$$y''^2 - 2px'' = 0. \tag{5.36}$$

Povšimněme si, že rovina $\{V, \bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_3\}$ je rovinou souměrnosti plochy $\mathcal{K}$.

III.2 $R \le 2$

Předpoklad $R \le 2$ značí, že $f'_{14} = f'_{34} = 0$ (viz matici (5.34)).
Rovnice (5.33) se tedy redukuje na tvar

$$\lambda_2 y'^2 + 2f'_{24}y' + f'_{44} = 0,$$

což lze dále upravit

$$\lambda_2(y' - v'_2)^2 + f''_{44} = 0,\text{[18]}$$

neboli

$$y''^2 = q, \tag{5.37}$$

zvolíme-li bázi $\mathcal{B}'' = \langle V, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$, kde $V = [0, v'_2, 0]_{\mathcal{B}'}$.

• $R = 2$

To značí, že $q \neq 0$.

[16] Což je otočení soustavy souřadné kolem osy y' o úhel α.
[17] Jak zní příslušné transformační rovnice?
[18] V případě $f'_{24} = 0$ je přirozeně $v'_2 = 0$ a $f''_{44} = f'_{44}$.

(a) v případě $q > 0$ je $\mathcal{K}$ sjednocením dvou rovnoběžných rovin α, β (se zaměřením $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3]$) o rovnicích

$$\alpha : \ y'' = \sqrt{|q|}, \quad \beta : \ y'' = -\sqrt{|q|}$$

(b) v případě $q < 0$ je $\mathcal{K}$ prázdná množina.

• $R = 1$

Tento případ nastává, právě když $q = 0$, což značí, že $\mathcal{K}$ je rovina $\{V, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ (*dvojnásobná rovina*).

5.2.2 Definice jednotlivých kvadrik

V předešlé části tohoto paragrafu jsme ukázali, že ke každé kvadrice $\mathcal{K}$ existuje jistá kartézská báze ($\mathcal{B}''$), v níž její obecná rovnice je velmi jednoduchého tvaru.
Neexistuje tedy kvadrika, kterou by (v jisté bázi) nebylo možné vyjádřit jednou z takto získaných obecných rovnic.

Definice 5.2.1 Buď $\mathcal{K}$ kvadrika. Pak báze $\mathcal{B}''$ sestrojená výše se nazývá *kanonická báze*[19] *kvadriky* $\mathcal{K}$ a příslušná obecná rovnice v této bázi se nazývá *kanonická rovnice kvadriky* $\mathcal{K}$.

Otázku, do jaké míry je kanonická báze určena danou kvadrikou, řeší zejména důsledky 5.7.4, 5.9.8 a 5.9.9.

Nyní pojmenujeme ty neprázdné kvadriky, které dosud „nemají název“ (tj. kromě roviny, bodu, ap.)
Názvy zavedeme (tak jako u kuželoseček) pomocí tvaru kanonické rovnice.

[19] Příslušná soustava souřadná se nazývá rovněž *kanonická*.

Definice 5.2.2 Kvadrika $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}_3$ se nazývá

- *elipsoid (s poloosami a, b, c)*, jestliže existuje kartézská báze, vzhledem k níž je $\mathcal{K}$ dána obecnou rovnicí
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{kde } a, b, c \in \mathbb{R}^+.$$
V případě rovnosti některé ze dvou poloos se $\mathcal{K}$ nazývá *rotační elipsoid*.
Osy příslušné soustavy souřadné se nazývají *osy elipsoidu*.
V případě $a = b = c$ se $\mathcal{K}$ nazývá *kulová plocha*.
Počátek uvedené báze se nazývá *střed elipsoidu (kulové plochy)*.

- *jednodílný hyperboloid (s poloosami a, b, c)*, jestliže existuje kartézská báze, vzhledem k níž je $\mathcal{K}$ dána obecnou rovnicí
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{kde } a, b, c \in \mathbb{R}^+.$$
V případě $a = b$ $\mathcal{K}$ nazývá *rotační jednodílný hyperboloid*.
Počátek uvedené báze se nazývá *střed hyperboloidu*, třetí ze souřadných os se nazývá *osa hyperboloidu*.

- *dvojdílný hyperboloid (s poloosami a, b, c)*, jestliže existuje kartézská báze, vzhledem k níž je $\mathcal{K}$ dána obecnou rovnicí
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{kde } a, b, c \in \mathbb{R}^+.$$
V případě $a = b$ se $\mathcal{K}$ nazývá *rotační dvojdílný hyperboloid*.
Počátek uvedené báze se nazývá *střed hyperboloidu*, třetí ze souřadných os se nazývá *osa hyperboloidu*.

- *eliptický paraboloid (s parametry p, q)*, jestliže existuje kartézská báze, vzhledem k níž je $\mathcal{K}$ dána obecnou rovnicí
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{kde } p, q \in \mathbb{R}^+.$$
V případě $p = q$ $\mathcal{K}$ nazývá *rotační eliptický paraboloid*.
Počátek uvedené báze se nazývá *vrchol paraboloidu*, třetí ze souřadných os se nazývá *osa paraboloidu*.

- *hyperbolický paraboloid (s parametry p, q)*, jestliže existuje kartézská báze, vzhledem k níž je $\mathcal{K}$ dána obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{kde } p, q \in \mathbb{R}^+.$$

Počátek uvedené báze se nazývá *vrchol paraboloidu*, třetí ze souřadných os se nazývá *osa paraboloidu*.

- *kuželová plocha (s poloosami a, b, c)*, jestliže existuje kartézská báze, vzhledem k níž je $\mathcal{K}$ dána obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad \text{kde } a, b, c \in \mathbb{R}^+.$$

V případě $a = b$ se $\mathcal{K}$ nazývá *rotační kuželová plocha*.
Počátek uvedené báze se nazývá *vrchol kuželové plochy*, třetí ze souřadných os se nazývá *osa kuželové plochy*.

- *eliptická válcová plocha (s poloosami a, b)*, jestliže existuje kartézská báze, vzhledem k níž je $\mathcal{K}$ dána obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{R}^+.$$

V případě $a = b$ se $\mathcal{K}$ nazývá *rotační válcová plocha (o poloměru a)*.
Třetí ze souřadných os se nazývá *osa válcové plochy*.

- *hyperbolická válcová plocha (s poloosami a, b)*, jestliže existuje kartézská báze, vzhledem k níž je $\mathcal{K}$ dána obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Třetí ze souřadných os se nazývá *osa válcové plochy*.

- *parabolická válcová plocha (s parametrem p)*, jestliže existuje kartézská báze, vzhledem k níž je $\mathcal{K}$ dána obecnou rovnicí

$$y^2 - 2px = 0, \quad \text{kde, } p \in \mathbb{R}^+.$$

Konkrétní představu o jednotlivých plochách získáme při studiu tzv. *hlavních řezů kvadrik* v podkapitole 5.6.

Mimo jiné tam ukážeme význam adjektiva *rotační* v názvech některých ploch. Již nyní si však můžeme všimnout, že rovnost dvojice poloos (u elipsoidu, hyperboloidů, kuželové plochy a eliptické válcové plochy), resp. parametrů (u eliptického paraboloidu) je ekvivalentní rovnosti dvojice *vlastních čísel*, pomocí nichž jsou tyto veličiny udány.[20] Jak jsme ukázali v podkapitole 5.2.1, tato rovnost znamená, že za ortogonální hlavní směry (a tedy směry os v kanonické soustavě souřadné) lze považovat *libovolnou ortogonální dvojici* směrů, která je kolmá na směr odpovídající třetímu z vlastních čísel.

Pojem *válcová plocha* již čtenář zná ze syntetické geometrie. Ukažme, že právě uvedené definice jsou v souladu se syntetickým zavedením pojmu válcová plocha.
Buď $\mathcal{K}$ např. eliptická válcová plocha ve smyslu definice 5.2.2. Zřejmě tedy platí (v kanonické bázi $\mathcal{B} = \langle S, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$):

$$\mathcal{K} = \{X = [x, y, z] \in \mathcal{E}_3; \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1,\ z \in \mathbb{R}\}.$$

Rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ však lze považovat za rovnici elipsy $\mathcal{L}$ ležící v rovině $z = 0$, (tj. $\{S, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$). Kvadrika $\mathcal{K}$ je pak zřejmě následujícím sjednocením přímek:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{X \in \mathcal{L}} \{X, \mathbf{a}_3\},$$

což je v souladu se syntetickou definicí válcové plochy ($\mathcal{L}$ je tzv. řídící křivka). Podobně je tomu pro válcovou plochu hyperbolickou a parabolickou.

Předchozí rozbor nám dává možnost, jak poznat (bez provádění transformace soustavy souřadné), o kterou kvadriku jde, což vyjádříme následující větou. Uvedená věta také nachází *pokrytí množiny kvadrik* v $\mathcal{E}_3$ (proč?).

Věta 5.2.3 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika, $\mathcal{B}$ libovolná báze a $\mathbf{F}$ některá matice kvadriky $\mathcal{K}$ v této bázi, R, r, Δ nechť jsou o řadě velká hodnost, malá hodnost a velký diskriminant. Označme Λ množinu nenulových vlastních čísel matice $\mathbf{F}_0$.*[21] *Pak platí:*

- $R = 4 \wedge r = 3 \quad \wedge \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' > 0 \wedge \Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}$ *je elipsoid*
- $R = 4 \wedge r = 3 \quad \wedge \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' > 0 \wedge \Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K} = \emptyset$
- $R = 4 \wedge r = 3 \quad \wedge \quad \exists \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' < 0 \wedge \Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}$ *je jednodílný hyperboloid*
- $R = 4 \wedge r = 3 \quad \wedge \quad \exists \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' < 0 \wedge \Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}$ *je dvojdílný hyperboloid*
- $R = 4 \wedge r = 2 \quad \wedge \quad \Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}$ *je eliptický paraboloid*
- $R = 4 \wedge r = 2 \quad \wedge \quad \Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}$ *je hyperbolický paraboloid*

[20] Např. vztah (5.27) pro parametry eliptického paraboloidu.

[21] Zřejmě platí, že nenulová vlastní čísla matice $\mathbf{F}_0$ mají

- $R = 3 \wedge r = 3 \quad \wedge \quad \exists \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' < 0 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je kuželová plocha*
- $R = 3 \wedge r = 3 \quad \wedge \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' > 0 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je jednobodová množina*
- $R = 3 \wedge r = 2 \quad \wedge \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' > 0 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je eliptická válcová plocha, nebo $\mathcal{K} = \emptyset$*
- $R = 3 \wedge r = 2 \quad \wedge \quad \exists \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' < 0 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je hyperbolická válcová plocha*
- $R = 3 \wedge r = 1 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je parabolická válcová plocha*
- $R = 2 \wedge r = 2 \quad \wedge \quad \exists \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' < 0 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je dvojice různoběžných rovin*
- $R = 2 \wedge r = 2 \quad \wedge \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' > 0 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je přímka*
- $R = 2 \wedge r = 1 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je dvojice rovnoběžných rovin, nebo $\mathcal{K} = \emptyset$*
- $R = 1 \wedge r = 1 \quad \Rightarrow$ *$\mathcal{K}$ je rovina*

V případě

- *eliptického paraboloidu platí:* $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' > 0$,
- *hyperbolického paraboloidu platí:* $\exists \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' < 0$.

Je-li $\mathcal{B}$ kartézskou bází, pak hodnoty poloos elipsoidu, hyperboloidů, kuželové plochy, eliptické a hyperbolické válcové plochy i parametrů paraboloidů a parametru parabolické válcové plochy jsou dány příslušnými vztahy v odstavci 5.2.1.

Důkaz: Věta se dokáže užitím vět 5.1.1 (invariance $R, r, \operatorname{sgn}\Delta$) a 5.1.14 (znaménka vlastních čísel) naprosto analogicky jako věta 4.2.3 v případě kuželoseček. □

Množina kvadrik je tedy tvořena množinou elipsoidů, jednodílných hyperboloidů, dvojdílných hyperboloidů, eliptických paraboloidů, hyperbolických paraboloidů, kuželových ploch, eliptických válcových ploch, hyperbolických válcových ploch, parabolických válcových ploch, jednobodových množin, přímek, dvojic různoběžných rovin, dvojic rovnoběžných rovin a množinou rovin. Kvadrikou je i množina prázdná.

Podobně jako u kuželoseček, vyvstává i zde několik otázek. Jednak je otázkou, zda lze obrátit implikace ve větě 5.2.3, dále je například otázkou, zda hodnoty poloos či parametrů jsou geometrickými vlastnostmi příslušných ploch.

Poznámka 5.2.4 Lze se snadno přesvědčit (z kanonických rovnic získaných rozborem v paragrafu 5.2.1), že všechny neprázdné plochy *vyjma* případů I.1.2. a II.2.2.1. obsahují ale-

- tatáž znaménka, právě když $\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' > 0$,
- různá znaménka, právě když $\exists \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' < 0$.

spoň tři nekolineární body a nejsou tedy přímkou ani jednobodovou množinou.
S ohledem na větu 5.2.3 to znamená, že platí:[22]

- $R = r = 3$ a $\forall\lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' > 0,$ *právě když* $\mathcal{K}$ je jednobodová množina,
- $R = r = 2$ a $\forall\lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' > 0,$ *právě když* $\mathcal{K}$ je přímka.

Příklad obecných rovnic $y^2 + 1 = 0$ a $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ určujících tutéž kvadriku (jakou?), přičemž v prvním případě je $R = 2, r = 1$, ve druhém pak $R = 4, r = 3$ ukazuje, že větu 5.2.3 nelze obecně obrátit.

Opět tedy zůstává otevřenou otázkou, zda daná kvadrika může náležet k více než jedné z uvedených množin kvadrik, neboli mít více názvů (být například současně elipsoidem a kuželovou plochou apod.).

Tak jako u kuželoseček je patrno, že pokud v dané bázi jsou všechny matice určité kvadriky úměrné, je řešení obou problémů nasnadě. Proto se opět budeme zabývat tzv. otázkou jednoznačnosti.

5.3 Věta o jednoznačnosti pro kvadriky

Věta 5.3.1 *(o jednoznačnosti) Určují-li matice* $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ *nad touž bází tutéž kvadriku, která obsahuje alespoň dva body a není přímkou, pak existuje* $c \neq 0$ *tak, že*

$$\mathbf{F}_2 = c\mathbf{F}_1.$$

To znamená, že dvě matice (obecné rovnice) určují v dané bázi tutéž kvadriku, která obsahuje alespoň dva body a není přímkou, právě když jsou úměrné. Je patrno, že pro prázdnou či jednobodovou kvadriku nebo přímku věta o jednoznačnosti neplatí (proč?).

Z věty 5.1.5 snadno plyne (stejně jako pro kuželosečky):

Věta 5.3.2 *Jsou-li všechny matice téže kvadriky nad jistou bází (po dvou) úměrné, jsou úměrné i všechny její matice nad libovolnou bází.*

Proveďme nyní *důkaz* tvrzení o jednoznačnosti:
Důkaz: Vzhledem k větě 5.3.2 je stačí dokázat jen v jisté bázi.

Buď $\mathcal{K}$ kvadrika splňující předpoklady věty.

[22] Pokud by např. $\mathcal{K}$ byla jednobodová množina, přičemž by $R \neq 3$ nebo $r \neq 3$ nebo $\exists\lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' < 0$, pak by dle věty 5.2.3 a předchozí úvahy nemohla být jednobodovou množinou.

I. Nechť $\mathcal{K}$ je dvojicí rovin α, β (vč. splývajících).
Zvolme bázi $\mathcal{B}$ tak, aby α byla rovinou $z = 0$. Nechť $\mathcal{K}$ je v $\mathcal{B}$ dána rovnicí

$$F(x, y, z) = 0. \tag{5.38}$$

Protože bod o souřadnicích $[x, y, 0]$ náleží $\mathcal{K}$ pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$, musí platit:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 + 2f_{14}x + 2f_{24}y + f_{44} = 0.$$

Snadno ukážeme,[23] že toto nastane právě tehdy, když

$$f_{11} = f_{12} = f_{22} = f_{14} = f_{24} = f_{44} = 0.$$

Obecnou rovnici (5.38) plochy $\mathcal{K}$ lze tedy zapsat:

$$z \cdot (2f_{13}x + 2f_{23}y + f_{33}z + 2f_{34}) = 0.$$

Protože však $\mathcal{K} = \alpha \cup \beta$, plyne odtud bezprostředně, že

$$2f_{13}x + 2f_{23}y + f_{33}z + 2f_{34} = 0$$

je obecnou rovnicí roviny β, která je, jak známo, určena jednoznačně až na nenulový násobek, a tedy kvadrika $\mathcal{K}$ určuje jednoznačně (až na nenulový násobek) koeficienty f_{13}, f_{23}, f_{33} a f_{44}, a tudíž i polynom $F(x, y, z)$.

II. Nechť $\mathcal{K}$ je elipsoid, hyperboloid, paraboloid, kuželová či válcová plocha.
Zvolme nyní bázi $\mathcal{B}$ tak, aby polynom $F_1(x, y, z)$ byl v kanonickém tvaru. Pak (viz rozbor obecné rovnice v podkapitole 5.2.1) lze F_1 (až na nenulový násobek) vždy psát:

$$F_1(x, y, z) = x^2 + f_1(y, z), \tag{5.39}$$

kde f_1 je polynom 2. stupně (zahrnuje další členy). (Pouze v případě III.1. musíme změnit označení os – tj. $F_1(x, y, z) = x^2 + 2py$).
Polynom $F_2(x, y, z)$ předpokládejme v obecném tvaru

$$F_2(x, y, z) = f_{11}x^2 + 2f_{14}x + 2f_{12}xy + 2f_{13}xz + f_2(y, z). \tag{5.40}$$

Uvažujme nyní rovinu $\rho : x = 0$ a zkoumejme průnik[24] $\mathcal{K} \cap \rho$. Hledáme tedy body $X = [0, y, z]$ vyhovující obecné rovnici $\mathcal{K}$ ve tvaru (5.39) i (5.40).
Tento průnik je kuželosečka v rovině os yz, daná obecnou rovnicí

$$f_1(y, z) = 0 \quad \text{a také} \quad f_2(y, z) = 0.$$

[23] Např. z toho, že bod $[0, y, 0]$ náleží $\mathcal{K}$ pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ plyne $f_{22} = f_{24} = f_{44} = 0$.
[24] Jde o tzv. řez kvadriky rovinou, což budeme obecně zkoumat v podkapitole 5.6.

Provedeme-li takovéto řezy všech kvadrik splňujících předpoklady věty,[25] zjistíme, že tato kuželosečka v případě libovolné z nich obsahuje *více než jeden bod*. Proto dle věty 4.3.2 o jednoznačnosti pro kuželosečky musí platit:

$$f_2(y,z) = c_0 f_1(y,z),\ c_0 \neq 0. \tag{5.41}$$

Nyní proveďme řez kvadriky rovinou $\sigma : y = 0$ (tj. hledáme body $X = [x, 0, z]$ vyhovující obecné rovnici $\mathcal{K}$):
Užitím (5.39) a (5.40) je tato množina ekvivalentně vyjádřena:

$$x^2 + f_1(0,z) = 0 \Leftrightarrow f_{11}x^2 + 2f_{14}x + 2f_{13}xz + c_0 f_1(0,z) = 0,$$

což představuje kuželosečku v rovině xz, o které se opět lze přesvědčit, že obsahuje více než jeden bod, a proto obě tato vyjádření musí být úměrná.
Konstantou úměrnosti je f_{11}, a tedy platí:

$$f_{11}x^2 + f_{11}f_1(0,z) = f_{11}x^2 + 2f_{14}x + 2f_{13}xz + c_0 f_1(0,z),$$

což po porovnání dává

$$c_0 = f_{11},\ f_{14} = f_{13} = 0. \tag{5.42}$$

Obě obecné rovnice (5.39) a (5.40) vyjadřují stejnou množinu bodů a tedy (užijme (5.41) a (5.42)):

$$x^2 + f_1(y,z) = 0 \Leftrightarrow f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{11}f_1(y,z) = 0.$$

Pro libovolný $X \in \mathcal{K}$ proto musí platit $f_{12}xy = 0$. Lze se však přesvědčit, že každá z uvažovaných ploch obsahuje alespoň jeden bod $X = [x, y, z]$, kde $x \neq 0$ a $y \neq 0$,[26] tudíž $f_{12} = 0$. Obdrželi jsme tedy:

$$F_1(x,y,z) = x^2 + f_1(y,z) \wedge F_2(x,y,z) = f_{11}x^2 + f_{11}f_1(y,z),$$

čili $F_2 = cF_1$.

$\square$

Věta o jednoznačnosti má pro studium kvadrik zásadní význam. Pomocí ní totiž dokážeme existenci veličin, které představují významné geometrické vlastnosti kvadrik.

Bezprostředním důsledkem věty 5.3.1 je:

Věta 5.3.3 *Každá kvadrika splňující předpoklady věty 5.3.1 o jednoznačnosti určuje až na nenulový násobek jedinou polární bilineární (a tedy i kvadratickou) formu.*

[25] Je-li např. $F_1(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$, je příslušná kuželosečka určena polynomem $f_1(y,z) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$, což je dvojice různoběžek v rovině yz. Proveďte i pro ostatní možné tvary polynomu $F_1(x,y,z)$.

[26] Pro $F_1(x,y,z) = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z$ je oním bodem např. $[1, \sqrt{\frac{q}{p}}, 0]$.

Pomocí této věty již snadno ukážeme invarianci signatury kvadriky:

Věta 5.3.4 *Signatura neprázdné kvadriky je touto kvadrikou určena jednoznačně.*

Důkaz: V případě, kdy $\mathcal{K}$ obsahuje alespoň dva body a není přímkou, jde o přímý důsledek věty 5.3.3. V ostatních případech jde o důsledek poznámky 5.2.4 (bod má signaturu $\{3, 0\}$, přímka $\{2, 0\}$). □

O dalších významných invariantech kvadrik hovoří následující věta:

Věta 5.3.5 *Buď $\mathcal{K}$ neprázdná kvadrika,* **F** *její libovolná matice v libovolné bázi. Pak*

- *znaménko Δ,*
- *nulovost či nenulovost δ,*
- *R (velká hodnost),*
- *r (malá hodnost)*[27]

jsou jednoznačně určeny kvadrikou $\mathcal{K}$ (jde o geometrické vlastnosti).

Důkaz:

(a) splňuje-li $\mathcal{K}$ předpoklady věty 5.3.1 o jednoznačnosti, dokáže se věta 5.3.5 analogicky jako věta 4.3.4 (užitím věty 5.1.8)

(b) je-li $\mathcal{K}$ přímka či jednobodová množina – viz poznámka 5.2.4.

□

Z právě dokázané věty plyne korektnost následující definice.

Definice 5.3.6 Buď $\mathcal{K} \neq \emptyset$ kvadrika, **F** její libovolná matice v některé bázi. Řekneme, že $\mathcal{K}$ je *regulární*, jestliže $\Delta \neq 0$. V opačném případě řekneme, že $\mathcal{K}$ je *singulární*.
O singulární kvadrice řekneme, že je *nerozpadlá*, je-li $R = 3$, v opačném případě řekneme, že $\mathcal{K}$ je *rozpadlá*.[28]
Řekneme, že $\mathcal{K}$ je středová, jestliže $\delta \neq 0$, v opačném případě řekneme, že $\mathcal{K}$ je *nestředová*.

[27] Tudíž vzhledem k invarianci signatury je geometrickou vlastností i to, zda nenulová vlastní čísla její malé matice (v libovolné bázi) jsou *téhož* znaménka či *různého* znaménka.
[28] Původ pojmů *(ne)rozpadlá* plyne zřejmě z věty 5.2.3.

Nyní již pro neprázdné kvadriky snadno plyne, že ve větě 5.2.3 lze implikace nahradit ekvivalencemi.

Věta 5.3.7 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika, $\mathcal{B}$ libovolná báze a* $\mathbf{F}$ *některá matice kvadriky $\mathcal{K}$ v této bázi, R, r, Δ nechť jsou o řadě velká hodnost, malá hodnost a velký diskriminant. Označme Λ množinu nenulových vlastních čísel matice $\mathbf{F}_0$. Pak platí:*

- $R = 4 \wedge r = 3 \quad \wedge \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' > 0 \wedge \Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je elipsoid,*
- $R = 4 \wedge r = 3 \quad \wedge \quad \exists \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' < 0 \wedge \Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je jednodílný hyperboloid,*
- $R = 4 \wedge r = 3 \quad \wedge \quad \exists \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' < 0 \wedge \Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je dvojdílný hyperboloid,*
- $R = 4 \wedge r = 2 \quad \wedge \quad \Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je eliptický paraboloid,*
- $R = 4 \wedge r = 2 \quad \wedge \quad \Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je hyperbolický paraboloid,*
- $R = 3 \wedge r = 3 \quad \wedge \quad \exists \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je kuželová plocha,*
- $R = 3 \wedge r = 3 \quad \wedge \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je jednobodová množina,*
- $R = 3 \wedge r = 2 \quad \wedge \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je eliptická válcová plocha,*
- $R = 3 \wedge r = 2 \quad \wedge \quad \exists \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je hyperbolická válcová plocha,*
- $R = 3 \wedge r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je parabolická válcová plocha,*
- $R = 2 \wedge r = 2 \quad \wedge \quad \exists \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je dvojice různoběžných rovin,*
- $R = 2 \wedge r = 2 \quad \wedge \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda; \lambda\lambda' > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je přímka*
- $R = 2 \wedge r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je dvojice rovnoběžných rovin,*
- $R = 1 \wedge r = 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$\mathcal{K}$ je rovina.*

Důkaz: Implikace„$\Leftarrow$“ se dokáží (užitím vět 5.3.4 a 5.3.5) analogicky jako ve větě 4.3.8 v případě kuželoseček. □

Poznámka 5.3.8 Věta 5.3.7 nám (podobně jako analogická věta pro kuželosečky) umožní zodpovědět otázky položené v závěru podkapitoly 5.2. Jelikož nemohou existovat matice téže neprázdné kvadriky lišící se být jen v jediném ze znaků na levé straně ekvivalencí ve větě 5.3.7, nemůže být táž kvadrika např. současně elipsoidem a kuželovou plochou, přímkou a některým hyperboloidem a podobně.

Dostáváme tak *úplné třídění množiny neprázdných kvadrik* na vzájemně disjunktní podmnožiny, tj. rozklad této množiny. Ekvivalenci, které tento rozklad náleží, dostaneme v podkapitole 5.4.

Ukažme ještě, že i hodnoty poloos elipsoidu, hyperboloidů, parametrů paraboloidů a poměry poloos kuželové plochy[29] jsou geometrickými vlastnostmi příslušných ploch.

Buďte $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ libovolné ortonormální báze a nechť $\mathbf{F}$, resp. $\mathbf{G}$, je některá matice určující $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}$, resp. $\mathcal{B}'$.
Kvadrika $\mathcal{K}$ je v bázi $\mathcal{B}'$ určena též maticí $\mathbf{F}'$ vzniklou z $\mathbf{F}$ provedením příslušné transformace souřadnic. Podle věty 5.3.1 o jednoznačnosti (platí pro zkoumané plochy) pak $\mathbf{F}' = c\mathbf{G}$, $c \neq 0$.

Označme $\Delta^{\mathbf{F}}$ a $\delta^{\mathbf{F}}$ velký a malý diskriminant matice $\mathbf{F}$, $\lambda_1^{\mathbf{F}}, \lambda_2^{\mathbf{F}}, \lambda_3^{\mathbf{F}}$ vlastní čísla matice $\mathbf{F}_0$, analogicky pro matice $\mathbf{F}'$ a $\mathbf{G}$.
Zcela analogicky, jako pro kuželosečky, dospějeme k následujícím rovnostem:

$$\delta^{\mathbf{F}} = c^3 \delta^{\mathbf{G}}, \quad \Delta^{\mathbf{F}} = c^4 \Delta^{\mathbf{G}}, \quad \text{a} \quad \lambda_i^{\mathbf{F}} = c\lambda_i^{\mathbf{G}}, \quad 1 \leq i \leq 3. \tag{5.43}$$

Buď $\mathcal{K}$ např. některý z paraboloidů. Dle vztahu (5.27) vypočtěme hodnoty parametrů užitím jak matice $\mathbf{F}$, tak i matice $\mathbf{G}$. S přihlédnutím k relacím (5.43) obdržíme:

$$p^{\mathbf{F}} = \sqrt{-\frac{\Delta^{\mathbf{F}}}{(\lambda_1^{\mathbf{F}})^3 \lambda_2^{\mathbf{F}}}} = \sqrt{-\frac{c^4 \Delta^{\mathbf{G}}}{(c\lambda_1^{\mathbf{G}})^3 (c\lambda_2^{\mathbf{G}})}} = \sqrt{-\frac{\Delta^{\mathbf{G}}}{(\lambda_1^{\mathbf{G}})^3 \lambda_2^{\mathbf{G}}}} = p^{\mathbf{G}},$$

čili hodnota parametru p paraboloidu nezávisí na výběru matice kvadriky. Snadno se přesvědčíme, že je tomu tak i pro ostatní zkoumané hodnoty.

Platí tedy následující věta:

Věta 5.3.9 *Velikosti poloos elipsoidu, hyperboloidů, parametrů paraboloidů a poměry poloos kuželové plochy jsou geometrickými vlastnostmi příslušných ploch.*

Geometrický význam těchto pojmů vyplyne ze studia tzv. *hlavních řezů kvadrik* v podkapitole 5.6.[30]

Na závěr tohoto odstavce uveďme praktické použití teorie:

Příklad 5.3.10 Ve zvolené kartézské soustavě souřadné je obecnou rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 4x + 1 = 0$$

dána kvadrika $\mathcal{K}$.
Vyšetřete tuto kvadriku.

[29] Tj. poměry $a : b$, $b : c$ a $a : c$.

[30] Věta 5.3.9 platí i pro poloosy eliptické a hyperbolické plochy válcové a parametr parabolické plochy válcové.
Pro odvození této skutečnosti však zde dáme přednost právě užití hlavních řezů, neboť v podkapitole 5.2 jsme formule pro tyto hodnoty neodvozovali.

Řešení:
Sestavme velkou, resp. malou, matici (výchozí bázi označme $\mathcal{B}$):

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud spočteme, že $R = 4, r = 2, \Delta < 0$. Dle věty 5.3.7 se jedná o *eliptický paraboloid* (jak se ostatně přesvědčíme z tvaru kanonické rovnice).
Zajímat se budeme především o jeho vrchol, velikosti parametrů, osu.
Nejprve najdeme vlastní čísla matice $\mathbf{F}_0$ (rovnice (5.8))

$$0 = \det(\mathbf{F}_0 - \lambda\mathbf{E}) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2),$$

odtud $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ (viz dohoda o očíslování vlastních čísel).
Příslušné hlavní směry jsou generovány vektory, jejichž souřadnice jsou řešením homogenní soustavy o matici (5.10) tj.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Můžeme tudíž zkonstruovat kartézskou bázi $\mathcal{B}' = \langle P, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\rangle$ hlavních směrů – položíme-li (proveďte příslušný výpočet):

$$\mathbf{a}_1 = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\mathcal{B}} \wedge \mathbf{a}_2 = (0,1,0)_{\mathcal{B}} \wedge \mathbf{a}_3 = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\mathcal{B}}.$$

Transformační rovnice pro přechod od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$ znějí:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x' && + \tfrac{\sqrt{2}}{2}z' \\ y &= \quad y' && \\ z &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x' && - \tfrac{\sqrt{2}}{2}z'. \end{aligned}$$

Nyní nalezneme polynom $F'(x', y', z')$ (resp. matici $\mathbf{F}'$) určující $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}'$ a to buď přímým dosazením za x, y, z do polynomu $F(x, y, z,)$, nebo výpočtem dle věty 5.1.5 (jak vypadá matice $\mathbf{T}$?).
Získáme tak obecnou rovnici $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}'$:

$$2x'^2 + y'^2 + 2\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}z' + 1 = 0.$$

Úpravou na úplné čtverce dosáhneme tvaru

$$2(x' + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + y'^2 + 2\sqrt{2}z' = 0.$$

Položme $V = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right]_{\mathcal{B}'}$ a zkonstruujme bázi $\mathcal{B}'' = \langle V, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$, což je kanonická báze této kvadriky. Obecná rovnice v bázi $\mathcal{B}''$ (kanonická rovnice[31]) zní

$$\frac{x''^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{y''^2}{\sqrt{2}} + 2z'' = 0.$$

Dle transformačních rovnic $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}'$ spočteme, že

$$V = \left[-\tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\right]_{\mathcal{B}}.$$

Z kanonické rovnice plynou hodnoty parametrů $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $q = \sqrt{2}$, osou paraboloidu je přímka $o = \{V, \mathbf{a}_3\} = \{\left[-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right]_{\mathcal{B}}; (1, 0, -1)_{\mathcal{B}}\}$.
Transformační rovnice pro přechod od $\mathcal{B}'$ k $\mathcal{B}''$ mají tvar:

$$\begin{aligned} x' &= x'' - \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y' &= y'' \\ z' &= z'' \end{aligned} \quad .$$

(Sestavte transformační rovnice pro přechod od $\mathcal{B}$ k $\mathcal{B}''$.)
O tom, že bod V je skutečně vrcholem paraboloidu, se přesvědčíme na závěr podkapitoly 5.6.

5.4 Afinní klasifikace kvadrik

Základní otázkou tohoto odstavce bude – stejně jako u kuželoseček – najít nutné a postačující podmínky pro to, aby ke dvojici kvadrik existovala afinita zobrazující jednu z nich na druhou. Proto budeme v této podkapitole kvadrikou vždy rozumět kvadriku *neprázdnou*.

Následující větu bychom dokázali naprosto analogicky jako větu 4.4.1 pro kuželosečky.

Věta 5.4.1 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika určená v bázi $\mathcal{B}$ maticí $\mathbf{F}$. Nechť f je afinita určená v bázi $\mathcal{B}$ maticí $\mathbf{A}$. Pak množina $f(\mathcal{K})$ je kvadrika, která je v bázi $\mathcal{B}$ určena maticí*

$$\mathbf{F}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{A}^{-1})^T.$$

Uvažujme v dané (kartézské) bázi kvadriku o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (kulová plocha). Zadejme afinitu rovnicemi $x' = ax, y' = by, z' = cz$ (a, b, c jsou nenulová reálná čísla). Snadno se přesvědčíte, že obrazem dané kvadriky je kvadrika o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (elipsoid).
Definujme (stejně jako u kuželoseček) binární relaci na množině všech kvadrik:

[31] Tvaru kanonické rovnice dle definice 5.2.2 bychom dosáhli změnou orientace souřadné osy z'' (tj. záměnou vektoru $\mathbf{a}_3$ za $-\mathbf{a}_3$).

Definice 5.4.2 Kvadrika $\mathcal{K}_1$ se nazývá *afinně ekvivalentní* s kvadrikou $\mathcal{K}_2$, jestliže existuje afinita f taková, že $\mathcal{K}_2 = f(\mathcal{K}_1)$.

Věta 5.4.3 *Relace „být afinně ekvivalentní" je relace ekvivalence na množině všech kvadrik prostoru $\mathcal{E}_3$ (neprázdných).*

Důkaz je analogický důkazu věty 4.4.3.

Rovněž následující větu bychom dokázali analogicky jako pro kuželosečky (věta 4.4.4).

Věta 5.4.4 *Pro libovolné kvadriky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ platí:*

1. *Jsou-li $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ afinně ekvivalentní, pak ke každé bázi $\mathcal{B}$ existuje báze $\mathcal{B}'$ tak, že každá matice kvadriky $\mathcal{K}_1$ v bázi $\mathcal{B}$ je rovněž maticí kvadriky $\mathcal{K}_2$ v bázi $\mathcal{B}'$.*

2. *Jestliže existují báze $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ a matice, která je maticí kvadriky $\mathcal{K}_1$ v bázi $\mathcal{B}$ a současně maticí kvadriky $\mathcal{K}_2$ v bázi $\mathcal{B}'$, pak jsou kvadriky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ afinně ekvivalentní.*

Povšimněte si různosti použitých kvantifikátorů v částech 1. a 2.

Důsledek 5.4.5 *Dvě kvadriky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ jsou afinně ekvivalentní právě tehdy, když existují báze $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ a matice, která je maticí kvadriky $\mathcal{K}_1$ v bázi $\mathcal{B}$ a současně maticí kvadriky $\mathcal{K}_2$ v bázi $\mathcal{B}'$.*

Proveďme nyní rozklad množiny neprázdných kvadrik dle relace „být afinně ekvivalentní".

Věta 5.4.6 *Třídami rozkladu množiny všech neprázdných kvadrik dle relace „být afinně ekvivalentní" jsou následující množiny:*

- *množina elipsoidů*
- *množina jednodílných hyperboloidů*
- *množina dvojdílných hyperboloidů*
- *množina eliptických paraboloidů*
- *množina hyperbolických paraboloidů*

- *množina kuželových ploch*
- *množina jednobodových množin*
- *množina eliptických válcových ploch*
- *hyperbolických válcových ploch*
- *parabolických válcových ploch*
- *množina dvojic různoběžných rovin*
- *množina přímek*
- *množina dvojic rovnoběžných rovin*
- *množina rovin*

Důkaz: Víme již, že uvažované množiny pokrývají množinu neprázdných kvadrik. Musíme ještě dokázat, že dvě kvadriky náleží k téže množině, právě když jsou afinně ekvivalentní.

(a) Jsou-li $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ dvě afinně ekvivalentní kvadriky, pak užitím věty 5.4.4 a věty 5.3.7 vyplyne, že obě náleží k téže z uvažovaných množin (srv. důkaz věty 4.4.6).

(b) Nechť $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ jsou dvě kvadriky náležející téže množině. Postupujme analogicky jako v důkazu příslušné věty pro kuželosečky. Jsou-li například $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ libovolné eliptické paraboloidy, pak existuje báze $\mathcal{B}$ (kanonická), v níž je $\mathcal{K}_1$ dána obecnou rovnicí $\frac{x^2}{p_1}+\frac{y^2}{q_1} = 2z$. Uvažujme nyní bázi $\overline{\mathcal{B}}$ tak, že transformační rovnice znějí $x = \sqrt{p_1}\,\overline{x}$, $y = \sqrt{q_1}\,\overline{y}$, $z = \overline{z}$. Pak je kvadrika $\mathcal{K}_1$ určena v bázi $\overline{\mathcal{B}}$ rovnicí $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 2\overline{z}$.

Podobně ukážeme, že od kanonické báze $\mathcal{B}'$ kvadriky $\mathcal{K}_2$ lze přejít k bázi $\overline{\mathcal{B}'}$ v níž je $\mathcal{K}_2$ určena obecnou rovnicí $\overline{x'}^2 + \overline{y'}^2 = 2\overline{z'}$. Odtud již dle věty 5.4.4 plyne afinní ekvivalence obou kvadrik.

Stejně lze důkaz provést i pro ostatní uvažované množiny.

□

Důsledek 5.4.7 *Ke každému elipsoidu existuje báze, vzhledem k níž je dán obecnou rovnicí* $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.
Ke každému jednodílnému hyperboloidu existuje báze, vzhledem k níž je dán obecnou rovnicí $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.
Ke každému dvojdílnému hyperboloidu existuje báze, vzhledem k níž je dán obecnou rovnicí $-x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$.
Ke každému eliptickému paraboloidu existuje báze, vzhledem k níž je dán obecnou rovnicí $x^2 + y^2 - z = 0$.
Ke každému hyperbolickému paraboloidu existuje báze, vzhledem k níž je dán obecnou rovnicí $x^2 - y^2 - z = 0$.
Ke každé kuželové ploše existuje báze, vzhledem k níž je dána obecnou rovnicí $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
Ke každé eliptické válcové ploše existuje báze, vzhledem k níž je dána obecnou rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
Ke každé parabolické válcové ploše existuje báze, vzhledem k níž je dána obecnou rovnicí $y^2 - x = 0$.
Ke každé dvojici různoběžných rovin existuje báze, vzhledem k níž je dána obecnou rovnicí $x^2 - y^2 = 0$.
Ke každé přímce existuje báze, vzhledem k níž je dána obecnou rovnicí $x^2 + y^2 = 0$.
Ke každé dvojici rovnoběžných rovin existuje báze, vzhledem k níž je dána obecnou rovnicí $y^2 = q,\ q > 0$.
Ke každé rovině existuje báze, vzhledem k níž je dána obecnou rovnicí $y^2 = 0$.
Tyto báze ovšem obecně nejsou kartézské.

Je patrno – stejně jako u kuželoseček – že relace afinní ekvivalence „ztotožňuje“ všechny kvadriky dané množiny bez ohledu na jejich metrické parametry (tj. poloosy u elipsoidů a hyperboloidů, parametry u paraboloidů, poměry poloos kuželové plochy, odchylka různoběžných rovin atd.), protože tyto se zobrazením v afinitě nezachovávají. Studujeme-li kvadriky v *afinním prostoru*, nemůžeme rozlišit např. dvojici elipsoidů, dvojic různoběžných rovin apod.[32]

Poznámka 5.4.8 Příslušnost dané kvadriky k určité třídě je tedy *invariantem grupy afinit prostoru*.

Přímým důsledkem věty 5.4.6 a věty 5.3.7 je následující kriterium afinní ekvivalence neprázdných kvadrik (uvědomme si, že signatura kvadratické formy současně určuje malou hodnost):

[32] V případě $\mathcal{A}_3$ nad $\mathbb{R}$ definujeme kvadriky podobně, jako jsme to učinili pro prostor $\mathcal{E}_3$, avšak bez jejich metrických parametrů (poloosy, parametry), tj. analogicky, jak jsme poznamenali k definicím kuželoseček v $\mathcal{A}_2$ nad $\mathbb{R}$ – např. *jednodílným hyperboloidem* rozumíme každou kvadriku, k níž existuje báze, v níž má obecnou rovnici $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.

Věta 5.4.9 *Buďte $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ dvě kvadriky. Pak $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ jsou afinně ekvivalentní právě tehdy, jsou-li splněny následující podmínky:*

1. $R_1 = R_2$,
2. $\mathrm{sgn}\Delta_1 = \mathrm{sgn}\Delta_2$,
3. *kvadriky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ mají touž signaturu.*

5.5 Sdruženost směrů vzhledem ke kvadrice

Nebude-li řečeno jinak, budeme se v celém tomto odstavci zabývat pouze kvadrikami, které *obsahují více než jeden bod a nejsou přímkou.*

Pojem *sdružené směry* zavedeme analogicky jako v případě kuželoseček – opět využijeme již zavedeného pojmu sdruženosti směrů vzhledem ke kvadratické formě (definice 3.3.7).
Je zřejmé, že pojem zavedený následující definicí je *geometrickou vlastností* kvadriky a daných směrů (srv. poznámka 5.1.7).

Definice 5.5.1 Buď $\mathcal{K}$ kvadrika. Dva směry z $\mathbf{V}$ se nazývají *sdružené vzhledem ke kvadrice* $\mathcal{K}$, jsou-li sdružené vzhledem ke všem kvadratickým formám kvadriky $\mathcal{K}$.

Následující věta je přímým důsledkem věty 5.3.1 o jednoznačnosti[33] a definice 5.1.6 polární bilineární formy kvadriky.

Věta 5.5.2 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika, Φ, Ψ její libovolné polární bilineární formy. Pak existuje $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tak, že platí*

$$\Psi = c\Phi.$$

Věta 5.5.3 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika. Jsou-li dva směry z $\mathbf{V}$ sdružené vzhledem k některé kvadratické formě kvadriky $\mathcal{K}$, pak jsou sdružené vzhledem ke kvadrice $\mathcal{K}$.*

Důkaz: Jde o bezprostřední důsledek definice 5.5.1 a věty 5.5.2 (srv. věta 4.6.3). □

[33] Proto zde studujeme jen plochy splňující její předpoklady.

Důsledek 5.5.4 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika, $\mathbf{F}$ její libovolná matice v některé bázi $\mathcal{B}$, pak směry vektorů $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)_{\mathcal{B}_0}$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathcal{B}_0}$ jsou vzhledem ke $\mathcal{K}$ sdružené, právě když*

$$(u_1, u_2, u_3)\mathbf{F}_0(v_1, v_2, v_3)^T = 0, \tag{5.44}$$

neboli

$$\begin{gathered} f_{11}u_1v_1 + f_{12}u_1v_2 + f_{12}u_2v_1 + f_{22}u_2v_2 + \\ + f_{23}u_2v_3 + f_{23}u_3v_2 + f_{33}u_3v_3 + f_{13}u_1v_3 + f_{13}u_3u_1 = 0. \end{gathered} \tag{5.45}$$

Poznamenejme, že pro kvadriky, které nesplňují předpoklady věty 5.3.1 o jednoznačnosti, by věta 5.5.3 neplatila.
Např. polynomy $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2$ i $F_2(x, y, z) = x^2 + xy + y^2$ je dána táž kvadrika (osa z), přičemž vzhledem ke kvadratické formě určené maticí $\mathbf{F}_2$ jsou např. směry $[(1, 0, 0)]$ a $[(-1, 2, 0])$ sdružené, zatímco vzhledem k formě určené $\mathbf{F}_1$ nikoli (prověřte). Proto jsme pojem sdruženosti směrů pro tyto kvadriky nezavedli. Jak ovšem ukážeme v závěru, lze pro přímku korektně uvažovat směr singulární a asymptotický.

Definice 5.5.5 Buď $\mathcal{K}$ kvadrika. Směr z $\mathbf{V}$ se nazývá

I.1. *singulární směr kvadriky* $\mathcal{K}$, je-li vzhledem ke $\mathcal{K}$ sdružen se všemi směry z $\mathbf{V}$,

I.2. *regulární směr kvadriky* $\mathcal{K}$, není-li jejím singulárním směrem,

II.1. *asymptotický směr kvadriky* $\mathcal{K}$, je-li vzhledem ke $\mathcal{K}$ sdružen sám se sebou,

II.2. *neasymptotický*[34]*směr kvadriky* $\mathcal{K}$, není-li jejím asymptotickým směrem,

III. *hlavní směr kvadriky* $\mathcal{K}$, je-li vzhledem ke $\mathcal{K}$ sdružen s každým směrem prostoru $\mathbf{V}$ na něj kolmým.

Poznámka 5.5.6 Z předešlé definice, věty 5.5.3 a z definic příslušných pro kvadratické formy (kapitola 3) plyne pro kvadriky:

- daný směr z $\mathbf{V}$ je singulárním (regulárním) směrem kvadriky $\mathcal{K}$, právě když je singulárním (regulárním) směrem některé její kvadratické formy (a tedy všech jejích forem),
- daný směr z $\mathbf{V}$ je hlavním směrem kvadriky $\mathcal{K}$, právě když je hlavním směrem některé její kvadratické formy (a tedy všech jejích forem).

Přímo z definice 5.5.5 plyne:

[34] Užívá se též názvu *obyčejný směr*.

Věta 5.5.7 *Každý singulární směr je zároveň asymptotickým směrem dané kvadriky.*

Poznámka 5.5.8 Při rozboru obecné rovnice kvadriky (viz podkapitola 5.2.1) jsme vyšetřovali hlavní směry jedné z kvadratických forem dané kvadriky. Tyto jsou však společné pro všechny kvadratické formy této kvadriky [35] (viz poznámka 5.5.6). Je tedy patrno, že násobnost vlastních čísel malé matice kvadriky je geometrickou vlastností kvadriky – určuje strukturu množiny hlavních směrů dané plochy.

Hlavní směry kvadriky tedy určují *směry vektorů kanonické báze*.

Násobnost vlastních čísel je rovněž ekvivalentní rovnosti poloos (resp. parametrů) kvadrik.[36]

Pro úplnost popišme v následující větě strukturu množiny hlavních směrů kvadriky v závislosti na násobnosti vlastních čísel (jak plyne ze zmíněného rozboru v podkapitole 5.2.1).

Věta 5.5.9 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika, $\mathbf{F}_0$ některá její malá matice v libovolné ortonormální bázi. Pak platí:*

1. *Všechny kořeny charakteristické rovnice matice $\mathbf{F}_0$ jsou jednoduché, právě když existuje jediná, a to ortogonální, trojice hlavních směrů plochy $\mathcal{K}$.*
2. *Charakteristická rovnice matice $\mathbf{F}_0$ má jeden jednoduchý a jeden dvojnásobný kořen, právě když je množina hlavních směrů plochy tvořena jistým směrem $[\mathbf{u}] \subseteq \mathbf{V}$ a směry na něj kolmými.*
   Přitom $[\mathbf{u}]$ je hlavní směr odpovídající jednoduchému kořenu a hlavní směry odpovídající dvojnásobnému kořenu charakteristické rovnice vyplňují $[\mathbf{u}]^\perp$.
3. *Charakteristická rovnice matice $\mathbf{F}_0$ má jediný (a tedy trojnásobný) kořen, právě když hlavním směrem plochy $\mathcal{K}$ je libovolný směr ve $\mathbf{V}$.*

Vyšetřeme nyní existenci **singulárních směrů** jednotlivých kvadrik.

Buď $\mathcal{K}$ kvadrika, $\mathbf{F}$ její libovolná matice v některé bázi $\mathcal{B}$.
V souladu s poznámkou 5.5.6 určuje vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathcal{B}_0}$ singulární směr $\mathcal{K}$, právě když (v_1, v_2, v_3) řeší soustavu (3.23) pro $n = 3$:

$$\mathbf{F}_0 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.46}$$

[35] Uvažujeme pouze kvadriky splňující předpoklady věty o jednoznačnosti.
Ukažte, že např. pro dvě různé kvadratické formy téže přímky (uvedené před definicí 5.5.5) bychom obdrželi různé množiny hlavních směrů.

[36] Tedy i to, zda je daná kvadrika *rotační*, je její geometrickou vlastností. Z jiné strany na tento problém pohlédneme při studiu hlavních řezů kvadrik.

což představuje soustavu homogenních lineárních rovnic o matici $\mathbf{F}_0$ a neznámých v_1, v_2, v_3 (rozepište si ji!).

Tato soustava má netriviální řešení, právě když $0 = \det \mathbf{F}_0 = \delta$, tedy v případě, kdy malá hodnost $r < 3$. Singulární směry leží v podprostoru dimenze $3 - r$ (srv. věta 3.3.11) a každý z nich je hlavním směrem plochy $\mathcal{K}$ příslušným $\lambda = 0$[37] (viz důsledek 3.4.5).
Rozlišme nyní jednotlivé případy dle malé hodnosti r.

(a) $r = 1$. Pak je $\mathcal{K}$ parabolická válcová plocha, nebo dvojice rovnoběžných rovin, či rovina jediná.
Singulární směry vyplňují dvojrozměrný podprostor, který je totožný s podprostorem určeným hlavními směry příslušnými $\lambda = 0$ – v kanonické soustavě souřadné (podkapitola 5.2.1) jde o zaměření roviny $y = 0$ (což v případě dvojice rovnoběžných rovin nebo roviny jediné je jejich zaměření).

(b) $r = 2$. Jde o případ paraboloidů, eliptických a hyperbolických válcových ploch a dvojic různoběžných rovin.
Singulární směr směr je zde jediný, totožný s hlavním směrem příslušným $\lambda = 0$ – tedy v kanonické soustavě souřadné se jedná o směr osy z – tedy osy uvedené plochy[38] (v případě dvojice různoběžných rovin jde o směr jejich průsečnice).

Povšimněme si případu, kdy je $\mathcal{K}$ přímkou (nesplňuje tedy předpoklady věty o jednoznačnosti). Ukážeme, že i pro ni lze pojem singulárního směru uvažovat. Vyšetříme totiž singulární směry její libovolné kvadratické formy.
Zvolme soustavu souřadnou tak, aby $\mathcal{K}$ byla osou z. Libovolná obecná rovnice přímky $\mathcal{K}$ v této soustavě bude tvaru

$$f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 + 2f_{14}x + 2f_{24}y = 0, \tag{5.47}$$

neboť počátek leží na $\mathcal{K}$ (tedy $f_{44} = 0$) a kvadrika $\mathcal{K}$ s každým bodem $X = [x, y, z]$ musí obsahovat i bod $X = [x, y, z']$ pro libovolné $z' \in \mathbb{R}$ (proto $f_{13} = f_{23} = f_{33} = f_{34} = 0$). Matice soustavy (5.46) tudíž zní

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 \\ f_{12} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jejím řešením je jistě směr $[(0, 0, 1)]$, tj. směr uvažované přímky. Protože hodnost $r = 2$, neexistuje další netriviální řešení.
Ukázali jsme, že *všechny* kvadratické formy kvadriky $\mathcal{K}$ mají týž singulární směr, který lze tedy považovat za singulární směr této kvadriky (srv. definice 5.5.1 a definice 5.5.5).

(c) $r = 3$ ($\delta \neq 0$). V tomto případě singulární směry neexistují.

[37] λ značí, jako obvykle, vlastní číslo matice $\mathbf{F}_0$.
[38] Ve smyslu definice 5.2.2.

Shrňme tyto poznatky do následující věty, v niž pro úplnost rovněž připomeňme důsledek 3.4.5.

Věta 5.5.10 *Elipsoid, jednodílný i dvojdílný hyperboloid a kuželová plocha nemají žádný singulární směr.*
Eliptický i hyperbolický paraboloid, eliptická a hyperbolická válcová plocha a dvojice různoběžných rovin mají jediný singulární směr.[39]
Singulární směry parabolické válcové plochy, dvojice rovnoběžných rovin (vč. splývajících) vyplňují dvojrozměrný podprostor.[40]
Každý singulární směr kvadriky je jejím hlavním směrem příslušným vlastnímu číslu $\lambda = 0$ a naopak.
Přímka má jediný singulární směr (totožný s jejím směrem).

Následující věta se dokáže naprosto analogicky jako v případě kuželoseček s využitím (5.46), (5.45).

Věta 5.5.11 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika. Pak platí, že směry sdružené s libovolným jejím regulárním směrem vyplní dvojrozměrný podprostor.*

(Srovnejte s větou 4.6.12!)

Přistupme ke studiu existence **asymptotických směrů** jednotlivých kvadrik.
Nechť $\mathcal{K}$ je kvadrika a $\mathbf{F}$ její některá matice v libovolné bázi $\mathcal{B}$.
Vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)_{\mathcal{B}_0}$ určuje asymptotický směr, právě když (viz definice 5.5.5)

$$0 = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \Phi_2(\mathbf{u}), \tag{5.48}$$

což lze pomocí souřadnic psát (viz 5.1.6)

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0 \tag{5.49}$$

čili

$$f_{11}u_1^2 + 2f_{12}u_1u_2 + f_{22}u_2^2 + 2f_{13}u_1u_3 + 2f_{23}u_2u_3 + f_{33}u_3^2 = 0 \tag{5.50}$$

(plyne ovšem též z (5.45)).

Předpokládejme, že jsme zvolili *kanonickou* soustavu souřadnou, a tedy kvadriky mají obecné rovnice dle podkapitoly 5.2.1, čímž docílíme zjednodušení analytického vyjádření kvadratické formy.

(a) Elipsoid. Rovnice pro souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ asymptotického směru zní:

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = \frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} + \frac{u_3^2}{c^2} = 0.$$

[39] Udává směr osy z v kanonické soustavě souřadné.
[40] Jde o zaměření roviny $y = 0$ v kanonické soustavě souřadné.

Tato má v oboru $\mathbb{R}$ jediné řešení, a to $(0, 0, 0)$, proto elipsoidy nemají žádný asymptotický směr.

(b) Hyperboloidy. Rovnice (5.50) v tomto případě zní:

$$\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} - \frac{u_3^2}{c^2} = 0,$$

což představuje tzv. *kuželovou plochu asymptotických směrů*[41] – asymptotické směry jsou určeny vektory vedenými z počátku uvažované soustavy souřadné, jejich koncové body leží na kuželové ploše, která má v uvažované soustavě souřadné rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

(c) Eliptický paraboloid. Rovnice (5.50) zní:

$$\frac{u_1^2}{p} + \frac{u_2^2}{q} = 0,$$

což v oboru $\mathbb{R}$ má řešení $(0, 0, u_3)$. Je zde tedy jediný asymptotický směr, který je (v souladu s větami 5.5.7 a 5.5.10) roven směru singulárnímu.

(d) Hyperbolický paraboloid. Rovnice (5.50) v tomto případě zní:

$$\frac{u_1^2}{p} - \frac{u_2^2}{q} = 0,$$

což lze rozložit v součin $\left(\frac{u_1}{\sqrt{p}} + \frac{u_2}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{u_1}{\sqrt{p}} - \frac{u_2}{\sqrt{q}}\right) = 0$. Řešením je sjednocení dvou dvojrozměrných podprostorů

$$[(-\sqrt{p}, \sqrt{q}, 0), (-\sqrt{p}, \sqrt{q}, 1)] \quad \text{a} \quad [(\sqrt{p}, \sqrt{q}, 0), (\sqrt{p}, \sqrt{q}, 1)],$$

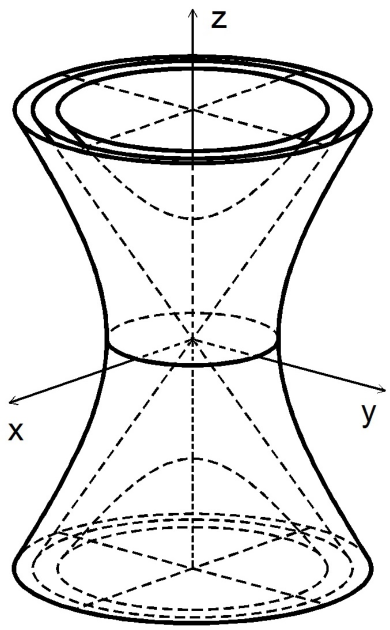
jejichž průnikem je singulární směr paraboloidu. Někdy se hovoří o tzv. *rovinách asymptotických směrů*[42] – srv. s pojmem „kuželová plocha asymptotických směrů".

(e) Kuželová plocha. Rovnice (5.50) v tomto případě zní:

$$\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} - \frac{u_3^2}{c^2} = 0,$$

[41] Užívá se též názvu *asymptotická kuželová plocha.*

[42] Viz též hlavní řezy, podkapitola 5.7.2, odstavec 5.7.2.5



Obr. 5.5.1

je tedy shodná s rovnicí pro hyperboloidy. Tzv. kuželová plocha asymptotických směrů je totožná s uvažovanou kuželovou plochou. Spojujeme-li tedy libovolný bod kuželové plochy s vrcholem (počátkem kanonické báze), dostáváme právě všechny asymptotické směry.
Povšimněte si, že hyperboloid jednodílný i dvojdílný a kuželová plocha s týmiž poloosami mají tutéž množinu asymptotických směrů.
Obrázek 5.5.1 tento fakt znázorňuje – „prostřední“ plocha je právě ona plocha kuželová (to, že jednodílný a dvojdílný hyperboloid vypadají právě znázorněným způsobem, se přesvědčíme při studiu jejich hlavních řezů (podkapitola 5.7.2)).

(f) Eliptická válcová plocha. Rovnice (5.50) má tvar:

$$\frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} = 0,$$

v oboru $\mathbb{R}$ má řešení $(0, 0, u_3)$. Je zde tedy jediný asymptotický směr a je zároveň směrem singulárním.

(g) Hyperbolická válcová plocha. Rovnice (5.50) nyní zní:

$$\frac{u_1^2}{a^2} - \frac{u_2^2}{b^2} = 0,$$

což (podobně jako v (d)) představuje dva dvojrozměrné podprostory:

$$[(a, b, 0), (a, b, 1)] \quad \text{a} \quad [(a, -b, 0), (a, -b, 1)],$$

protínající se v singulárním směru. I zde se hovoří o *rovinách asymptotických směrů*.

(h) Parabolická válcová plocha. Rovnice (5.50) nabývá tvaru:

$$u_2^2 = 0,$$

což představuje dvojrozměrný podprostor $[(1,0,0),(0,0,1)]$, který je totožný s podprostorem singulárních směrů.

(i) Dvojice různoběžných rovin. Rovnice (5.50) lze psát ve tvaru:

$$\frac{u_1^2}{a^2} - \frac{u_2^2}{b^2} = 0,$$ [43]

což (jako v (g)) představuje dva dvojrozměrné podprostory:

$$[(a,b,0),(a,b,1)] \quad \text{a} \quad [(a,-b,0),(a,-b,1)],$$

protínající se v singulárním směru. Jde o sjednocení zaměření rovin tvořících uvažovanou dvojici.

(j) Dvojice rovnoběžných rovin (vč. splývajících). Rovnice (5.50) nabývá tvaru:

$$u_2^2 = 0.$$

asymptotické směry tudíž vyplňují dvojrozměrný podprostor totožný s podprostorem singulárních směrů – jedná se o zaměření uvažovaných rovin.

(k) Přímka. V tomto případě existují kvadratické formy, které nejsou navzájem úměrné a proto musíme uplatnit odlišný postup.
Zvolme soustavu souřadnou tak, aby daná přímka byla osou z. Pak libovolná kvadratická forma má analytické vyjádření (viz (5.47))

$$\varphi(u_1,u_2,u_3) = f_{11}u_1^2 + 2f_{12}u_1u_2 + f_{22}u_2^2,$$

a tudíž směr sdružený vzhledem k této formě sám se sebou je právě každý směr $[(u_1,u_2,u_3)]$, pro nějž platí

$$f_{11}u_1^2 + 2f_{12}u_1u_2 + f_{22}u_2^2 = 0. \tag{5.51}$$

Snadno nahlédneme, že množina společných bodů $X = [x,y,0]$ uvažované kvadriky a roviny $z = 0$ je dána podmínkou:[44]

$$f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 + 2f_{14}x + 2f_{24}y = 0,$$

[43] V obecné rovnici dle podkapitoly 5.2.1, II.2.2.2. položme

$$\sqrt{|\lambda_1|^{-1}} = a, \ \sqrt{|\lambda_2|^{-1}} = b,$$

[44] Obecně budeme průnik roviny a kvadriky studovat v podkapitole 5.7.

což lze považovat za rovnici kuželosečky v rovině $z = 0$. Ta však je jednobodová, a tudíž (zdůvodněte!):

$$\det \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix} > 0.$$

Pak snadno odvodíme,[45] že množina řešení rovnice (5.51) je ve tvaru $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 \in \mathbb{R}$, tudíž existuje jediný směr sdružený sám se sebou vzhledem k libovolné kvadratické formě dané kvadriky, a to směr $[(0, 0, 1)]$, neboli směr uvažované přímky, který lze definovat jako její asymptotický směr.

Platí tudíž následující věta:

Věta 5.5.12 *Elipsoid nemá žádný asymptotický směr.*
Jednodílný i dvojdílný hyperboloid a kuželová plocha mají tzv. kuželovou plochu asymptotických směrů.
Eliptický paraboloid a eliptická válcová plocha mají jediný asymptotický směr totožný se směrem singulárním.
Asymptotické směry hyperbolického paraboloidu, hyperbolické válcové plochy a dvojice různoběžných rovin vyplňují sjednocení dvou dvojrozměrných podprostorů (jejichž průnikem je směr singulární)
Asymptotické směry parabolické válcové plochy a dvojice rovnoběžných rovin (vč. splývajících) vyplňují dvojrozměrný podprostor (totožný s podprostorem singulárních směrů).
Přímka má jediný asymptotický směr (totožný se směrem singulárním).

5.6 Vzájemná poloha přímky a kvadriky

V tomto odstavci se budeme zabývat pouze kvadrikami, které obsahují více než jeden bod – tj. těmi, pro něž jsme zavedli pojem asymptotický směr (ostatně problém vzájemné polohy přímky a bodu je triviální).

Postupovat budeme zcela analogicky jako v případě kuželoseček.

Označení 5.6.1 Je-li $\mathcal{K}$ kvadrika daná maticí $\mathbf{F} = (f_{ij})$, pak symboly F_1, F_2 a F_3 budou nadále označovat následující polynomy:

$$F_k(x, y, z) = f_{k1}x + f_{k2}y + f_{k3}z + f_{k4}, \quad 1 \leq k \leq 3. \tag{5.52}$$

Zvolme přímku p, kvadriku $\mathcal{K}$ a zkoumejme $p \cap \mathcal{K}$.
Buď $\mathcal{B}$ některá báze a nechť jsou $\mathcal{K}$ a p po řadě dány:

$$\mathcal{K}: \ \varphi(x, y, z) + 2f_{14}x + 2f_{24}y + 2f_{34}z + f_{44} = 0,$$

[45] Zcela analogicky jako v důkaze věty 4.6.13.

$$\begin{aligned} p: x &= x_0 + s_1 t \\ y &= y_0 + s_2 t \ . \\ z &= z_0 + s_3 t \end{aligned}$$

Dosazením za souřadnice x, y, z z parametrického vyjádření přímky do obecné rovnice kvadriky po úpravě získáme následující rovnici o neznámé t (proveďte si):

$$\begin{gathered} \varphi(s_1, s_2, s_3)t^2 + 2\left[F_1(x_0, y_0, z_0)s_1 + F_2(x_0, y_0, z_0)s_2 + F_3(x_0, y_0, z_0)s_3\right]t + \\ + F(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{gathered} \tag{5.53}$$

Diskusí řešení (5.53) obdržíme

1. Pokud p není asymptotického směru ($\varphi(s_1, s_2, s_3) \neq 0$ – viz (5.49)), je rovnice (5.53) kvadratická a může mít (v $\mathbb{R}$):

   (a) dva různé kořeny – tj. $p \cap \mathcal{K}$ je dvoubodový

   (b) jediný (dvojnásobný) kořen – tj. $p \cap \mathcal{K}$ je jednobodový,

   (c) žádný kořen – tj. $p \cap \mathcal{K}$ je prázdný.

2. Pokud p je asymptotického směru ($\varphi(s_1, s_2, s_3) = 0$), pak mohou nastat tyto případy:

   (a) $F_1(x_0, y_0 z_0)s_1 + F_2(x_0, y_0 z_0)s_2 + F_3(x_0, y_0, z_0)s_3 \neq 0$ – (5.53) má jediný kořen – tj. $p \cap \mathcal{K}$ je jednobodový,

   (b) $F_1(x_0, y_0 z_0)s_1 + F_2(x_0, y_0 z_0)s_2 + F_3(x_0, y_0, z_0)s_3 = 0 \wedge F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ – (5.53) nemá žádný kořen – tj. $p \cap \mathcal{K}$ je prázdný,

   (c) $F_1(x_0, y_0 z_0)s_1 + F_2(x_0, y_0 z_0)s_2 + F_3(x_0, y_0, z_0)s_3 = 0 \wedge F(x_0, y_0, z_0) = 0$ – kořenem (5.53) je libovolné $t \in \mathbb{R}$ – tj. $p \subseteq \mathcal{K}$.

Pojmenujme nyní vzájemné polohy přímky a kvadriky stejně, jako jsme to učinili v případě kuželoseček.

Definice 5.6.2 Buď p přímka směru $[\mathbf{s}]$ a nechť je dána kvadrika $\mathcal{K}$.

I. Je-li průnik $p \cap \mathcal{K}$ dvoubodový, nazývá se p *sečna kvadriky* $\mathcal{K}$.

II. Není-li $[\mathbf{s}]$ asymptotický směr kvadriky $\mathcal{K}$ a

1. je-li průnik $p \cap \mathcal{K}$ jednobodový, nazývá se p *tečna kvadriky* $\mathcal{K}$, společný bod pak *bod dotyku tečny*.
2. je-li průnik $p \cap \mathcal{K}$ prázdný, nazývá se p *nesečna kvadriky* $\mathcal{K}$.

III. Je-li $[\mathbf{s}]$ asymptotický směr kvadriky $\mathcal{K}$ a

1. je-li průnik $p \cap \mathcal{K}$ jednobodový, nazývá se p *asymptotická sečna kvadriky* $\mathcal{K}$,
2. je-li průnik $p \cap \mathcal{K}$ prázdný, nazývá se p *asymptota kvadriky* $\mathcal{K}$.

IV. Je-li $p \subseteq \mathcal{K}$, nazývá se p *tvořící přímka kvadriky* $\mathcal{K}$.

Protože definice užívá pouze geometrických vlastností přímky a kvadriky, jsou i definované vzájemné polohy *geometrickými vlastnostmi* dané přímky a kvadriky.

Nutné a postačující podmínky pro jednotlivé polohy jsou dány provedeným rozborem (body 1. , 2.).

Z rozboru provedeného před definicí 5.6.2 vyplývá:

Věta 5.6.3 *Každá přímka zaujímá k dané kvadrice právě jednu z definovaných vzájemných poloh.*

Z definice sečny plyne, že její směr je neasymptotický. Později (v podkapitole 5.8) vyřešíme otázku, zda ke každému neasymptotickému směru lze sečnu nalézt.

5.7 Vzájemná poloha roviny a kvadriky

V tomto odstavci vyšetříme průnik roviny a kvadriky (tzv. *řez*). Zejména si všimneme řezů rovinami kolmými na některý hlavní směr (tzv. *hlavní řez*), což nám umožní získat názornou představu o jednotlivých kvadrikách.

5.7.1 Řez kvadriky rovinou

Definice 5.7.1 Buď $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}_3$ kvadrika a $\alpha \subset \mathcal{E}_3$ rovina. Pak množina bodů $\mathcal{K} \cap \alpha$ se nazývá *řez kvadriky* $\mathcal{K}$ *rovinou* α.

Buď v některé bázi dána kvadrika $\mathcal{K}$ a rovina α obecnými rovnicemi:

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &: F(x,y,z) = 0\\ \alpha &: ax + by + cz + d = 0.\end{aligned}$$

Hledejme nyní analytické vyjádření množiny společných bodů $\mathcal{K} \cap \alpha$.
Nechť α není rovnoběžná např. se souřadnou osou z (tj. $c \neq 0$).
Pak pro libovolný bod $X = [x,y,z]$ platí:

$$X \in \mathcal{K} \cap \alpha \Leftrightarrow F(x,y,z) = 0 \wedge z = -\tfrac{1}{c}(ax + by + d) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{F}(x,y) = 0 \wedge z = -\tfrac{1}{c}(ax + by + d),$$

kde $\overline{F}(x,y)$ označuje polynom vzniklý z $F(x,y,z)$ dosazením za souřadnici z ze vztahu $z = -\frac{1}{c}(ax + by + d)$. Řez lze tedy psát takto

$$\mathcal{K} \cap \alpha = \{X = [x,y,z];\ \overline{F}(x,y) = 0 \wedge z = -\frac{1}{c}(ax + by + d)\}. \tag{5.54}$$

Jakou množinu tvoří body splňující $\overline{F}(x,y) = 0$? Této podmínce vyhovuje bod $X = [x,y,z]$ (kde z se „dopočte“ dle (5.54)) náležící řezu $\mathcal{K} \cap \alpha$ a všechny body $X' = [x,y,z']$, kde z' je libovolné reálné číslo – tedy všechny body *přímky procházející* $X \in \mathcal{K} \cap \alpha$ *rovnoběžné s osou* z.

Tudíž podmínkou

$$\overline{F}(x,y) = 0 \wedge z = 0 \tag{5.55}$$

je dán *rovnoběžný průmět řezu* $\mathcal{K} \cap \alpha$ *do rovinu* $z = 0$ *ve směru osy* z.

Zcela analogicky by se sestrojily průměty řezu i do ostatních souřadných rovin (s výjimkou případu, kdy α je rovnoběžná s příslušným směrem promítání).

Nyní vyšetřeme, jaké množiny mohou být řezem kvadriky.

Buď dána kvadrika $\mathcal{K}$ a rovina α. Zvolme afinní bázi tak, aby v ní rovina α měla obecnou rovnici $\alpha : z = 0$, $\mathcal{K}$ nechť je dána obecnou rovnicí $F(x,y,z) = 0$.

Pak řez $\mathcal{K} \cap \alpha$ je dle (5.54) dán podmínkou

$$\overline{F}(x,y) = 0 \wedge z = 0$$

$$\text{kde} \quad \overline{F}(x,y) = f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 + 2f_{14}x + 2f_{24}y + f_{44}. \tag{5.56}$$

Diskutujme (5.56)

1. Nechť f_{11}, f_{12}, f_{22} nejsou současně rovny nule.
   Pak se zřejmě jedná o kuželosečku, danou (v rovině α) obecnou rovnicí $\overline{F}(x,y) = 0$.
   Vyšetřovali bychom ji užitím její matice

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{14} \\ f_{12} & f_{22} & f_{24} \\ f_{14} & f_{24} & f_{44} \end{pmatrix}$$

.

2. Nechť $f_{11} = f_{12} = f_{22} = 0$.

   (a) Nechť f_{14}, f_{24} nejsou současně nulové. Pak je zřejmě řezem přímka daná (v rovině α) obecnou rovnicí $2f_{14}x + 2f_{24}y + f_{44} = 0$.

   (b) Nechť $f_{14} = f_{24} = 0$.

      (i) Je-li navíc $f_{44} = 0$, je řezem rovina α (proč?), tudíž (s přihlédnutím k třídění kvadrik) je $\mathcal{K}$ dvojicí rovin (jak zní obecná rovnice druhé z nich?).

      (ii) Je-li však $f_{44} \neq 0$, je řezem množina prázdná (proč?).

Odvodili jsme tedy platnost následující věty.[46]

Věta 5.7.2 *Řez kvadriky rovinou je kuželosečka, přímka, rovina, nebo prázdná množina.*

5.7.2 Soustavy hlavních řezů kvadrik

Definice 5.7.3 Buď $\mathcal{K}$ kvadrika. Pak každý řez kvadriky rovinou kolmou na některý hlavní směr kvadriky $\mathcal{K}$ se nazývá *hlavní řez kvadriky $\mathcal{K}$ příslušný tomuto hlavnímu směru*.

Ke studiu hlavních řezů využijeme skutečnosti, že k *libovolnému* hlavnímu směru kvadriky lze nalézt další dva hlavní směry, které s ním tvoří ortogonální trojici.[47]

Mějme tedy dánu kvadriku $\mathcal{K}$, trojici ortogonálních hlavních směrů $[\mathbf{a}_1], [\mathbf{a}_2], [\mathbf{a}_3]$ příslušných po řadě vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Předpokládejme dále, že jsme zvolili *kanonickou* bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ (kvadrika $\mathcal{K}$ tudíž má obecnou rovnici v *kanonickém tvaru* (viz podkapitola 5.2.1)).

Rozeberme nyní případy jednotlivých kvadrik $\mathcal{K}$, jež nejsou přímkou a obsahují alespoň dva body:

5.7.2.1 **Elipsoid** s poloosami a, b, c

Kanonická rovnice zní

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Uvažujme soustavu rovin α_h kolmých na směr $[\mathbf{a}_3]$ (tj. na osu z),

$$\alpha_h : \; z - h = 0, \quad h \in \mathbb{R}.$$

[46] Větu bylo možné formulovat stručněji – přímka i množina prázdná je kuželosečka.

[47] Kolika způsoby to lze provést – viz větu 5.5.9.

V souladu s (5.54) náleží $X = [x, y, z]$ řezu $\mathcal{K} \cap \alpha_h$, právě když

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \wedge z = h. \tag{5.57}$$

Průmět řezu $\mathcal{K} \cap \alpha_h$ do roviny $\{P; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ (tj. $z = 0$) je tedy kuželosečka $\overline{\mathcal{K}}$ o obecné rovnici v bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ (viz (5.56))

$$\overline{\mathcal{K}} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

Diskutujme tři případy:

(a) $|h| > c$. Pak je $\overline{\mathcal{K}}$ a tudíž i řez $\mathcal{K} \cap \alpha_h$ *prázdná množina*.

(b) $|h| = c$. Zde je $\overline{\mathcal{K}}$ jednobodová a dle (5.57) je řezem *bod* $[0, 0, c]$, resp. $[0, 0, -c]$, (singulární elipsy).

(c) $|h| < c$. Nyní je průmět $\overline{\mathcal{K}}$ elipsa o rovnici

$$\overline{\mathcal{K}} : \frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1.$$

Řezem rovinou α_h je tudíž *elipsa* o středu $S_h = [0, 0, h]$, jejíž osy mají směr hlavních směrů $[\mathbf{a}_1], [\mathbf{a}_2]$ (jsou rovnoběžné s osami x a y kanonické soustavy souřadné), poloosy jsou dány relacemi[48]

$$a_h = a\sqrt{\left(1 - \tfrac{h^2}{c^2}\right)}, \quad b_h = b\sqrt{\left(1 - \tfrac{h^2}{c^2}\right)}. \tag{5.58}$$

Maxima $a_h = a$, $b_h = b$ tudíž nabývají pro $h = 0$, tj. v případě, kdy α_h obsahuje *střed* elipsoidu (počátek kanonické báze). Dostali jsme tak geometrický význam poloos a, b uvažovaného elipsoidu.

Povšimněme si, že právě v případě $a = b$ (tj. $\lambda_1 = \lambda_2$ – viz vztah 5.20 pro poloosy elipsoidu) jsou tyto hlavní řezy kružnicemi (*rotační* elipsoid – definice 5.2.2).

Pro soustavu rovin β_k kolmých na $[\mathbf{a}_2]$ (tj. na osu y),

$$\beta_k : \ y - k = 0, \quad k \in \mathbb{R}$$

i soustavu rovin γ_l kolmých na $[\mathbf{a}_1]$ (tj. na osu x),

$$\gamma_l : \ x - l = 0, \quad l \in \mathbb{R}$$

obdržíme zcela analogické výsledky (odvoďte si vztahy pro poloosy elips řezů).

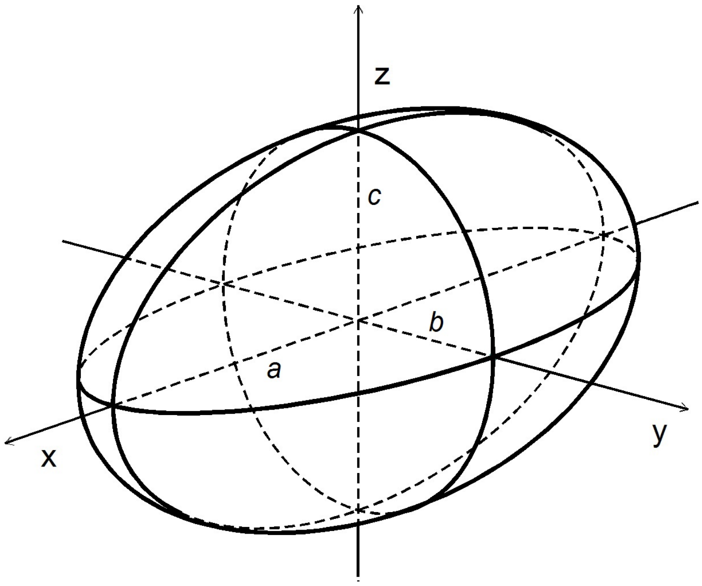
Elipsoid o poloosách a, b, c si tedy můžeme názorně představit jako plochu vzniklou sjednocením elips,[49] jejichž středy probíhají úsečku délky $2c$, hlavní i vedlejší poloosy a_h, b_h jsou

[48] Rovina α_h je rovnoběžná s průmětnou, proto se úsečky v α_h zobrazí ve skutečné velikosti - viz věta 2.4.6.

[49] Včetně dvou singulárních elips.

na tuto úsečku kolmé, u všech elips navzájem rovnoběžné a jejich délka je dána relacemi (5.58) v závislosti na vzdálenosti h středu elipsy a středu uvažované úsečky, takže jejich hlavní (vedlejší) vrcholy náleží jisté dvojici elips (o které elipsy jde?).

Elipsoid tedy můžeme znázornit takto:



Obr. 5.7.1

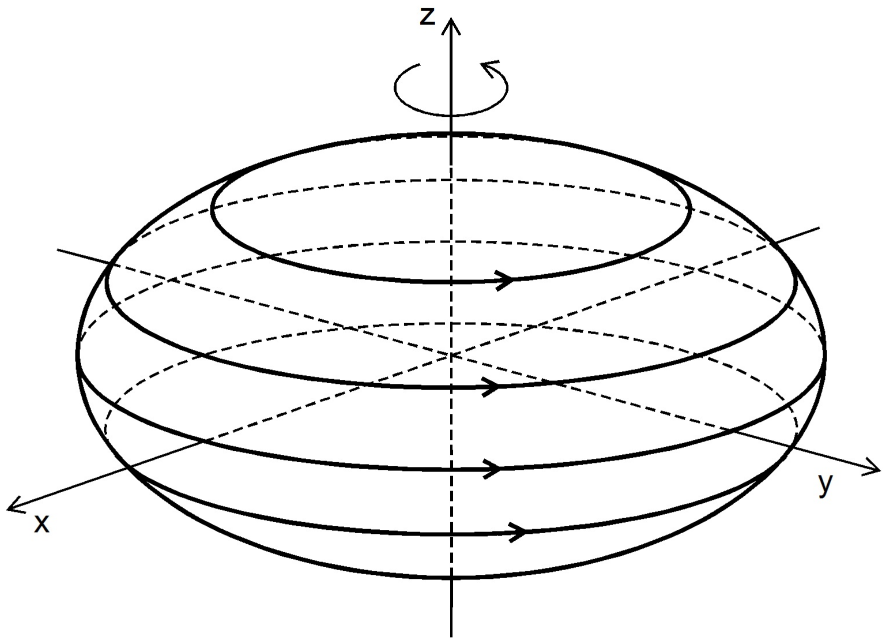
Ilustrujme nyní geometrický význam rovnosti dvou vlastních čísel – např. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ (promyslete si pro $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$).

Jednak jsme ukázali, že hlavní řezy příslušné směru odpovídajícímu třetímu vlastnímu číslu jsou právě v tomto případě kružnice.

Dále se snadno vidí, že v tomto případě jsou elipsy řezu rovinou β_k a rovinou γ_l *shodné* (mají tytéž délky poloos). To koresponduje s faktem (viz věta 5.5.9), že libovolný směr $[\mathbf{a}_1']$ kolmý na $\mathbf{a}_3$ je hlavním směrem kvadriky $\mathcal{K}$ – dostaneme pro něj soustavu řezů *shodnou* se soustavou hlavních řezů odpovídajících např. směru $[\mathbf{a}_1]$[50] – názorně tak vidíme, že hlavní směry příslušejícím vlastnímu číslu, jež je násobným kořenem, jsou „rovnocenné“.
Vidíme tedy, že *rotační* elipsoid si lze názorně představit tak, že necháme „rotovat“ (aniž bychom chtěli pojem rotace nyní precizovat) elipsu kolem některé její osy (tato osa pak bude udávat hlavní směr příslušný *jednoduchému* kořenu charakteristické rovnice).
Popsanou představu znázorňuje tento obrázek:

[50]Buď $\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2'$ libovolná ortonormální dvojice kolmá na $\mathbf{a}_3$. Obecná rovnice v bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \mathbf{a}_3 \rangle$ pak zní (srv. věta 5.3.9):

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Obr. 5.7.2

5.7.2.2 **Jednodílný hyperboloid** s poloosami a, b, c

Kanonická rovnice zní

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Připomeňme, že směr $[\mathbf{a}_3]$ odpovídá λ_3 s vlastností $\operatorname{sgn}\lambda_3 \neq \operatorname{sgn}\lambda_2 = \operatorname{sgn}\lambda_1$.

1. Uvažujme soustavu rovin α_h kolmých na směr $[\mathbf{a}_3]$ (tj. na osu z),

$$\alpha_h: \ z - h = 0, \quad h \in \mathbb{R}.$$

V souladu s (5.54) náleží $X = [x, y, z]$ řezu $\mathcal{K} \cap \alpha_h$, právě když

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \wedge z = h.$$

Průmět řezu $\mathcal{K} \cap \alpha_h$ do roviny $\{P; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ (tj. $z = 0$) je tedy kuželosečka $\overline{\mathcal{K}}$ o obecné rovnici v bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ (viz (5.56))

$$\overline{\mathcal{K}}: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

což je elipsa o rovnici

$$\overline{\mathcal{K}}: \ \frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1.$$

Řezem rovinou α_h (pro libovolné h) je proto *elipsa* o středu $S_h = [0,0,h]$, jejíž osy mají směr hlavních směrů $[\mathbf{a}_1], [\mathbf{a}_2]$ (jsou rovnoběžné s osami x a y), poloosy jsou dány relacemi

$$a_h = a\sqrt{\left(1+\tfrac{h^2}{c^2}\right)}, \quad b_h = b\sqrt{\left(1+\tfrac{h^2}{c^2}\right)}, \tag{5.59}$$

minima $a_h = a$, $b_h = b$ nabývají pro $h = 0$, tj. v případě, kdy α_h obsahuje *střed* hyperboloidu (počátek kanonické báze). Získáváme tak geometrický význam poloos a, b uvažovaného hyperboloidu.
Opět si všimněme, že právě v případě $a = b$ (tj. $\lambda_1 = \lambda_2$ - viz podkapitola 5.2.1) jsou tyto hlavní řezy kružnicemi (*rotační* hyperboloid – definice 5.2.2).

2. Mějme nyní soustavu rovin β_k kolmých na $[\mathbf{a}_2]$ (tj. na osu y),

$$\beta_k : \; y - k = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Analogicky jako v předešlých případech odvodíme, že průmětem řezu $\mathcal{K} \cap \beta_k$ do roviny $\{P; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ (tj. $y = 0$) je tedy kuželosečka $\overline{\mathcal{K}}$ o obecné rovnici v bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \rangle$ (viz (5.56))

$$\overline{\mathcal{K}} : \; \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}.$$

Je nutno diskutovat tři případy:

(a) $|k| > b$. Průmět $\overline{\mathcal{K}}$ je hyperbola o rovnici

$$\overline{\mathcal{K}} : \; \frac{z^2}{c^2\left(\frac{k^2}{b^2} - 1\right)} - \frac{x^2}{a^2\left(\frac{k^2}{b^2} - 1\right)} = 1$$

Řezem rovinou β_k je tedy *hyperbola* o středu $S_k = [0,k,0]$, jejíž hlavní osa má směr hlavního směru $[\mathbf{a}_3]$ (rovnoběžná s osou z), vedlejší pak směru $[\mathbf{a}_1]$ (rovnoběžná s osou x) a délky hlavní a vedlejší poloosy jsou dány vztahy (po řadě)

$$c_k = c\sqrt{\left(\tfrac{k^2}{b^2} - 1\right)}, \quad a_k = a\sqrt{\left(\tfrac{k^2}{b^2} - 1\right)}.$$

(b) $|k| = b$. Průmět $\overline{\mathcal{K}}$ kuželosečka o rovnici

$$\overline{\mathcal{K}} : \; \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Řezem rovinou β_k je proto *dvojice různoběžek (singulární hyperbola)* s průsečíkem $S_k = [0,k,0]$.[51] Jejich odchylka je určena poměrem $a{:}c$, čímž dostáváme geometrický význam třetí z poloos.

[51] Setkáváme se tak s konkrétním případem tvořící přímky.

(c) $|k| < b$. Průmět $\overline{\mathcal{K}}$ je hyperbola o rovnici

$$\overline{\mathcal{K}}: \ \frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{k^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{k^2}{b^2}\right)} = 1,$$

takže řez rovinou β_k je *hyperbola* o středu $S_k = [0, k, 0]$, jejíž hlavní osa má směr hlavního směru $[\mathbf{a}_1]$ (rovnoběžná s osou x), vedlejší pak směru $[\mathbf{a}_3]$ (rovnoběžná s osou z)[52] a délky hlavní a vedlejší poloosy jsou dány (po řadě) relacemi

$$a_k = a\sqrt{\left(1-\frac{k^2}{b^2}\right)}, \quad c_k = c\sqrt{\left(1-\frac{k^2}{b^2}\right)}.$$

Maxima $a_k = a$, $c_k = c$ nabývají pro $k = 0$, tj. v případě, kdy β_k obsahuje *střed* hyperboloidu, což (dalším způsobem) ilustruje geometrický význam poloos a, c hyperboloidu.

3. V případě řezů rovinami γ_l kolmými na $[\mathbf{a}_1]$ (tj. na osu x) obdržíme zcela analogické výsledky jako v případě 2

Vidíme, že (na rozdíl od elipsoidu) jsou zde dva typy soustav hlavních řezů – 5.7.2.2 případ 1 na straně jedné a 5.7.2.2 případy 2 a 3 na druhé – liší se v závislosti na *znaménku vlastního čísla*, jemuž hlavní směr přísluší.

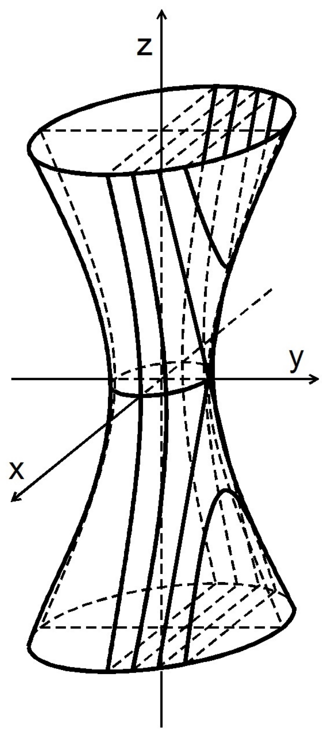
Jednodílný hyperboloid o poloosách a, b, c si tedy můžeme názorně představit jako plochu vzniklou sjednocením elips jejichž středy probíhají body jisté přímky, hlavní i vedlejší poloosy a_h, b_h jsou na tuto přímku kolmé, u všech elips navzájem rovnoběžné a jejich délka je dána relacemi (5.59) v závislosti na vzdálenosti h středu elipsy a pevně zvoleného bodu uvažované přímky, takže vrcholy těchto elips náleží jisté dvojici hyperbol s vedlejší osou v uvažované přímce (co je středem těchto hyperbol a jaké jsou délky jejich poloos?)

Popsanou představu znázorňuje obrázek 5.7.3, který navíc zachycuje hlavní řezy popsané v 5.7.2.2, část 2.

Opět můžeme ilustrovat geometrický význam rovnosti dvou vlastních čísel $\lambda_1 = \lambda_2$.

I zde jsou hlavními řezy příslušnými směru odpovídajícímu třetímu vlastnímu číslu právě v tomto případě kružnice.

[52] Srovnejte s případem (a)!



Obr. 5.7.3

Dále platí, že v tomto případě jsou hyperboly (ať již regulární či singulární) řezu rovinou β_k a rovinou γ_l pro $k = l$ *shodné* (regulární mají tytéž délky poloos,singulární pak touž odchylku). To opět koresponduje s faktem, že libovolný směr kolmý na $[\mathbf{a}_3]$ je hlavním směrem kvadriky $\mathcal{K}$ a ukazuje jistou „rovnocennost" hlavních směrů příslušejících vlastnímu číslu, jež je násobným kořenem charakteristické rovnice.

Rotační jednodílný hyperboloid si můžeme názorně představit tak, že necháme rotovat hyperbolu kolem její vedlejší osy (tato osa pak bude udávat hlavní směr příslušný vlastnímu číslu opačného znaménka, než mají zbylé dvě).

5.7.2.3 **Dvojdílný hyperboloid** s poloosami a, b, c

Kanonická rovnice zní

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Připomeňme, že směr $[\mathbf{a}_3]$ odpovídá λ_3 s vlastností $\mathrm{sgn}\lambda_3 \neq \mathrm{sgn}\lambda_2 = \mathrm{sgn}\lambda_1$.

1. Uvažujeme-li soustavu rovin α_h kolmých na směr $[\mathbf{a}_3]$ (tj. na osu z),

$$\alpha_h : \; z - h = 0, \quad h \in \mathbb{R}.$$

dojdeme zcela analogicky jako v předešlých případech (proveďte si) k závěru:

(a) $|h| > c$. Řezem rovinou α_h je *elipsa* o středu $S_h = [0, 0, h]$, jejíž osy mají směr hlavních směrů $[\mathbf{a}_1], [\mathbf{a}_2]$ (jsou rovnoběžné s osami x a y), poloosy jsou dány relacemi

$$a_h = a\sqrt{\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)}, \quad b_h = b\sqrt{\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)}. \tag{5.60}$$

Platí, že právě v případě $a = b$ (tj. $\lambda_1 = \lambda_2$) jsou tyto hlavní řezy kružnicemi (*rotační* hyperboloid).

(b) $|h| = c$. Řezem je *bod* $[0, 0, c]$, resp. $[0, 0, -c]$, (singulární elipsy).

(c) $|h| < c$. Řez $\mathcal{K} \cap \alpha_h$ je *prázdná množina*.

2. Uvážíme-li soustavu rovin β_k kolmých na $[\mathbf{a}_2]$ (tj. na osu y),

$$\beta_k : \ y - k = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

zjistíme, že řezem rovinou β_k je *hyperbola* o středu $S_k = [0, k, 0]$, jejíž hlavní osa má směr hlavního směru $[\mathbf{a}_3]$ (rovnoběžná s osou z), vedlejší pak směru $[\mathbf{a}_1]$ (rovnoběžná s osou x)[53] a délky hlavní a vedlejší poloosy jsou po řadě dány relacemi

$$c_k = c\sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{b^2}\right)}, \quad a_k = a\sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{b^2}\right)}.$$

Minima $c_k = c$ $a_k = a$, nabývají pro $k = 0$, tj. v případě, kdy β_k obsahuje *střed* hyperboloidu (počátek kanonické báze), což ilustruje geometrický význam poloos a, c tohoto hyperboloidu.

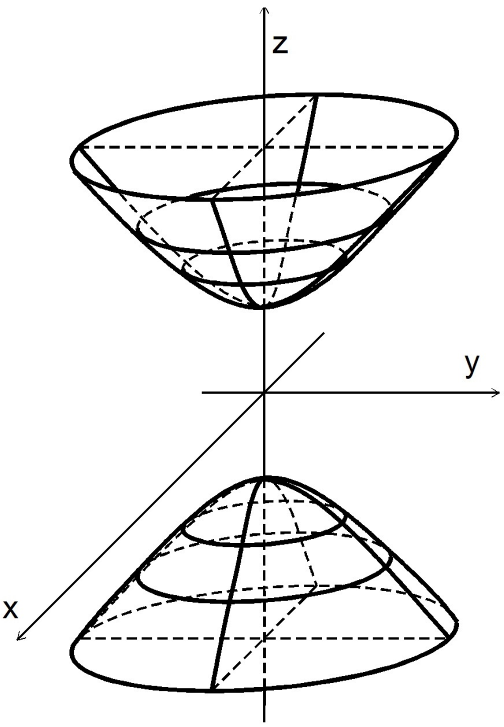
3. Pro řezy rovinami γ_l kolmými na $[\mathbf{a}_1]$ (tj. na osu x) obdržíme naprosto analogické výsledky jako v případě 2 (a geometrický význam poloosy b).

Stejně jako v případě jednodílného hyperboloidu, zde nalézáme dva typy soustav hlavních řezů – 5.7.2.3 případ 1 na straně jedné a 5.7.2.3 případy 2 a 3 na druhé – v závislosti na *znaménku vlastního čísla*, jemuž hlavní směr přísluší.

Dvojdílný hyperboloid o poloosách a, b, c si tedy můžeme názorně představit jako plochu vzniklou sjednocením elips jejichž středy probíhají body dané přímky s výjimkou vnitřních bodů jisté úsečky délky $2c$, hlavní i vedlejší poloosy a_h, b_h jsou na tuto přímku kolmé, u všech elips navzájem rovnoběžné a jejich délka je dána relacemi (5.60) v závislosti na vzdálenosti h středu elipsy a středu uvažované úsečky, následkem čehož vrcholy elips náleží jisté dvojici hyperbol s hlavní osou ležící v uvažované přímce (o které hyperboly se jedná?).

Dvojdílný hyperboloid můžeme tedy znázornit takto: (obr. 5.7.4)

[53] Směr hlavní i vedlejší poloosy je týž pro každé $k \in \mathbb{R}$ (srv. s případem jednodílného hyperboloidu).



Obr. 5.7.4

Rovnosti dvou vlastních čísel $\lambda_1 = \lambda_2$ se projeví analogicky jako v předešlých případech (promyslete si).

Rotační dvojdílný hyperboloid si můžeme názorně představit tak, že necháme rotovat hyperbolu kolem její hlavní osy [54] (tato osa pak udá hlavní směr příslušný vlastnímu číslu opačného znaménka, než mají zbylé dvě).

5.7.2.4 **Eliptický paraboloid** s parametry p, q

Kanonická rovnice zní

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Hlavní směr $[\mathbf{a}_3]$ odpovídá $\lambda_3 = 0$ ($\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$).

1. Uvažujeme-li soustavu rovin α_h kolmých na směr $[\mathbf{a}_3]$ (tj. na osu z),

$$\alpha_h: \ z - h = 0, \quad h \in \mathbb{R}.$$

   zjistíme (postupem zcela analogickým předešlým případům):

   (a) $h > 0$. Řezem rovinou α_h je *elipsa* o středu $S_h = [0, 0, h]$, jejíž osy mají směr hlavních směrů $[\mathbf{a}_1], [\mathbf{a}_2]$ (jsou rovnoběžné s osami x a y) a jejich poloosy se řídí vztahy

$$a_h = \sqrt{2ph}, \quad b_h = \sqrt{2qh}. \tag{5.61}$$

[54]Srovnejte s případem jednodílného hyperboloidu.

Tyto hlavní řezy jsou kružnicemi, právě když $p = q$ (tj. $\lambda_1 = \lambda_2$) – *rotační* eliptický paraboloid (nebo jen „rotační paraboloid“).

(b) $h = 0$. Řezem je *bod* $[0, 0, 0]$ (vrchol paraboloidu) – singulární elipsa.

(c) $h < 0$. Řez $\mathcal{K} \cap \alpha_h$ je *prázdná množina*.

2. Uvážíme-li soustavu rovin β_k kolmých na $[\mathbf{a}_2]$ (tj. na osu y),

$$\beta_k : \; y - k = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

zjistíme, že řezem rovinou β_k je *parabola* s vrcholem $V_k = [0, k, \frac{k^2}{2q}]$, jejíž hlavní osa má směr hlavního směru $[\mathbf{a}_3]$ (rovnoběžná s osou z), vrcholová tečna je směru $[\mathbf{a}_1]$ (je rovnoběžná s osou x) a parametr této paraboly je roven parametru p – všechny paraboly této soustavy hlavních řezů jsou tedy shodné.

3. Řezy rovinami γ_l kolmých na $[\mathbf{a}_1]$ (tj. na osu x) jsou navzájem shodné *paraboly*, každá s vrcholem $V_l = [l, 0, \frac{l^2}{2p}]$, osou směru hlavního směru $[\mathbf{a}_3]$ (rovnoběžná s osou z), vrcholová tečna je směru $[\mathbf{a}_2]$ (jsou rovnoběžná s osou y) a parametr této paraboly je roven parametru q.

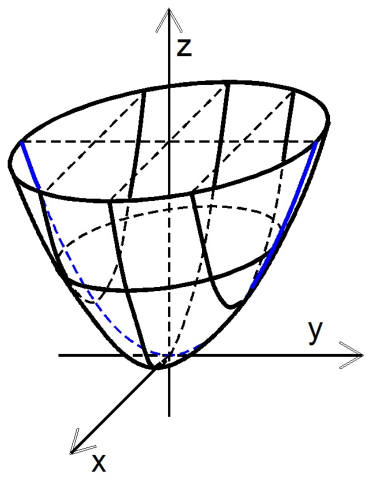
Paraboly hlavních řezů příslušných směru $[\mathbf{a}_1]$ i $[\mathbf{a}_2]$ náleží témuž poloprostoru.

V případě eliptického paraboloidu existují dva typy soustav hlavních řezů – v závislosti na tom, zda příslušný hlavní směr odpovídá *nulovému* (5.7.2.4 případ 1) nebo *nenulovému* vlastnímu číslu (5.7.2.4 případy 2 a 3).

Mějme dánu v jisté rovině parabolu o parametru q. Eliptický paraboloid o parametrech p, q si můžeme názorně představit jako plochu vzniklou sjednocením parabol ležících v navzájem rovnoběžných rovinách kolmých na uvažovanou rovinu, přičemž jejich osy jsou „souhlasně rovnoběžné“[55] s osou dané paraboly a jejich vrcholy této parabole náleží, parametr těchto parabol je roven p.

Eliptický paraboloid znázorněme následovně (obr. 5.7.5) – po parabole v rovině os y, z se pohybuje parabola ležící v rovinách $y = k$ (znázorněna v několika pozicích):

[55] Přesněji řečeno, vektory rozdílu ohniska a vrcholu jsou pro všechny paraboly souhlasné navzájem i s odpovídajícím vektorem zvolené paraboly.



Obr. 5.7.5

Rovnosti dvou vlastních čísel $\lambda_1 = \lambda_2$ se projeví jednak tím, že hlavní řezy příslušné směru $[\mathbf{a}_3]$ jsou kružnicemi, a dále tím, že parametr parabol hlavních řezů příslušných libovolnému směru kolmému na $[\mathbf{a}_3]$ je roven $p = q$.

Rotační eliptický paraboloid si můžeme názorně představit tak, že necháme rotovat parabolu kolem její osy (tato osa pak udá hlavní směr příslušný nulovému vlastnímu číslu).

5.7.2.5 **Hyperbolický paraboloid** s parametry p, q

Kanonická rovnice zní
$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$
Hlavní směr $[\mathbf{a}_3]$ odpovídá $\lambda_3 = 0$ ($\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$).

1. Uvažujeme-li soustavu rovin α_h kolmých na směr $[\mathbf{a}_3]$ (tj. na osu z),
$$\alpha_h : \; z - h = 0, \quad h \in \mathbb{R}.$$
zjistíme:

   (a) $h > 0$. Řezem rovinou α_h je *hyperbola* o středu $S_h = [0, 0, h]$, jejíž hlavní osa má směr hlavního směru $[\mathbf{a}_1]$ (rovnoběžná s osou x), vedlejší je směru $[\mathbf{a}_2]$ (rovnoběžná s osou y) a jejíž hlavní a vedlejší poloosa splňují relace (po řadě)
   $$a_h = \sqrt{2ph}, \quad b_h = \sqrt{2qh}.$$

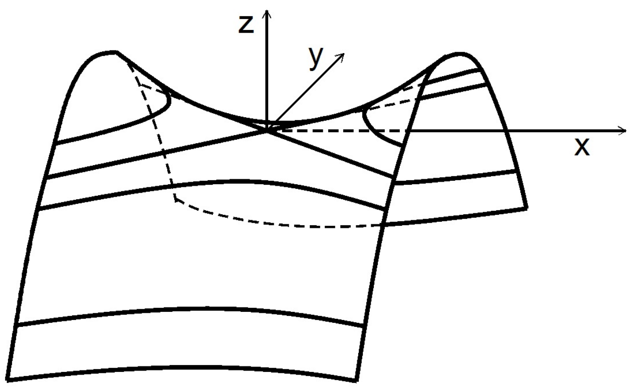
   (b) $h = 0$. Řezem je *dvojice různoběžek (singulární hyperbola)* protínajících se v počátku kanonické báze. V rovině $z = 0$ jsou dány obecnými rovnicemi
   $$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \quad \text{resp.} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0.$$

Uvážíme-li dvojici rovin o těchto rovnicích, dostáváme právě ony *roviny asymptotických směrů* zmíněné v podkapitole 5.5 – asymptotické směry jsou právě směry přímek spojujících průsečík různoběžek tohoto hlavního řezu s jednotlivými body zmíněných rovin.

(c) $h < 0$. Řezem rovinou α_h je *hyperbola* o středu $S_h = [0, 0, h]$, jejíž hlavní osa má směr hlavního směru $[\mathbf{a}_2]$ (rovnoběžná s osou y), vedlejší je směru $[\mathbf{a}_1]$ (rovnoběžná s osou x)[56] a jejíž hlavní a vedlejší poloosa splňují relace (po řadě)

$$a_h = \sqrt{2q|h|}, \quad b_h = \sqrt{2p|h|}.$$

Popsaná soustava hlavních řezů je znázorněna na obrázku 5.7.6



Obr. 5.7.6

2. Uvážíme-li soustavu rovin β_k kolmých na $[\mathbf{a}_2]$ (tj. na osu y),

$$\beta_k : \; y - k = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

zjistíme, že řezem rovinou β_k je *parabola* s vrcholem $V_k = [0, k, -\frac{k^2}{2q}]$, jejíž hlavní osa má směr hlavního směru $[\mathbf{a}_3]$ (rovnoběžná s osou z), vrcholová tečna je směru $[\mathbf{a}_1]$ (je rovnoběžná s osou x) a parametr této paraboly je roven parametru p – všechny paraboly této soustavy hlavních řezů jsou tedy shodné. Dále platí, že vektor $\mathbf{a}_3$ je souhlasný s $(F_k - V_k)$, F_k značí ohnisko příslušné paraboly.

3. Řezy rovinami γ_l kolmých na $[\mathbf{a}_1]$ (tj. na osu x) jsou navzájem shodné *paraboly*, každá s vrcholem $V_l = [l, 0, \frac{l^2}{2p}]$, osou směru hlavního směru $[\mathbf{a}_3]$ (rovnoběžná s osou z), vrcholovou tečnou směru $[\mathbf{a}_2]$ (rovnoběžná s osou y) a parametrem q. Vektor $\mathbf{a}_3$ je nesouhlasný s $(F_l - V_l)$,[57] F_k značí ohnisko příslušné paraboly.

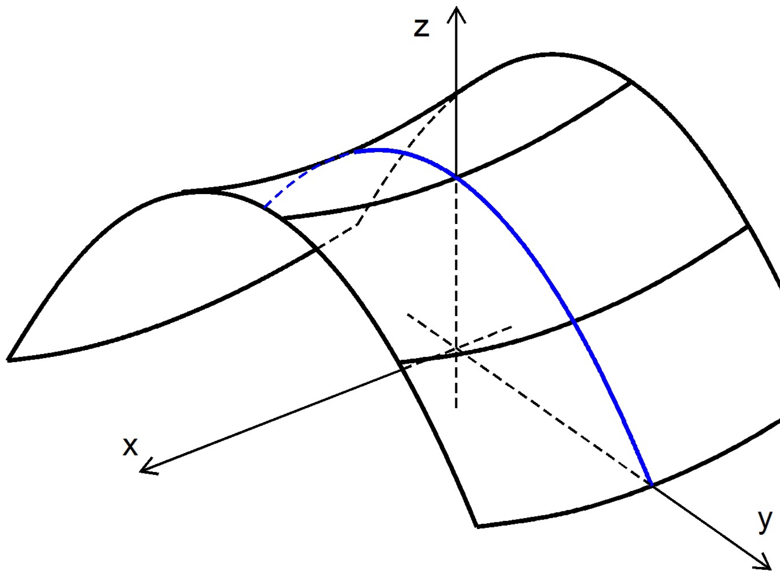
[56] Srovnejte s případem (a) – $h > 0$.

[57] Průmět řezu $\mathcal{K} \cap \gamma_l$ do roviny γ_0 má rovnici $y^2 = -2q\left(z - \frac{l^2}{2p}\right)$.

Osy parabol soustavy hlavních řezů příslušných směru $[\mathbf{a}_1]$ a parabol příslušných $[\mathbf{a}_2]$ jsou „nesouhlasně rovnoběžné“ – vektory $(F_k - V_k)$ a $(F_l - V_l)$ jsou vždy nesouhlasné.

Rovněž v případě hyperbolického paraboloidu je typ kuželosečky hlavního řezu určen tím, zda příslušný hlavní směr náleží nulovému či nenulovému vlastnímu číslu.

Hyperbolický paraboloid o parametrech p, q si můžeme opět názorně modelovat rovnoběžným posouváním paraboly (s parametrem p), jejíž vrchol se pohybuje po další parabole (s parametrem q) za podmínek stejných, jako v případě eliptického paraboloidu, avšak s tím rozdílem, že osy těchto dvou parabol jsou „nesouhlasně rovnoběžné“, což lze znázornit obrázkem 5.7.7 (po parabole v rovině os y, z se pohybuje parabola ležící v rovinách $y = k$ – je zachycena v několika pozicích):



Obr. 5.7.7

Podotkněme výslovně, že tuto plochu nelze (ani pro $p = q$) získat rotací nějaké křivky.

5.7.2.6 **Kuželová plocha** s poloosami a, b, c

Kanonická rovnice zní

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

přičemž směr $[\mathbf{a}_3]$ odpovídá λ_3 s vlastností $\mathrm{sgn}\lambda_3 \neq \mathrm{sgn}\lambda_2 = \mathrm{sgn}\lambda_1$.

1. Uvažujme soustavu rovin α_h kolmých na směr $[\mathbf{a}_3]$ (tj. na osu z),

$$\alpha_h : \; z - h = 0, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Rozlišíme dva případy:

(a) $h \neq 0$. V tom případě je řezem *elipsa* o středu $S_h = [0,0,h]$, jejíž osy mají směr hlavních směrů $[\mathbf{a}_1], [\mathbf{a}_2]$ (jsou rovnoběžné s osami x, y), poloosy jsou dány relacemi

$$a_h = a\tfrac{|h|}{c}, \quad b_h = b\tfrac{|h|}{c}, \tag{5.62}$$

tudíž právě v případě $a = b$ (tj. $\lambda_1 = \lambda_2$ jsou tyto hlavní řezy kružnicemi (*rotační* kuželová plocha).

(b) $h = 0$. V tomto případě je řezem *bod* – vrchol kuželové plochy *(singulární elipsa)*.

2. Uvažujme soustavu rovin β_k kolmých na $[\mathbf{a}_2]$ (tj. na osu y),

$$\beta_k: \ y - k = 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Diskutujme dva případy:

(a) $k \neq 0$. Řezem rovinou β_k je *hyperbola* o středu $S_k = [0,k,0]$, jejíž hlavní osa má směr hlavního směru $[\mathbf{a}_3]$ (rovnoběžná s osou z), vedlejší pak směru $[\mathbf{a}_1]$ (rovnoběžná s osou x) a délky hlavní a vedlejší poloosy jsou dány vztahy (po řadě)

$$c_k = c\tfrac{|k|}{b}, \quad a_k = a\tfrac{|k|}{b}.$$

(b) $k = 0$. Řezem rovinou β_k je *dvojice různoběžek (singulární hyperbola)* s průsečíkem ve vrcholu kuželové plochy. V rovině $y = 0$ jsou dány obecnými rovnicemi

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \quad \text{resp.} \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0,$$

jejich odchylka je tedy určena poměrem $a{:}c$, čímž dostáváme geometrický význam tohoto poměru (srv. věta 5.3.9).

3. Provedeme-li řezy rovinami γ_l kolmými na $[\mathbf{a}_1]$ (tj. na osu x), obdržíme zcela analogické výsledky jako v případě 2, vedeme-li řez rovinou γ_0, získáme geometrický význam poměru $b{:}c$.

V případě kuželové plochy tudíž existují dva typy soustav hlavních řezů – v závislosti na *znaménku vlastního čísla*, jemuž příslušný hlavní směr odpovídá.

Kuželovou plochu o poloosách a, b, c lze modelovat jako plochu vzniklou sjednocením elips jejichž středy probíhají body jisté přímky, hlavní i vedlejší poloosy a_h, b_h jsou na tuto přímku kolmé, u všech elips navzájem rovnoběžné a jejich délka je dána relacemi (5.62) v závislosti na vzdálenosti h středu elipsy a pevně zvoleného bodu uvažované přímky, takže vrcholy těchto elips náleží jisté dvojici různoběžných přímek s průsečíkem v onom zvoleném bodě.

V případě rovnosti dvou vlastních čísel $\lambda_1 = \lambda_2$ platí:

- Hlavními řezy příslušnými směru odpovídajícímu třetímu vlastnímu číslu jsou právě v tomto případě kružnice.

- Hyperboly (ať již regulární či singulární) hlavního řezu rovinou β_k a rovinou γ_l pro $k = l$ *shodné*, což opět ilustruje jistou „rovnocennost“ hlavních směrů příslušejících vlastnímu číslu, jež je násobným kořenem charakteristické rovnice.

Rotační kuželovou ploch si můžeme názorně představit tak, že necháme rotovat dvojici různoběžek kolem jejich osy (tato pak bude určovat hlavní směr příslušný vlastnímu číslu opačného znaménka, než mají zbylé dvě).

Hlavní řezy ostatních kvadrik si může čtenář provést samostatně.

Poznamenejme ještě, že na kvadrikách mohou existovat i kuželosečky jiných typů, než jsou typy hlavních řezů. Dokažte, že například řezem kuželové plochy $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ rovinou $y - z - 1 = 0$ je parabola.

Odlišnost typů kuželoseček, jež náleží jednotlivým soustavám hlavních řezů kvadrik nám, jak jsme již uvedli, poskytuje geometrickou interpretaci odlišnosti znamének, resp. nulovosti, vlastních čísel, jimž hlavní směry přísluší. To nám, jak uvidíme dále, umožní charakterizovat *počátek kanonické báze* (směry os kanonické báze jsme již popsali větou 4.6.9).

Následující úvahu provedeme jen pro paraboloid eliptický i hyperbolický a pro parabolickou válcovou plochu (pro ostatní kvadriky by ji bylo možno provést analogicky, avšak pro ně využijeme výsledků studia středů kvadrik v podkapitole 5.9).

Uvažujme, že jsme zkonstruovali *libovolnou kanonickou bázi* dané kvadriky $\mathcal{K}$.

- buď $\mathcal{K}$ eliptický paraboloid. Uvažme tu soustavu hlavních řezů, které nejsou parabolami (kterému hlavnímu směru odpovídá?). Mezi těmito hlavními řezy je *právě jeden* takový, jež protíná paraboloid v jediném bodě – počátku kanonické báze (ta byla zvolena libovolně!).
  Proto počátek kanonické báze je *jednoznačně určen* daným paraboloidem.

- buď $\mathcal{K}$ hyperbolický paraboloid, pak existuje *jediný hlavní řez*, který je dvojicí různoběžek – jejich průsečík je počátek kanonické báze. Proto i zde je počátek kanonické báze jednoznačně určen touto plochou.

- nechť $\mathcal{K}$ je parabolickou válcovou plochou. V soustavě hlavních řezů je opět *jediný hlavní řez*, který je přímkou (jde o osu z kanonické soustavy souřadné). Zde je tedy jednoznačně určena přímka, na níž počátek kanonické báze leží.

Tyto poznatky (spolu s větou 4.6.9) implikují:

Důsledek 5.7.4 *V případě parabolické válcové plochy je jednoznačně dána osa z a směry x, y kanonické soustavy souřadné.*

V případě hyperbolického paraboloidu a nerotačního eliptického paraboloidu existuje (až na orientaci os) jediná kanonická soustava souřadná.

V případě rotačního eliptického paraboloidu je jednoznačně dána osa z a rovina os x, y kanonické soustavy souřadné.

Z právě uvedeného bezprostředně plyne, že *vrchol paraboloidu* i *osa paraboloidu*[58] jsou jednoznačně určeny těmito plochami *(geometrické pojmy)*.

Příklad 5.7.5 Určete vrchol eliptického paraboloidu, který je v některé kartézské bázi dán rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 4x + 1 = 0$$

(srv. příklad 5.3.10).
Řešení:
Uvažme soustavu řezů hlavního směru, který odpovídá nulovému vlastnímu číslu, což je směr $[(1, 0, -1)]$. Roviny soustavy těchto řezů mají obecnou rovnici

$$\alpha_k : \ x - z + k = 0, \ k \in \mathbb{R}.$$

Obecná rovnice průmětu řezu $\mathcal{K} \cap \alpha$ do roviny $z = 0$ zní (podkapitola 5.7.1):

$$\overline{\mathcal{K}} : \ 4x^2 + y^2 + (4k + 4)x + (k^2 + 1) = 0.$$

Snadno zjistíme, že pro velký, resp. malý, diskriminant kuželosečky $\overline{\mathcal{K}}$ platí:

$$\overline{\Delta} = -8k, \quad \overline{\delta} > 0.$$

Odtud je patrno, že $\overline{\mathcal{K}}$ (a tím i hlavní řez) je skutečně eliptického typu a bude jednobodová, právě když $\overline{\Delta} = 0$, neboli $k = 0$. V tom případě má $\overline{\mathcal{K}}$ obecnou rovnici

$$4x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0,$$

což je bod o souřadnicích $x = -\frac{1}{2}, y = 0$. Dopočteme-li třetí souřadnici (jak?), zjišťujeme, že vrcholem paraboloidu je bod

$$V = [-\tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}].$$

[58] Viz definice 5.2.2.

5.8 Tečná rovina ke kvadrice. Tvořící přímky kvadriky

5.8.1 Tečná rovina ke kvadrice

Z rovin obsahujících daný bod kvadriky zde vybereme jistý speciální případ – *rovinu tečnou*. O tomto pojmu má jistě čtenář určitou intuitivní představu.

Uvažujme nadále kvadriky, které obsahují *aspoň dva body*.

Buď $\mathcal{K}$ kvadrika, T některý její bod. Nechť $\mathbf{F}$ je některá matice $\mathcal{K}$ v libovolné bázi a nechť $T = [x_0, y_0, z_0]$.

Zkoumejme nyní všechny tečny plochy $\mathcal{K}$, jejichž bodem dotyku je T. S přihlédnutím k úvahám v podkapitole 5.6 snadno odvodíme[59], že přímka $p = \{T, \mathrm{s}\}$ je touto tečnou (tj. rovnice (5.53) má dvojnásobný kořen), právě když:

- vektor s je neasymptotického směru
- pro souřadnice (s_1, s_2, s_3) vektoru s platí:

$$F_1(x_0, y_0, z_0)s_1 + F_2(x_0, y_0, z_0)s_2 + F_3(x_0, y_0, z_0)s_3 = 0. \tag{5.63}$$

Nyní vyšetřeme všechny tvořící přímky plochy $\mathcal{K}$ procházející bodem T. Jak jsme ukázali v podkapitole 5.6, bude přímka $p = \{T, \mathrm{s}\}$ tvořící přímkou (tj. $p \subseteq \mathcal{K}$), právě když (samozřejmě $F(x_0, y_0, z_0) = 0$):

- vektor s je asymptotického směru
- souřadnice (s_1, s_2, s_3) vektoru s vyhovují (opět) vztahu (5.63).

Nyní mohou nastat dva případy:

(a) existuje i, $1 \leq i \leq 3$, pro něž

$$F_i(x_0, y_0, z_0) \neq 0. \tag{5.64}$$

(b) pro všechna i, $1 \leq i \leq 3$, je

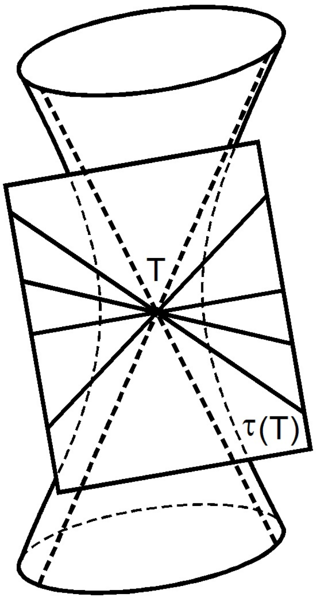
$$F_i(x_0, y_0, z_0) = 0. \tag{5.65}$$

Nastane-li případ (a), znamená to, že všechny vektory (neasymptotického i asymptotického směru) splňující (5.63) náleží jistému dvojrozměrnému podprostoru, neboli všechny tečny i tvořící přímky procházející bodem T leží v jisté *rovině určené bodem* T.

Případ (b) znamená, že podmínce (5.63) vyhovuje libovolný směr, tudíž libovolná přímka procházející bodem T je tečnou (je-li směru neasymptotického), nebo tvořící přímkou (je-li směru asymptotického), a tedy neexistuje rovina, v níž by všechny tyto přímky ležely.

Následující obrázek ilustruje případ (a) - plnými čarami jsou znázorněny tečny a čárkovaně tvořící přímky jdoucí bodem T. Symbolem $\tau(T)$ je označena rovina, v níž všechny tyto přímky leží.

[59] Srv. s odvozením podmínky (4.50) v podkapitole 5.2.1.



Obr. 5.8.1

Z právě uvedených úvah je zřejmé, že splnění podmínky (5.64), resp. (5.65), je *geometrickou vlastností* bodu T (a kvadriky $\mathcal{K}$), tj. nezáleží na volbě báze ani výběru matice dané kvadriky. Následující definice je tedy korektní.[60]

Definice 5.8.1 Buď $\mathcal{K}$ kvadrika, $\mathbf{F}$ její některá matice v libovolné bázi $\mathcal{B}$. Bod X ležící na $\mathcal{K}$, $X = [x, y, z]_{\mathcal{B}}$, pro nějž platí

$$F_i(x, y, z) = 0 \quad \text{pro všechna } i,\ 1 \leq i \leq 3,$$

se nazývá *singulární bod kvadriky* $\mathcal{K}$.

Každý jiný bod kvadriky $\mathcal{K}$ se nazývá *regulární bod kvadriky* $\mathcal{K}$.

Najděme nyní jiné vyjádření skutečnosti, že bod $X = [x, y, z]$ je singulárním bodem kvadriky $\mathcal{K}$ ($\mathbf{F}$ nechť označuje její matici).

Snadno odvodíme, že lze psát:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = x \cdot F_1(x, y, z) + y \cdot F_2(x, y, z) + z \cdot F_3(x, y, z) + \\ f_{14}x + f_{24}y + f_{34}z + f_{44}. \end{aligned} \tag{5.66}$$

Jestliže $X \in \mathcal{K}$ (tj. $F(x, y, z) = 0$) a je-li $F_i(x, y, z) = 0$, $1 \leq i \leq 3$, pak zřejmě platí $f_{14}x + f_{24}y + f_{34}z + f_{44} = 0$.

Jestliže $f_{14}x + f_{24}y + f_{34}z + f_{44} = 0$ a $F_i(x, y, z) = 0$, $1 \leq i \leq 3$, pak $F(x, y, z) = 0$, a tedy $X \in \mathcal{K}$.

[60] Nezávisle na úvahách, které jí předcházely, se o tom můžeme přesvědčit zkoumáním závislosti definičních podmínek (nejlépe ve znění (5.69)) na těchto volbách – proveďte si jako cvičení.

Označíme-li nadále

$$F_4(x,y,z) = f_{41}x + f_{42}y + f_{43}z + f_{44}, \tag{5.67}$$

můžeme odvozené formulovat jako větu:

Věta 5.8.2 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika, $\mathbf{F}$ její některá matice v libovolné bázi $\mathcal{B}$ a nechť $X = [x,y,z]_{\mathcal{B}}$ je libovolný bod prostoru. Pak platí: X je singulárním bodem kvadriky $\mathcal{K}$, právě když*

$$F_i(x,y,z) = 0,\ 1 \le i \le 4, \tag{5.68}$$

což lze ekvivalentně psát[61] *maticově*

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.69}$$

Přirozená je otázka existence singulárních bodů jednotlivých kvadrik.

Věta 5.8.3 *Obsahuje-li kvadrika alespoň jeden singulární bod, je singulární.*

Důkaz: Z existence singulárního bodu plyne existence netriviálního řešení[62] homogenní soustavy (5.69) a odtud nulovost $\det \mathbf{F}$ (tj. Δ). □

Hledat singulární body má tedy smysl jen na singulárních plochách.

Zvolme vhodně bázi (např. dle důsledku 5.4.7):

(a) $\mathcal{K}$ je kuželová plocha o rovnici $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Pak soustava rovnic (5.68) pro souřadnice singulárních bodů zní:

$$\begin{aligned} x \qquad &= 0 \\ y \quad &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

čili jediným singulárním bodem je bod $[0,0,0]$, tj. vrchol kuželové plochy.

(b) $\mathcal{K}$ je eliptická válcová plocha o rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Čtvrtá podmínka (5.68) zní $0x + 0y + 0z - 1 = 0$, neboli $\mathcal{K}$ nemá žádný singulární bod. Stejně tak pro válcovou plochu hyperbolickou i parabolickou je čtvrtá podmínka kontradikcí.

[61] Prověřte si.

[62] Čtvrtá složka řešení je přece 1.

(c) $\mathcal{K}$ je dvojice různoběžných rovin o rovnici $x^2 - y^2 = 0$. Zde soustava (5.68) přejde ve tvar

$$\begin{aligned} x \quad &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned},$$

což značí, že množinou singulárních bodů je průsečnice těchto rovin.

(d) $\mathcal{K}$ je dvojice rovnoběžných rovin o rovnici $y^2 = q$, $q > 0$. V tomto případě bude opět čtvrtá z podmínek (5.68) kontradikcí.

(e) je-li $\mathcal{K}$ (dvojnásobnou) rovinou (o rovnici $y^2 = 0$) či přímkou (o rovnici $x^2 + y^2 = 0$), ukážeme analogicky, že všechny její body jsou singulární.

Platí tedy následující věta:

Věta 5.8.4 *Všechny válcové plochy i dvojice rovnoběžných rovin obsahují pouze regulární body.*

Kuželová plocha obsahuje jediný singulární bod totožný s jejím vrcholem.[63]

Množina singulárních bodů dvojice různoběžných rovin je totožná s jejich průsečnicí.

Všechny body kvadriky $\mathcal{K}$ jsou singulární, právě když $\mathcal{K}$ je přímkou či rovinou.

Výsledky, které přinášejí věty 5.8.3 a 5.8.4, jsme jistě očekávali intuitivně na základě úvah předcházejících zavedení pojmu singulární bod – lze-li v některém bodě vést alespoň tři nekomplanární tečny, je bodem singulárním.

Nyní již můžeme přikročit k zavedení pojmu *tečná rovina* kvadriky.

Definice 5.8.5 Buď $\mathcal{K}$ kvadrika, T její libovolný bod. Pak každá rovina obsahující bod T a všechny tečny a tvořící přímky kvadriky $\mathcal{K}$ tímto bodem procházející se nazývá *tečná rovina ke kvadrice* $\mathcal{K}$, bod T se nazývá *bod dotyku*.

Z výsledků předcházejících zavedení pojmu regulární bod plyne:

Věta 5.8.6 *Každý regulární bod kvadriky $\mathcal{K}$ je bodem dotyku právě jedné tečné roviny k této kvadrice (budeme ji značit $\tau(T)$).*

V libovolném singulárním bodě kvadriky tečná rovina neexistuje.

Poznámka 5.8.7 Přímky ležící v tečné rovině $\tau(T)$ a procházející bodem T jsou buď tečny (nejsou-li asymptotického směru), nebo tvořící přímky (v opačném případě).

[63] Protože pojem singularity bodu je pojmem geometrickým, plyne odtud, že i vrchol kuželové plochy (tj. *počátek kanonické báze*) je určen touto plochou jednoznačně.

Například nemá-li kvadrika žádný asymptotický směr, pak jsou všechny tyto přímky tečnami (např. elipsoid), naopak v případě, kdy daným bodem neprochází žádná tečna (např. dvojice rovnoběžných či různoběžných rovin[64]), jde pouze o přímky tvořící. Obecně otázku existence tvořících přímek jdoucích regulárním bodem řeší podkapitola 5.8.2.

Otázkou nyní je nalezení obecné rovnice tečné roviny.[65]
Vraťme se na úvod této podkapitoly. Je-li T některý regulární bod kvadriky $\mathcal{K}$, pak (za označení zavedeného) zřejmě platí, že vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ náleží do zaměření roviny $\tau(T)$, právě když:

$$F_1(x_0, y_0)u_1 + F_2(x_0, y_0)u_2 + F_3(x_0, y_0)u_3 = 0. \tag{5.70}$$

Jak víme, náleží bod X rovině $\tau(T)$, právě když vektor $X - T$ náleží jejímu zaměření. Označíme-li $X = [x, y, x]$, dostáváme: $X \in \tau(T) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow F_1(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_2(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_3(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

což (protože alespoň jeden z koeficientů $F_i(x, y, z)$ je nenulový) představuje obecnou rovnici roviny $\tau(T)$.

Věta 5.8.8 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika daná v některé bázi maticí $\mathbf{F}$, $T = [x_0, y_0, z_0]$ její libovolný regulární bod. Pak obecná rovnice tečné roviny kvadriky $\mathcal{K}$ v bodě T zní:*

$$F_1(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_2(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_3(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{5.71}$$

Tuto obecnou rovnici lze vyjádřit v maticovém tvaru (prověřte):

$$(x_0, y_0, z_0, 1)\,\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{5.72}$$

Pojem „tečná rovina k ploše“ je jistě čtenáři znám z kurzu matematické analýzy, kde bylo odvozeno, že rovnice tečné roviny v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ ke grafu funkce definované implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ zní:[66]

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}(z - z_0) = 0.$$

Snadno se lze přesvědčit, že tento vztah je ekvivalentní vztahu (5.71), a proto i pojem tečná rovina – tak jak byl námi zaveden – koresponduje s pojmem známým z matematické analýzy.

[64]Každá přímka procházející regulárním bodem má s touto plochou buď právě dva společné body (sečna), nebo leží v některé z dvojice rovin (tvořící přímka).

[65]Srv. nalezení obecné rovnice tečny ke kuželosečce – věta 4.7.9

[66]Za jistých podmínek kladených na funkci $F(x, y, z)$, které však jsou v našem případě splněny.

5.8.2 Tvořící přímky kvadriky

V tomto odstavci budeme zkoumat existenci tvořících přímek procházejících zvoleným bodem na kvadrice. Je-li tento bod singulární, pak je tento problém vcelku triviální (viz předešlá podsekce). Dále tedy budeme hledat tvořící přímky procházející *regulárním* bodem plochy.

Z poznámky 5.8.7 (a definice tvořící přímky) plyne:

Věta 5.8.9 *Buď T libovolný regulární bod kvadriky $\mathcal{K}$.Pak tvořící přímky procházející libovolným bodem T jsou právě ty přímky, které náleží průniku (řezu) kvadriky $\mathcal{K}$ a tečné roviny $\tau(T)$.*

Naskýtá se nyní otázka, kolik tvořících přímek prochází regulárním bodem na té které kvadrice. To zjistíme tak, že vyšetříme řezy jednotlivých kvadrik tečnými rovinami vedenými v jejich regulárních bodech.

Uvažujme nyní kvadriku $\mathcal{K}$ a její libovolný regulární bod T. Zvolíme bázi $\mathcal{B}$ tak, aby jejím počátkem byl bod T a aby tečná rovina $\tau(T)$ byla souřadnou rovinou $z = 0$, čímž se studium řezu $\mathcal{K} \cap \tau(T)$ zjednoduší.

Předně – z toho, že $T = [0, 0, 0]$ náleží $\mathcal{K}$ plyne, že $f_{44} = 0$.

Nyní vyjádřeme obecnou rovnici (5.71) tečné roviny $\tau(T)$:

$$\tau(T): \; f_{14}x + f_{24}y + f_{34}z = 0,$$

která ovšem musí být nenulovým násobkem rovnice $z = 0$, tudíž platí

$$f_{14} = f_{24} = 0.$$

Bod T je regulární, proto $f_{34} \neq 0$.
Obecná rovnice kvadriky $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B} = \langle T; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$ tudíž zní:

$$f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 + 2f_{13}xz + 2f_{23}yz + f_{33}z^2 + 2f_{34}z = 0. \tag{5.73}$$

V souladu s podkapitolou 5.7.1 je řezem $\mathcal{K} \cap \tau(T)$ kuželosečka $\overline{\mathcal{K}}$ v rovině $z = 0$ daná v bázi $\langle T; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle$ obecnou rovnicí

$$f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2 = 0. \tag{5.74}$$

Označíme-li $\overline{\delta}$ malý diskriminant kuželosečky $\overline{\mathcal{K}}$, lze pro velký diskriminant Δ plochy $\mathcal{K}$ psát:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & 0 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & 0 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ 0 & 0 & f_{34} & 0 \end{vmatrix} = -(f_{34}^2)\overline{\delta}. \tag{5.75}$$

Odtud vyplývá:

- v případě $\Delta = 0$ je $\overline{\mathcal{K}}$ parabolického typu,
- v případě $\Delta > 0$ je $\overline{\mathcal{K}}$ hyperbolického typu,
- v případě $\Delta < 0$ je $\overline{\mathcal{K}}$ eliptického typu.

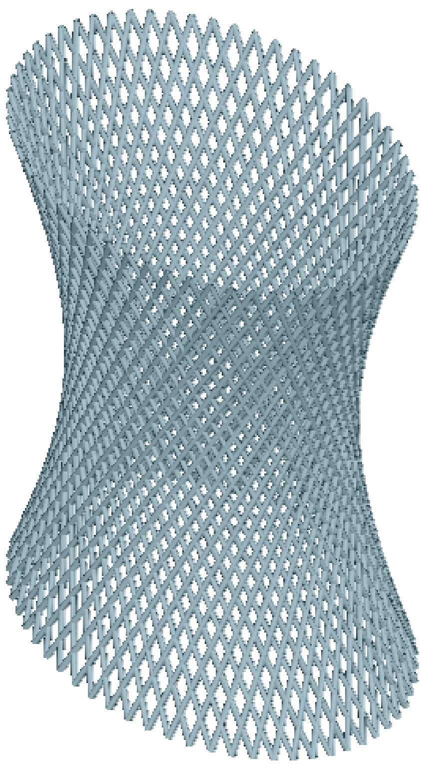
Z (5.74) dále plyne, že $\overline{\mathcal{K}}$ je singulární křivka a protože $T \in \overline{\mathcal{K}}$, je $\overline{\mathcal{K}}$ navíc neprázdná.

Užitím věty 5.3.7 a s přihlédnutím k větám 5.8.3, 5.8.4 odtud dostáváme:

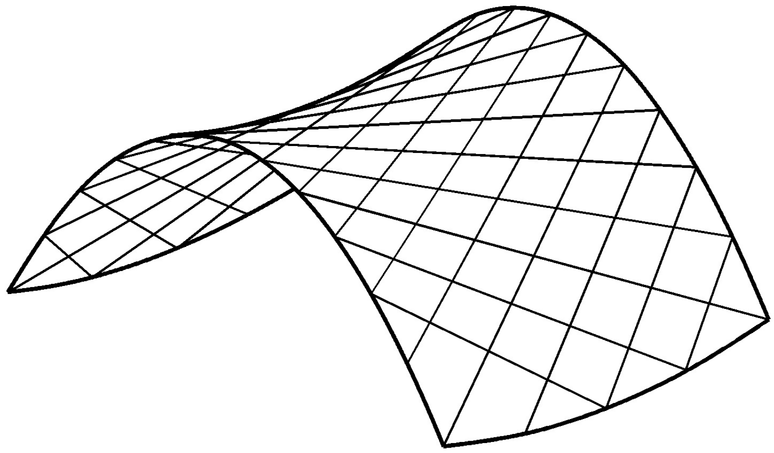
Věta 5.8.10 *Na elipsoidu, dvojdílném hyperboloidu a eliptickém paraboloidu tvořící přímky neexistují.*

Každým bodem jednodílného hyperboloidu a hyperbolického paraboloidu prochází dvojice tvořících přímek.

Každým bodem eliptické, hyperbolické i parabolické válcové plochy a každým regulárním bodem kuželové plochy prochází jediná tvořící přímka.



Obr. 5.8.2
Tvořící přímky procházející jednotlivými body jednodílného hyperboloidu.



Obr. 5.8.3
Tvořící přímky procházející jednotlivými body hyperbolického paraboloidu.

V závěru této podkapitoly nalezneme geometrickou interpretaci pojmu *asymptotický směr* (srv. věta 4.7.10 v případě kuželoseček) – jak víme, má každá sečna směr neasymptotický a naskýtá se otázka, zda lze ke každému neasymptotickému směru sečnu nalézt.

Uvažujme kvadriku $\mathcal{K}$, která obsahuje alespoň dva body, není přímkou ani rovinou (neboť v těchto případech sečna neexistuje).

Nechť je $\mathcal{K}$ dána ve zvolené bázi maticí $\mathbf{F}$ a nechť $\mathrm{s} = (s_1, s_2, s_3)$ je neasymptotického směru.

Buď X libovolný bod na $\mathcal{K}$, $X = [x_0, y_0, z_0]$ a předpokládejme, že přímka $p_X = \{X, \mathrm{s}\}$ není sečna – tudíž je tečna (proč?) s bodem dotyku X. Pro souřadnice bodu X a vektoru s platí (5.63), což lze upravit na tvar

$$a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_4 = 0, \quad \text{kde} \quad a_i = f_{i1}s_1 + f_{i2}s_2 + f_{i3}s_3,\ 1 \le i \le 4.$$

Vzhledem k tomu, že s je neasymptotického (a tudíž regulárního) směru, je alespoň jeden z koeficientů a_1, a_2, a_3 nenulový (souřadnice vektoru s nesplňují (5.46)). To ovšem znamená, že libovolný bod X plochy $\mathcal{K}$ leží v rovině o rovnici

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0,$$

což je ovšem spor s tím, že $\mathcal{K}$ obsahuje alespoň dva body a není přímkou či rovinou.

Následující tvrzení, které jsme právě dokázali, je hledanou geometrickou charakterizací pojmu *(ne)asymptotický směr*.

Věta 5.8.11 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika, která obsahuje alespoň dva body a není přímkou či rovinou. Pak libovolný směr z $\mathbf{V}$ je neasymptotickým směrem kvadriky $\mathcal{K}$ právě tehdy, když existuje sečna křivky $\mathcal{K}$ tohoto směru.*

5.9 Středy souměrnosti kvadrik

Kvadrikou budeme v podkapitole 5.9 rozumět *vždy* neprázdnou množinu.

Pojem *střed souměrnosti* (dále krátce *střed*) množiny bodů $\mathcal{M}$ (podmnožiny libovolného afinního prostoru) byl zaveden v definici 4.8.1.

Pojem *střed kvadriky* jsme již zavedli pro počátek kanonické báze některých kvadrik (v podkapitole 5.2), přičemž jsme ukázali, že je skutečně středem souměrnosti těchto ploch. Nyní vyřešíme otázku existence středů souměrnosti *obecně*.

Pojem *tětiva kvadriky* bychom zavedli zcela analogicky jako v případě kuželosečky (viz definice 4.8.2).

Poznámka 5.9.1 Z definice středu a tětivy plyne pro libovolnou kvadriku $\mathcal{K}$:

- Je-li některý bod středem všech tětiv kvadriky $\mathcal{K}$ jím procházejících, pak je středem $\mathcal{K}$ (nepostačí jen tětivy neasymptotického směru?).

- Je-li některý bod středem kvadriky $\mathcal{K}$, pak je středem všech tětiv neasymptotického směru jím procházejících.

Následující lemma bychom odvodili naprosto analogicky jako v případě kuželoseček.

Lemma 5.9.2 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika určená v některé bázi maticí* $\mathbf{F}$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ *libovolný vektor neasymptotického směru.*
Bod $M = [x_0, y_0, z_0]$ je středem tětivy směru $[\mathbf{s}]$ jím procházející, právě když jeho souřadnice vyhovují vztahu

$$F_1(x_0, y_0, z_0)s_1 + F_2(x_0, y_0, z_0)s_2 + F_3(x_0, y_0, z_0)s_3 = 0. \tag{5.76}$$

Následující věta formuluje nutné a postačující podmínky pro souřadnice středů kvadriky.

Věta 5.9.3 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika určená v některé bázi maticí* $\mathbf{F}$.
Pak bod $S = [x_0, y_0, z_0]$ je středem kvadriky $\mathcal{K}$, právě když jeho souřadnice jsou řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0 \\ F_2(x, y, z) &= 0\,. \\ F_3(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \tag{5.77}$$

Soustavu (5.77) lze rozepsat:[67]

$$\begin{array}{l} f_{11}x + f_{12}y + f_{13}z = -f_{14} \\ f_{21}x + f_{22}y + f_{23}z = -f_{24}\,. \\ f_{31}x + f_{32}y + f_{33}z = -f_{34} \end{array} \tag{5.78}$$

Důkaz:

1. Dokážeme dostatečnost podmínky (5.77).
   Buď $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ původní báze a ať $S = [x_0, y_0, z_0]_{\mathcal{B}}$ vyhovuje soustavě (5.77). Zvolme novou bázi $\mathcal{B}' = \langle S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Pak (analogicky jako v důkaze věty 4.8.5) odvodíme, že obecná rovnice kvadriky $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}'$ zní:

   $$f_{11}{x'}^2 + f_{22}{y'}^2 + f_{33}z'2 + 2f_{12}x'y' + 2f_{23}y'z' + 2f_{13}x'z' + f'_{44} = 0.$$

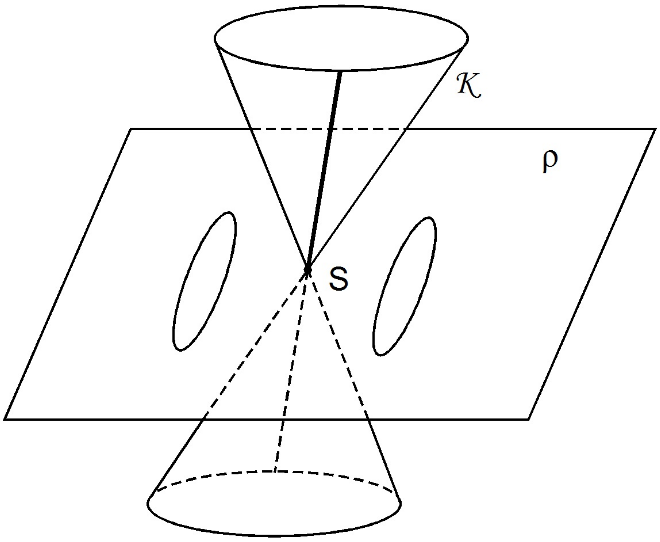
   Patrně $\mathcal{K}$ s každým bodem $X = [x', y', z']$ obsahuje i bod $Y = [-x', -y', -z']$, což značí, že bod $S = [0, 0, 0]_{\mathcal{B}}$, je středem souměrnosti $\mathcal{K}$.

2. Dokážeme nutnost podmínky (5.77).

   (a) Nechť $\mathcal{K}$ není jednobodová množina.
   Buď $S = [x_0, y_0, z_0]$ středem plochy $\mathcal{K}$ a nechť $[x_0, y_0, z_0]$ nevyhovuje soustavě (5.77) – tj. $F_i(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ pro alespoň jedno i, $1 \leq i \leq 3$.
   Potom podmínce (5.76) vyhovují směry jistého dvojrozměrného podprostoru, a tudíž (užitím lemmatu 5.9.2) všechny přímky neasymptotického směru, které na $\mathcal{K}$ vytínají tětivu se středem S, leží v jisté rovině ρ.
   Mohou nastat dvě možnosti:

   - další tětivy neexistují. To ovšem znamená, že $\mathcal{K}$ leží v rovině ρ (je tedy přímkou či rovinou) a obsahuje bod S. Pak vzhledem k větě 5.8.4 je bod S singulárním bodem $\mathcal{K}$.
   - existují další tětivy – jsou tedy asymptotického směru.
     Body kvadriky, které neleží v ρ, leží proto na tvořících přímkách procházejících bodem S (proč?). Vzhledem ke struktuře množiny asymptotických směrů (věta 5.5.12) proto tyto body leží buď na přímce jdoucí S, nebo na kuželové ploše s vrcholem S, nebo v rovině či dvojici různoběžných rovin jdoucích S. Ve všech těchto případech je však S singulárním bodem $\mathcal{K}$ (existují alespoň tři nekomplanární tečny jdoucí S[68]).
     (Případ, kdy by body mimo ρ ležely na kuželové ploše, znázorňuje obrázek 5.9.1. Dva oválné útvary v ρ představují body $\mathcal{K} \cap \rho$ (mohou být i prázdné).)

[67] Hodností matice soustavy je tudíž malá hodnost r kvadriky $\mathcal{K}$.
[68] Viz poznámka před definicí 5.8.5



Obr. 5.9.1

Ukázali jsme tedy, že v obou z uvažovaných možností je bod S bodem singulárním, a tudíž jeho souřadnice vyhovují soustavě (5.77), což je spor.

(b) Nechť $\mathcal{K}$ je jednobodová množina, $\mathcal{K} = \{X\}$.
V tomto případě je soustava (5.77) řešitelná jednoznačně ($r = 3$) a dále můžeme postupovat zcela analogicky jako v důkaze věty 4.8.5 (část 2(b)).

□

Důsledkem právě dokázané věty a definice singulárního bodu je:

Věta 5.9.4 *Náleží-li střed kvadrice, je jejím singulárním bodem (a tato je tedy singulární kvadrikou).*

Nyní budeme studovat množiny středů jednotlivých kvadrik.
Protože maticí soustavy (5.78) pro souřadnice středů kvadriky $\mathcal{K}$ je matice $\mathbf{F}_0$, zřejmě platí:

1. Jestliže $r = 3$, pak $\mathcal{K}$ má jediný střed (elipsoid, hyperboloid jednodílný i dvojdílný, kuželová plocha, jednobodová množina).
   Tímto jediným středem je tudíž *počátek kanonické báze* (viz podkapitola 5.2).

2. Jestliže $r = 2$, pak buď středy $\mathcal{K}$ vyplní přímku (tzv. *přímka středů*), nebo $\mathcal{K}$ žádný střed nemá.

   (a) Pro eliptickou i hyperbolickou válcovou plochu je jistě každý bod přímky $\{S, \mathbf{a}_3\}$ (S je počátek kanonické báze, $[\mathbf{a}_3]$ hlavní směr odpovídající $\lambda = 0$) jejím středem, a tudíž tyto kvadriky dalších středů nemají. Podobně pro dvojici různoběžných rovin (přímkou středů je jejich průsečnice) a přímku.

(b) Pro eliptický i hyperbolický paraboloid je hodnost $r = 2$ a $R = 4$, proto hodnost rozšířené matice soustavy (5.78) je rovna 3 (pokud by totiž po přidání sloupce pravých stran hodnost zůstala rovna 2, nemohla by se přidáním jednoho řádku (kdy dostaneme velkou hodnost) změnit na 4), a tudíž zde neexistuje žádný střed.

3. Je-li $r = 1$, pak středy $\mathcal{K}$ buď vyplní rovinu (tzv. *rovina středů*), nebo $\mathcal{K}$ žádný střed nemá.

   (a) V případě dvojice rovnoběžných rovin či roviny dvojnásobné je každý bod roviny $\{V; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ středem kvadriky (označení je opět převzato z podkapitoly 5.2.1), a tedy tyto kvadriky dalších středů nemají.

   (b) V případě parabolické válcové plochy je hodnost $r = 1$ a $R = 3$, proto (analogicky případu 2(b)) soustava (5.78) nemá řešení.

Právě získané poznatky shrňme do věty.

Věta 5.9.5 *Elipsoid, jednodílný i dvojdílný hyperboloid, kuželová plocha a jednobodová množina mají jediný střed.*

Eliptická i hyperbolická plocha válcová, dvojice různoběžných rovin a přímka mají přímku středů.

Dvojice rovnoběžných rovin a rovina jediná mají rovinu středů.

Ostatní kvadriky nemají žádný střed.

Definice 5.9.6 Buď $\mathcal{K}$ kvadrika. Jestliže $\mathcal{K}$ má jediný střed, nazývá se *středová kvadrika*. V opačném případě se nazývá *nestředová kvadrika*.[69]

Následující větu bychom dokázali analogicky, jako v případě kuželoseček.

Věta 5.9.7 *Buď $\mathcal{K}$ středová kvadrika určená v některé bázi $\mathcal{B}$ maticí $\mathbf{F}$. Pak pro souřadnice jejího středu S platí:*

$$S = \left[\frac{\mathcal{F}_{41}}{\delta}; \frac{\mathcal{F}_{42}}{\delta}; \frac{\mathcal{F}_{43}}{\delta}\right]_{\mathcal{B}}.$$

kde $\mathcal{F}_{4i}$ značí algebraický doplněk prvku f_{4i} matice $\mathbf{F}$, $1 \leq i \leq 3$.

Z věty 5.9.5 plyne

Důsledek 5.9.8 *Středová kvadrika má jednoznačně určen počátek kanonické báze.*

[69] V některé literatuře se středovými kvadrikami rozumí ty, jež mají aspoň jeden střed a nestředovými ty, jež nemají žádný střed.

Se zřetelem k větě 5.5.9 tak dostáváme, že středová kvadrika, která není rotační, má (až na orientaci os) jedinou kanonickou soustavu souřadnou.
V případě rotační[70] středové kvadriky (s výjimkou kulové plochy[71]) je jednoznačně (až na orientaci) určena jedna ze souřadných os a rovina, v niž leží zbývající osy kanonické soustavy souřadné.

Protože i v případě dalších kvadrik majících alespoň jeden střed je počátek kanonické báze jedním z jejich středů, plyne z věty 5.9.5 dále:

Důsledek 5.9.9 *Eliptická i hyperbolická plocha válcová mají jednoznačně (až na orientaci) určenu jednu ze souřadných os*[72]*(ta je* osou kvadriky *ve smyslu definice 5.2.2) a nejsou-li rotační, mají jednoznačně určeny i směry zbývajících souřadných os kanonické soustavy souřadné. Jsou-li rotační, mají jednoznačně (až na orientaci) určenu jednu ze souřadných os (osu kvadriky) a rovinu, s níž jsou zbývající osy kanonické soustavy souřadné rovnoběžné.*

Jaká bude situace pro dvojici rovnoběžných rovin a rovinu jedinou?

5.10 Průměrové roviny kvadrik

Pojem *průměrová rovina kvadriky sdružená s daným směrem*, který zde zavedeme, je přirozeným zobecněním pojmu *průměr kuželosečky*.

Nadále budeme uvažovat pouze kvadriky, jež *nejsou přímkou a obsahují alespoň dva body*.

5.10.1 Základní vlastnosti průměrových rovin

Úvodní úvaha bude analogická úvaze předcházející zavedení pojmu průměr kuželosečky.

Uvažujme kvadriku $\mathcal{K}$ určenou v některé bázi maticí $\mathbf{F}$.
Vyberme nyní libovolný *neasymptotický* směr $[\mathrm{s}]$ a veďme sečny plochy $\mathcal{K}$ tohoto směru. Budeme zkoumat množinu středů takto vzniklých tětiv.

Z lemmatu 5.9.2 plyne, že souřadnice libovolného takového bodu $M_0 = [x, y, z]$ musí splňovat vztah

$$F_1(x,y,z)s_1 + F_2(x,y,z)s_2 + F_3(x,y,z)s_3 = 0, \tag{5.79}$$

kde $\mathrm{s} = (s_1, s_2, s_3)$, což lze dále upravit na tvar (5.80):

$$\pi(\mathrm{s}): \quad \begin{array}{c} (f_{11}s_1 + f_{12}s_2 + f_{13}s_3)x + (f_{21}s_1 + f_{22}s_2 + f_{23}s_3)y + \\ +(f_{31}s_1 + f_{32}s_2 + f_{33}s_3)z + (f_{41}s_1 + f_{42}s_2 + f_{43}s_3) = 0 \end{array} \tag{5.80}$$

[70] Připomeňte si poznámku 5.5.8.
[71] Jaká je situace v případě kulové plochy?
[72] Jakého je směru?

Protože směr $[\mathbf{s}]$ je neasymptotický a tedy regulární, je (5.80) rovnicí *roviny* (proč?). Středy všech tětiv směru $[\mathbf{s}]$ tudíž leží v rovině $\pi(\mathbf{s})$, která je směrem $[\mathbf{s}]$ jednoznačně určena (jde tedy o *geometrickou vlastnost* daného směru a kvadriky).

Rovnici (5.80) lze tovněž vyjádřit v maticovém tvaru:

$$\pi(\mathbf{s}):\ (s_1, s_2, s_3, 0)\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{5.81}$$

což mj. znamená, že aritmetický vektor $(a_1, a_2, a_3) = (s_1, s_2 s_3)\mathbf{F}_0$ je trojicí koeficientů obecné rovnice roviny $\pi(\mathbf{s})$.[73]

Nechť nyní $[\mathbf{s}]$ je *asymptotický*, ale regulární.[74] Pak je (5.80) opět rovnicí jisté roviny. Nelze ji však interpretovat jako rovinu obsahující středy tětiv (proč?). Proto musíme prověřit, že jde skutečně o geometrický pojem – tedy že tato rovina je určena jednoznačně daným směrem a kvadrikou (tj. nezávisle na volbě báze a výběru matice kvadriky či reprezentanta daného směru). Čtenář si jistě ověří, že přejdeme-li od báze $\mathcal{B}$ k další bázi $\mathcal{B}'$ platí (užitím vztahů pro transformaci souřadnic bodů a vektorů a věty 5.1.5):

$$(s_1', s_2', s_3', 0)\mathbf{F}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (s_1, s_2, s_3, 0)\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

kde čárkami jsou označeny souřadnice týchž objektů v bázi $\mathcal{B}'$. Tím je ukázána nezávislost roviny π na volbě báze.
Protože pro uvažovanou kvadriku $\mathcal{K}$ platí věta 5.3.1 o jednoznačnosti, nezávisí rovina $\pi(\mathbf{s})$ ani na výběru matice v dané bázi (zdůvodněte); nezávislost na výběru reprezentanta daného směru je zřejmá.

Položme si nyní otázku, které vektory tvoří zaměření roviny $\pi(\mathbf{s})$.
Zřejmě vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2 u_3)$ náleží tomuto zaměření, právě když

$$\sum_{1\le i\le 3} (f_{i1}s_1 + f_{i2}s_2 + f_{i3}s_3)u_i = 0,$$

což (viz důsledek 5.5.4) je ekvivalentní tomu, že směry $[\mathbf{u}]$, $[\mathbf{s}]$ jsou vzhledem ke $\mathcal{K}$ sdružené.

Ukázali jsme, že následující definice je korektní.

Definice 5.10.1 Buď $\mathcal{K}$ kvadrika, $[\mathbf{s}]$ její regulární směr a nechť $\mathbf{F}$ je některá matice kvadriky $\mathcal{K}$ v libovolné bázi $\mathcal{B}$. Pak rovina $\pi(\mathbf{s})$ daná obecnou rovnicí (5.80), se nazývá *průměrová rovina kvadriky $\mathcal{K}$ sdružená se směrem* $[\mathbf{s}]$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)_{\mathcal{B}_0}$.

[73] Kdy bude tato trojice udávat souřadnice normálového vektoru?
[74] V případě, že s je singulárního směru, není (5.80) rovnicí žádné roviny (proč?).

Získali jsme geometrickou interpretaci pojmu „*sdružené směry*“:[75]

Věta 5.10.2 *Buď dána kvadrika $\mathcal{K}$. Pak platí, že směr $[\mathbf{v}]$ je vzhledem ke $\mathcal{K}$ sdružený s regulárním směrem $[\mathbf{s}]$, právě když náleží zaměření průměrové roviny $\pi(\mathbf{s})$.*

Odtud a z definice 5.5.5 plyne:

Věta 5.10.3 *Pro libovolnou kvadriku $\mathcal{K}$ platí:*

- *Směr $[\mathbf{u}]$ je singulárním směrem kvadriky $\mathcal{K}$, právě když je rovnoběžný se všemi průměrovými rovinami kvadriky $\mathcal{K}$.*
- *Směr $[\mathbf{u}]$ je regulárním asymptotickým směrem kvadriky $\mathcal{K}$, právě když je rovnoběžný s rovinou $\pi(\mathbf{u})$.*
- *Směr $[\mathbf{u}]$ je regulárním hlavním směrem kvadriky $\mathcal{K}$, právě když je kolmý na rovinu $\pi(\mathbf{u})$.*

Analogicky jako v případě průměrů kuželoseček studujme incidenci středu kvadriky a jejích průměrových rovin.

Buď $\mathcal{K}$ kvadrika určená v některé bázi maticí $\mathbf{F}$.

Je-li S jejím středem, pak z věty 5.9.3 snadno plyne, že S náleží průměrové rovině kvadriky $\mathcal{K}$ sdružené s libovolným směrem.

Obráceně, buď $S = [x_0, y_0, z_0]$ bod náležící všem průměrovým rovinám plochy $\mathcal{K}$. Pak pro každý regulární směr $[\mathbf{s}]$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, platí rovnost (5.79):

$$F_1(x, y, z)s_1 + F_2(x, y, z)s_2 + F_3(x, y, z)s_3 = 0.$$

Z množiny regulárních směrů nyní vybereme tři lineárně nezávislé.[76]
Souřadnice jejich reprezentantů musí vyhovovat této rovnosti, takže čísla $F_i(x_0, y_0, x_0)$, $1 \leq i \leq 3$ řeší jistou homogenní soustavu s nenulovým determinantem (jakou?). Odtud plyne, že

$$F_1(x_0, y_0, x_0) = F_2(x_0, y_0, x_0) = F_3(x_0, y_0, x_0) = 0,$$

což dle věty 5.9.3 značí, že S je středem plochy $\mathcal{K}$.

Zformulujme odvozené poznatky:

Věta 5.10.4 *Bod S je středem kvadriky $\mathcal{K}$ právě tehdy, když leží ve všech průměrových rovinách této kvadriky.*

[75] Srovnejte s větou 5.5.11.

[76] Dle věty 5.5.10 leží singulární směry v nejvýše dvojrozměrném podprostoru, proto požadovaná trojice existuje.

Uvažujme nyní dvě průměrové roviny $\pi(\mathbf{u})$, $\pi(\mathbf{v})$ téže plochy $\mathcal{K}$ (nechť je zvolena báze $\mathcal{B}$, $\mathbf{F}$ buď matice plochy $\mathcal{K}$).
Uvažujme vektor $\mathbf{w}$ regulárního směru, pro nějž $\mathbf{w} = t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v}$. Pak platí:

$$(w_1, w_2, w_3, 0)\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= t_1(u_1, u_2, u_3, 0)\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} + t_2(v_1, v_2, v_3, 0)\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix},$$

což značí, že obecná rovnice roviny $\pi(\mathbf{w})$ je lineární kombinací obecných rovnic rovin $\pi(\mathbf{u})$ a $\pi(\mathbf{v})$, a tedy platí následující tvrzení:

Věta 5.10.5 *Buď $[\mathbf{w}]$ libovolný regulární směr kvadriky $\mathcal{K}$ komplanární s některou dvojicí jejích regulárních směrů $[\mathbf{u}]$, $[\mathbf{v}]$. Pak průměrová rovina $\pi(\mathbf{w})$ náleží svazku rovin určeného rovinami $\pi(\mathbf{u})$, $\pi(\mathbf{v})$.*

Buďte $[\mathbf{u}]$, $[\mathbf{v}]$ různé směry a nechť dále $\pi(\mathbf{u})$, $\pi(\mathbf{v})$ jsou dvě *rovnoběžné* průměrové roviny téže plochy $\mathcal{K}$ ($\mathbf{F}$ označuje její matici v některé bázi).
To nastane, právě když (viz (5.81)) $\{\mathbf{u}\}\mathbf{F}_0 = t\{\mathbf{v}\}\mathbf{F}_0$, $t \neq 0$, což je ekvivalentní s $\{\mathbf{u} - t\mathbf{v}\}\mathbf{F}_0 = \{\mathbf{o}\}$. To ovšem značí existenci vektoru $\mathbf{w}$ singulárního směru, který je komplanární se směry vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ ($\mathbf{w} = u - t\mathbf{v}$).

Věta 5.10.6 *Dvě průměrové roviny téže kvadriky $\mathcal{K}$ sdružené s různými směry jsou rovnoběžné, právě když existuje singulární směr kvadriky $\mathcal{K}$ komplanární s touto dvojicí směrů.*

5.10.2 Průměrové roviny jednotlivých kvadrik

Uvažujme libovolnou **středovou** kvadriku $\mathcal{K}$.

Dle věty 5.10.4 musí každá průměrová rovina procházet jejím středem S.

Vyberme libovolnou rovinu ρ obsahující S a zkoumejme, je-li průměrovou rovinou plochy $\mathcal{K}$.
Zvolme nyní bázi, jejímž počátkem je bod S.
Pak pro matici $\mathbf{F}$ kvadriky $\mathcal{K}$ platí, že $f_{i4} = 0, 1 \leq i \leq 3$ (viz (5.78)), a obecná rovnice roviny ρ zní: $a_1x + a_2y + a_3z = 0$.

Hledáme $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ tak, aby $\rho = \pi(\mathbf{u})$. S přihlédnutím k (5.80) to nastane, právě když

$$f_{i1}u_1 + f_{i2}u_2 + f_{i3}u_3 = ta_i,\ 1 \leq i \leq 3,\ t \neq 0,$$ [77]

což představuje soustavu rovnic, která je pro středovou kvadriku řešitelná, a to jednoznačně, neboť matice této soustavy je $\mathbf{F}_0$.

Platí tedy věta:

Věta 5.10.7 *Buď $\mathcal{K}$ libovolná středová kvadrika. Pak platí:*

1. *Průměrové roviny kvadriky $\mathcal{K}$ jsou právě všechny roviny procházející jejím středem.*
2. *Každá průměrová rovina kvadriky $\mathcal{K}$ je sdružena s právě jedním směrem.*

Nyní uvažujme kvadriku mající **přímku středů**.

Opět víme, že každá její průměrová rovina tuto přímku o obsahuje.

Uvažujme nyní libovolnou rovinu ρ obsahující přímku o.

Zvolme nyní vhodně bázi (ne nutně kartézskou, viz důsledek 5.4.7) tak, aby $\mathcal{K}$ měla obecnou rovnici[78]

$$\mathcal{K}:\ x^2 \pm y^2 = 0,$$

a tudíž přímka o je osou z a ρ má proto rovnici

$$\rho:\ a_1x + a_2y = 0.$$

V souladu s (5.80) bude $\rho = \pi(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, právě když:

$$u_1 = ta_1,\ u_2 = ta_2,\ \text{resp. } u_2 = -ta_2,\ t \neq 0,\ \text{ a } u_3 \text{ je libovolné},$$

čímž dostáváme jednoznačně určený podprostor $[(u_1, u_2, 1), (u_1, u_2, 0)]$, který vyplňují vektory $\mathbf{u}$ hledaných směrů.

Věta 5.10.8 *Buď $\mathcal{K}$ libovolná kvadrika mající přímku středů. Pak platí:*

1. *Průměrové roviny kvadriky $\mathcal{K}$ jsou právě všechny roviny procházející obsahující přímku jejích středů..*
2. *Směry, s nimiž je každá průměrová rovina kvadriky $\mathcal{K}$ sdružena, vyplňují dvojrozměrný podprostor jednoznačně určený touto rovinou.*

Studujme kvadriku mající **rovinu středů**.

[77] Bez újmy na obecnosti lze předpokládat $t = 1$ (proč?).

[78] Uvědomme si, o které kvadriky se jedná.

Protože každá její průměrová rovina musí obsahovat všechny středy, plyne odtud:

Věta 5.10.9 *Rovina středů je jedinou průměrovou rovinou libovolné kvadriky mající rovinu středů (je tudíž sdružena s libovolným regulárním směrem této kvadriky).*

Nakonec si všimneme ploch, které **nemají střed**, což jsou paraboloidy (eliptický a hyperbolický) a parabolická válcová plocha.

- Buď $\mathcal{K}$ eliptický, resp. hyperbolický, paraboloid.
  Pak existuje báze (ne nutně kartézská), v níž má $\mathcal{K}$ rovnici

  $$\mathcal{K}: \; x^2 \pm y^2 = 2z,$$

  a směr $[(0,0,1)]$ je jejím (jediným) singulárním směrem (ověřte).

  V souladu s větou 5.10.3 je každá průměrová rovina s tímto směrem rovnoběžná.

  Uvažujme nyní libovolnou rovinu ρ rovnoběžnou se směrem $[(0,0,1)]$; její obecná rovnice zní

  $$\rho: \; a_1x + a_2y + a_3 = 0.$$

  Vzhledem k (5.80) je k tomu, aby $\rho = \pi(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, nutné a stačí položit $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$ (resp. $u_2 = -a_2$), $u_3 = -a_3$,[79] čímž obdržíme jednoznačně určený směr vektoru $\mathbf{u}$.

Věta 5.10.10 *Buď $\mathcal{K}$ eliptický či hyperbolický paraboloid. Pak platí:*

1. *Průměrové roviny paraboloidu $\mathcal{K}$ jsou právě všechny roviny rovnoběžné s jeho singulárním směrem.*
2. *Každá průměrová rovina paraboloidu $\mathcal{K}$ je sdružena s právě jedním směrem.*

- buď $\mathcal{K}$ parabolická válcová plocha.
  zvolme bázi, v níž má $\mathcal{K}$ rovnici

  $$\mathcal{K}: \; y^2 = 2x,$$

  a tedy $[(1,0,0),(0,0,1)]$ je podprostorem singulárních směrů.

  Podle věty 5.10.3 pak každá průměrová rovina musí mít toto zaměření, tudíž musí být rovnoběžná s rovinou $y = 0$.

[79] Opět až na nenulový násobek t, jako v předešlých případech.

Vezměme libovolnou rovinu ρ s tímto zaměřením – její obecná rovnice zní:

$$\rho: \; a_2 y + a_3 = 0.$$

S ohledem na (5.80) dostáváme, že $\rho = \pi(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, právě když

$$u_1 = -a_3, \; u_2 = a_2,^{80} \; u_3 \text{ je libovolné,}$$

čímž obdržíme jednoznačně určený dvojrozměrný podprostor $[(u_1, u_2, 0), (u_1, u_2, 1)]$, jemuž náleží právě všechny vektory $\mathbf{u}$.

Věta 5.10.11 *Buď $\mathcal{K}$ parabolická válcová plocha. Pak platí:*

1. *Průměrové roviny kvadriky $\mathcal{K}$ jsou právě všechny roviny jejichž zaměření je podprostor singulárních směrů plochy $\mathcal{K}$.*
2. *Směry, s nimiž je každá průměrová rovina plochy $\mathcal{K}$ sdružena, vyplňují dvojrozměrný podprostor jednoznačně určený touto rovinou.*

5.10.3 Báze sdružených směrů kvadriky

V závěru této kapitoly naznačíme způsob nalezení báze, v níž má kvadrika obecnou rovnici „jednoduchého tvaru“ (jejíž existenci zaručuje důsledek 5.4.7) právě pomocí průměrových rovin kvadriky, čímž podáme geometrickou interpretaci pojmu polární báze kvadratické formy kvadriky.

Nechť je kvadrika $\mathcal{K}$ dána v některé bázi $\mathcal{B} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ maticí $\mathbf{F}$.

Budeme se snažit především zkonstruovat bázi $\mathcal{B}' = \langle P; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$, v níž se malá matice $\mathbf{F}'_0$ diagonalizuje – $f'_{12} = f'_{23} = f'_{13} = 0$.
Protože $f'_{ij} = \Phi(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$, je k tomu nutné a stačí, aby $[\mathbf{a}_i]$, $[\mathbf{a}_j]$ byla dvojice směrů sdružených vzhledem ke $\mathcal{K}$.[81]

Poté přejdeme vhodnou volbou počátku k bázi $\mathcal{B}''$, v níž již matice nabude žádaného tvaru.

1. Nechť $\mathcal{K}$ je **středová kvadrika**, popř. kvadrika s **přímkou středů**.

   Zvolme vektorem $\mathbf{a}_1$ některý její regulární směr a sestrojme průměrovou rovinu $\pi(\mathbf{a}_1)$. V jejím zaměření vyberme libovolný vektor $\mathbf{a}_2$ regulárního směru a sestrojme rovinu $\pi(\mathbf{a}_2)$.[82] Protože obě průměrové roviny obsahují všechny středy plochy $\mathcal{K}$ (věta 5.10.4),

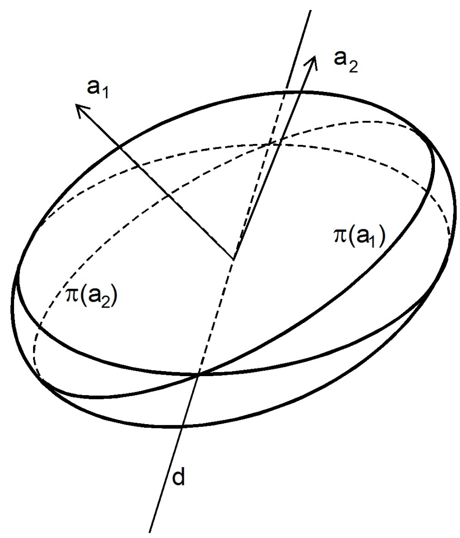
[80] Až na nenulový násobek.
[81] Tj. $\mathcal{B}'_0 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ je báze polární vzhledem k Φ_2.
[82] Zřejmě $\mathbf{a}_1$ náleží jejímu zaměření (věta 5.10.2).

protínají se v přímce d, jejíž směrový vektor označme $\mathbf{a}_3$. Přímka d zřejmě obsahuje všechny středy $\mathcal{K}$.

Získali jsme tak trojici lineárně nezávislých vektorů, přičemž vzhledem k větě 5.10.2 jsou dvojice směrů vektorů $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ i $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ sdružené vzhledem ke kvadrice $\mathcal{K}$ a tedy $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ tvoří hledanou bázi $\mathcal{B}'_0$ zaměření $\mathbf{V}$.
Obecná rovnice plochy $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}'$zní:

$$f'_{11}x'^2 + f'_{22}y'^2 + f'_{33}z'^2 + 2f'_{14}x' + 2f_{24}y' + 2f'_{34}z' + f'_{44} = 0.$$

Obráceně – má-li obecná rovnice uvažované plochy $\mathcal{K}$ v některé bázi tento tvar (kde $f'_{11} \neq 0 \neq f'_{22}$), pak zřejmě rovina $x' = 0$ je rovnoběžná s průměrovou rovinou prvého vektoru báze a rovina $y' = 0$ s průměrovou rovinou druhého vektoru báze (prověřte).



Obr. 5.10.1

Rozlišíme nyní dva případy:

(a) $\mathcal{K}$ je středová ($r = 3$).
V tomto případě je směr $[\mathbf{a}_3]$ regulární a rovina $\pi(\mathbf{a}_3)$ protíná přímku d ve středu S této plochy (proč?).
Dále je $f'_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq 3$ a tudíž koeficienty na pozicích (14), (24) a (34) vymizí, právě když umístíme počátek soustavy souřadné do středu S (promyslete si) a obecná rovnice v bázi $\mathcal{B}'' = \langle S; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ nabude tvaru

$$f''_{11}x''^2 + f''_{22}y''^2 + f''_{33}z''^2 + f''_{44} = 0.$$

Povšimněme si, že souřadné osy jsou průsečnicemi jednotlivých průměrových rovin – např. osa x'' je průsečnicí $\pi(\mathbf{a}_2) \cap \pi(\mathbf{a}_3)$.

(b) $\mathcal{K}$ má přímku středů ($r = 2$). Touto přímkou je ovšem přímka d směru $[\mathbf{a}_3]$, a tudíž (viz (5.78)) $f'_{33} = f'_{34} = 0$; přímka d je dána obecnými rovnicemi $f'_{11}x' + f'_{14} = 0 \wedge f'_{22}y' + f'_{24} = 0$.
Je proto patrno, že koeficienty na pozicích (14) a (24) vymizí jen tehdy, umístíme-li počátek soustavy souřadné do libovolného bodu přímky d (která se tak stává osou z'') – v bázi $\mathcal{B}'' = \langle S; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ nabude obecná rovnice tvaru

$$f''_{11}x''^2 + f''_{22}y''^2 + f''_{44} = 0.$$

S přihlédnutím k signaturám a příp. znaménku Δ jednotlivých ploch (viz věta 5.3.7) lze obecné rovnice uváděné výše ekvivalentně vyjádřit tak, jak jsou uvedeny v následujícím tvrzení (promyslete si):

Věta 5.10.12 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika.*

1. *Je-li $\mathcal{K}$ středová, $|\mathcal{K}| > 1$, pak má v bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnici následujícího typu ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$)*

   (a) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ *(je-li $\mathcal{K}$ elipsoid), nebo*

   (b) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ *(je-li $\mathcal{K}$ jednodílný hyperboloid), či*

   (c) $-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ *(je-li $\mathcal{K}$ dvojdílný hyperboloid), nebo*

   (d) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$ *(je-li $\mathcal{K}$ kuželová plocha),*

   právě když souřadné osy soustavy souřadné jsou průsečnicemi tří průměrových rovin plochy $\mathcal{K}$ sdružených s libovolnými směry, které jsou navzájem (po dvou) sdružené vzhledem ke $\mathcal{K}$.

2. *Má-li $\mathcal{K}$ přímku středů d, $\mathcal{K} \neq d$, pak má v bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnici následujícího typu ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$)*

   (a) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ *(je-li $\mathcal{K}$ eliptická válcová plocha), nebo*

   (b) $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ *(je-li $\mathcal{K}$ hyperbolická válcová plocha), nebo*

   (c) $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ *(je-li $\mathcal{K}$ dvojice různoběžných rovin)*

   právě když souřadné roviny $x = 0$, $y = 0$ jsou průměrovými rovinami plochy $\mathcal{K}$ sdruženými s libovolnými směry, které jsou navzájem sdružené vzhledem ke $\mathcal{K}$.

2. Má-li $\mathcal{K}$ rovinu středů (tj. je-li dvojicí rovnoběžných rovin (vč. splývajících)), je zřejmě řešení tohoto problému triviální

3. Nechť $\mathcal{K}$ **nemá střed**.

- $\mathcal{K}$ je eliptický, resp. hyperbolický, paraboloid ($r = 2$)

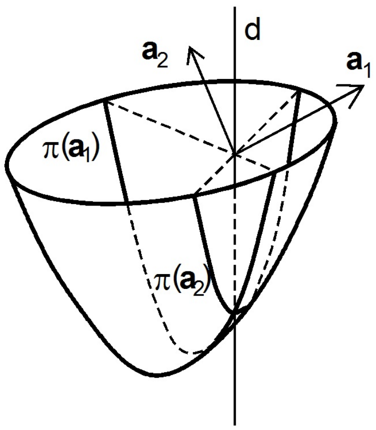
  Analogicky jako v případě 1. zvolíme vektorem $\mathbf{a}_1$ některý regulární směr (resp. navíc neasymptotický[83]) a sestrojíme průměrovou rovinu $\pi(\mathbf{a}_1)$. V jejím zaměření vyberme libovolný vektor vektor $\mathbf{a}_2$ regulárního směru a sestrojme rovinu $\pi(\mathbf{a}_2)$. Do zaměření obou rovin náleží (dle věty 5.10.3) jediný singulární směr paraboloidu – označme jej $[\mathbf{a}_3]$. Vektory $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ však nejsou kolineární (proč?) a jsou proto bází zaměření roviny $\pi(\mathbf{a}_1)$. Protože $\mathbf{a}_1$ není asymptotický, nenáleží do zaměření $\pi(\mathbf{a}_1)$ (věta 5.10.3), a tudíž $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ jsou lineárně nezávislé. Proto (v souladu s větou 5.10.6) nejsou roviny $\pi(\mathbf{a}_1)$ a $\pi(\mathbf{a}_2)$ rovnoběžné a protínají se tudíž v přímce d (singulárního směru).[84] Lze snadno odvodit, že ani vektor $\mathbf{a}_2$ není asymptotického směru.

  Obdrželi jsme bázi $\mathcal{B}'_0 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ zaměření $\mathbf{V}$, která (ze stejných důvodů jako v případě 1.) vyhovuje stanoveným podmínkám a obecná rovnice plochy $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}'$ zní:

  $$f'_{11}{x'}^2 + f'_{22}{y'}^2 + 2f'_{14}x' + 2f_{24}y' + 2f'_{34}z' + f'_{44} = 0.$$

  neboť vzhledem k singularitě $\mathbf{a}_3$ je $f'_{33} = \Phi(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3) = 0$.

  Obráceně – nabývá-li obecná rovnice paraboloidu v některé bázi takovýto tvar ($f'_{11} \neq 0 \neq f'_{22}$), pak rovina $x' = 0$ je zřejmě rovnoběžná s průměrovou rovinou prvého vektoru báze a rovina $y' = 0$ s průměrovou rovinou druhého vektoru báze (prověřte).



Obr. 5.10.2

V případě volby počátku báze bodem $V = [-\frac{f'_{14}}{f'_{11}}, -\frac{f'_{24}}{f'_{22}}, v'_3]_{\mathcal{B}'}$ nabývá obecná

[83] V případě eliptického paraboloidu je splněno automaticky (proč?).

[84] Srv. s případem 1., má-li $\mathcal{K}$ přímku středů.

rovnice paraboloidu $\mathcal{K}$ tvaru[85]

$$f''_{11}x''^2 + f''_{22}y''^2 + 2f''_{34}z'' + f''_{44} = 0,$$

což je ekvivalentní s tím, že bod V je libovolným bodem průsečnice d, neboť tato je dána obecnými rovnicemi (viz (5.80)):

$$f'_{11}x' + f'_{14} = 0 \wedge f'_{22}y' + f'_{24} = 0.$$

Právě v případě, kdy za bod V zvolíme průsečík $d \cap \mathcal{K}$ (který nepochybně existuje), bude obecná rovnice v bázi $\mathcal{B}'' = \langle V; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ znít:

$$f''_{11}x''^2 + f''_{22}y''^2 + 2f''_{34}z'' = 0.$$

- $\mathcal{K}$ je parabolická válcová plocha ($R = 3, r = 1$).
  Zvolíme vektorem $[\mathbf{a}_2]$ některý regulární směr a opět sestrojíme průměrovou rovinu $\pi(\mathbf{a}_2)$. Užitím věty 5.10.3 (a věty 5.5.11) je její zaměření totožné s (dvojrozměrným) podprostorem singulárních směrů této plochy. Vybereme tedy v zaměření roviny $\pi(\mathbf{a}_2)$ dva libovolné nekolineární vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$.
  Získáváme tak bázi $\mathcal{B}'_0 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ zaměření $\mathbf{V}$, která zřejmě vyhovuje stanoveným podmínkám,[86] takže obecná rovnice plochy $\mathcal{K}$ v bázi $\mathcal{B}'$ zní:

$$f'_{22}y'^2 + 2f'_{14}x' + 2f_{24}y' + 2f'_{34}z' + f'_{44} = 0,$$

  neboť vzhledem k singularitě $[\mathbf{a}_1]$, $[\mathbf{a}_3]$ je $f'_{11} = f'_{33} = 0$.
  Obráceně – je-li obecná rovnice parabolické válcové plochy v některé bázi takovéhoto tvaru ($f'_{22} \neq 0$), pak rovina $y' = 0$ je zřejmě rovnoběžná s průměrovou rovinou druhého vektoru báze.
  Volba počátku báze bodem $V = [v'_1, -\frac{f'_{24}}{f'_{22}}, v'_3]_{\mathcal{B}'}$ (pro libovolné $v'_1, v'_3 \in \mathbb{R}$) je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby rovnice plochy $\mathcal{K}$ zněla:

$$f''_{22}y''^2 + 2f''_{14}x'' + 2f''_{34}z'' + f''_{44} = 0,$$

  což je ekvivalentní situaci, kdy bod V je libovolným bodem průměrové roviny $\pi(\mathbf{a}_2)$, jelikož tato je dána rovnicí (viz (5.80)):

$$f'_{22}y' + f'_{24} = 0.$$

  Koeficient na pozici (44) vymizí, právě když bod V bude libovolným bodem průniku $\pi(\mathbf{a}_2) \cap \mathcal{K}$ (což je přímka). V případě takovéto volby báze automaticky platí:

[85] Pro $v'_3 = 0$ je $f''_{34} = f'_{34}$.

[86] I směry vektorů $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_3$ jsou pochopitelně sdružené(proč?).

$$\text{buď } f''_{14} = 0, \text{ nebo } f''_{34} = 0,$$

protože musí být splněno $R = 3 \wedge r = 1$ (napište si příslušnou matici plochy $\mathcal{K}$). Obecná rovnice tedy v bázi $\mathcal{B}''$ $\langle V; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ nabývá tvaru:[87]

$$f''_{22} y''^2 + 2 f''_{14} x'' = 0.$$

Odvozené poznatky shrňme do věty (tvary obecných rovnic jsme opět získali s přihlédnutím k větě 5.3.7):

Věta 5.10.13 *Buď $\mathcal{K}$ kvadrika, jež nemá střed.*

1. *Je-li $\mathcal{K}$ eliptickým či hyperbolickým paraboloidem, má v bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnici následujícího typu ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$)*
   - *(a) $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = z$ (jde-li o eliptický paraboloid), nebo*
   - *(b) $\frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta} = z$ (jde-li o hyperbolický paraboloid),*

   právě když souřadné roviny $x = 0$, $y = 0$ jsou průměrovými rovinami plochy $\mathcal{K}$ sdruženými s libovolnými neasymptotickými směry, které jsou sdružené vzhledem ke $\mathcal{K}$, počátek této soustavy souřadné náleží paraboloidu $\mathcal{K}$ a orientace osy z je vhodně zvolena[88].

2. *Je-li $\mathcal{K}$ parabolickou válcovou plochou, má v bázi $\mathcal{B}$ obecnou rovnici typu $y^2 - 2\epsilon x = 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, právě když souřadná rovina $y = 0$ je průměrovou rovinou plochy $\mathcal{K}$ sdruženou s libovolným (regulárním) směrem a počátek této báze náleží ploše $\mathcal{K}$*

Poznámka 5.10.14 Přejdeme-li v bázi $\mathcal{B}$ k vhodným násobkům jejích vektorů, lze docílit toho, aby v rovnicích dle předchozí věty $\alpha = \beta = 1$, resp. $\epsilon = 1$.

Zdůrazněme však, že hodnoty α, β, resp. $|\epsilon|$, udávají metrické parametry těchto ploch (viz kapitola 5.7.2) právě v případě, kdy je báze $\mathcal{B}$ kartézská, což je jen tehdy, tvoří-li-li její bázové vektory navíc ortonormální trojici (tj. $\mathcal{B}$ přejde v kanonickou bázi plochy $\mathcal{K}$) – srv. věta 5.10.3.

[87] Po eventuálním přečíslování vektorů $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_3$.

[88] Při opačné orientaci osy z by se změnilo znaménko u koeficientu stojícího u z.

5.10.4 Roviny souměrnosti kvadriky

Definice 5.10.15 Rovina ρ se nazývá *rovina souměrnosti* množiny bodů $\mathcal{M}$, jestliže ke každému $M_1 \in \mathcal{M}$ existuje $M_2 \in \mathcal{M}$ tak, že

1. střed úsečky M_1M_2 leží v ρ,
2. $M_2 - M_1 \perp \rho$

(o bodech M_1, M_2 říkáme, že jsou *souměrně sdružené podle roviny* ρ).

Uvážíme-li kvadriku $\mathcal{K}$ a průměrovou rovinu $\pi(\mathbf{s})$ sdruženou s jejím některým neasymptotickým směrem, vyplyne platnost následujícího tvrzení (z geometrické interpretace průměrové roviny (kapitola 5.10.1) a věty 5.10.3) naprosto analogicky jako v případě tvrzení 4.10.2 v případě kuželoseček (promyslete si).

Věta 5.10.16 *Každá průměrová rovina sdružená s neasymptotickým hlavním směrem kvadriky je její rovinou souměrnosti.*

Důsledek 5.10.17 *Buď* $\mathcal{K}$ *kvadrika určená v některé bázi maticí* $\mathbf{F}$. *je-li* $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ *vektor neasymptotického hlavního směru, je následující rovina rovinou souměrnosti a* $\mathbf{s}$ *je její normálový vektor (proč?)*

$$\rho: \ (s_1, s_2, s_3)\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Kromě rovin souměrnosti, které jsou právě popsanými průměrovými rovinami, existují i další roviny souměrnosti (podobně jako u kuželoseček, kde existují i jiné osy souměrnosti, než popsané větou 4.10.2) – např. v případě dvojice rovin je rovinou souměrnosti i libovolná rovina na tuto dvojici kolmá, v případě kolmých různoběžných rovin pak přistupují k rovinám souměrnosti i obě roviny.

Literatura

[1] АЛЕКСАНДРОВ, П. С. Курс аналитическои геометрии и линеинои алгебры. Москва: Наука, 1979. 511 с.

[2] BIRKHOFF, G., Mac LANE, S. *Algebra*. Vyd. 2. Bratislava: Alfa, 1974. 662 s.

[3] BERGER, M. *Géométrie*. Paris: CEDIC, 1978. 924 s.

[4] BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*. Vyd. 2. Praha: Academia, 2009. 303 s.

[5] ČIŽMÁR, J.: *Grupy geometrických transformácií*. Bratislava: Alfa, 1984. 374 s.

[6] HAVEL, V., J., HOLENDA, J. *Lineární algebra*. Praha: SNTL, 1984. 337 s.

[7] HEJNÝ, M. a kol. *Geometria 1*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1985. 362 s.

[8] HEJNÝ, M. a kol. *Geometria 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1987. 276 s.

[9] HILBERT, D. *Grundlanden der Geometrie*. Leipzig: B. G. Treubner, 1903. 175 s.

[10] HORT, D., RACHŮNEK, J. *Algebra I*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2003. 172 s.

[11] JACHANOVÁ, J. a kol. *Cvičení z geometrie I.*. Olomouc: Univerzita Palackého, 1991. 110 s.

[12] JANYŠKA, J., SEKANINOVÁ, A. *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik*. Vyd. 2. Brno: Masarykova univerzita, 2001. 178 s.

[13] JUKL, M. *Lineární algebra: Euklidovské vektorové prostory. Homomorfismy vektorových prostorů*. 2. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. 179 s.

[14] SEKANINA, M. a kol. *Geometrie I*, Praha: SPN, 1986. 197 s.

[15] SEKANINA, M. a kol. *Geometrie II*, Praha: SPN, 1988. 307 s.

[16] VANŽUROVÁ, A. *Axiomatická výstavba geometrie* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 1986. 63 s.

[17] WEYL, H. *Raum. Zeit. Materie* Berlin: Springer, 1918. 296 s.

[18] ZLATOŠ, P. *Lineárna algebra a geometria*. Bratislava: Marenčin, 2011. 741 s.

doc. RNDr. Marek Jukl, Ph.D.

Analytická geometrie

Výkonný redaktor prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr.
Odpovědný redaktor Bc. Otakar Loutocký
Technická redakce autor

Vydala a vytiskla Univerzita Palackého v Olomouci
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc
www.vydavatelstvi.upol.cz
www.e-shop.upol.cz
vup@upol.cz

Publikace neprošla ve vydavatelství redakční jazykovou úpravou

1. vydání

Olomouc 2014

Ediční řada – Učebnice

ISBN 978-80-244-3963-1

Neprodejná publikace

VUP 2014/032